

Seria 3. Prawdopodobieństwo warunkowe

1. Wzór podstawowy

Definicja 1 Prawdopodobieństwem warunkowym zajścia zdarzenia A pod warunkiem zajścia zdarzenia B , gdzie $P(B) > 0$ nazywamy liczbę

$$P(A|B) := \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Zad 1 Wybieramy rodzinę z dwojgiem dzieci. Obliczyć prawdopodobieństwo zdarzenia, że wybierzemy rodzinę z dwoma chłopcami, jeśli wiemy, że w tej rodzinie:

- starsze dziecko jest chłopcem,
- jest co najmniej jeden chłopiec.

Zad 2 Niech $P(B) > 0$. Udowodnić, że $P(A|B)$ jako funkcja A przy ustalonym B jest prawdopodobieństwem.

Twierdzenie 1 Jeśli zdarzenia A_1, \dots, A_n spełniają warunek

$$P(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) > 0,$$

to

$$P(A_1 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1) \cdot \dots \cdot P(A_n|A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}).$$

Zad 3 Student otrzymuje losowo na egzaminie 3 pytania ze 100. Aby zdać musi odpowiedzieć na wszystkie 3 pytania. Jakie jest prawdopodobieństwo, że zda jeśli zna odpowiedzi na 90 pytań.

Zad 4 Rzucamy trzema kostkami. Jakie jest prawdopodobieństwo, że na żadnej kostce nie wypadła szóstka, jeśli na każdej kostce wypadła inna liczba oczek?

Zad 5 Gracz dostał 13 kart z 52, obejrzał 8 i stwierdził, że nie ma asa. Jaka jest szansa, że w ogóle nie ma asa?

Zad 6 Z talii 32 kart wyciągamy 5. Niech

- A zdarzenie polegające na wyciągnięciu dokładnie 3 króli,
- B zdarzenie polegające na wyciągnięciu co najmniej 1 króla,
- C zdarzenie polegające na wyciągnięciu czarnego króla,
- D zdarzenie polegające na wyciągnięciu króla pik.

Znaleźć prawdopodobieństwa $P(A|B)$, $P(A|C)$, $P(A|D)$.

Zad 7 W loterii fantowej zorganizowanej na balu szansa wygranej jest równa p , przegranej q , a z prawdopodobieństwem równym r wciągamy los 'graj dalej'. Los 'graj dalej' wrzucamy z powrotem do urny i dokonujemy ponownego losowania. Jakie jest prawdopodobieństwo wygranej?

2. Wzór na prawdopodobieństwo całkowite

Twierdzenie 2 Jeśli $\{B_1, \dots, B_n\}$ jest podziałem zbioru Ω na zdarzenia o dodatnim prawdopodobieństwie, to dla każdego zdarzenia A mamy

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(A|B_i)P(B_i).$$

3. Wzór Bayesa

Twierdzenie 3 Jeśli $\{H_i\}_{i \in I}$ jest przeliczalnym rozbiem Ω na zdarzenia o dodatnim prawdopodobieństwie i $P(A) > 0$, to dla dowolnego $j \in I$ mamy

$$P(H_j|A) = \frac{P(A|H_j)P(H_j)}{\sum_{i \in I} P(A|H_i)P(H_i)}.$$

Zad 8 W pierwszej urnie są 3 kule białe i 2 czarne, a w drugiej są 4 czarne i 1 biała. Rzucamy kostką. Jeżeli na kostce wypadnie mniej niż 5 oczek to losujemy kulę z pierwszej urny, jeżeli wypadnie 5 lub 6 oczek, to losujemy kulę z drugiej urny. Jakie jest prawdopodobieństwo wylosowania kuli białej?

Zad 9 W urnie są trzy kule białe i dwie czarne. Wyciągnięto jedną kulę z urny i wyrzucono bez oglądania, a potem wyciągnięto następną. Jaka jest szansa, że za drugim razem wyciągnięto kulę białą?

Zad 10 Jest n monet, ale k z nich jest niesymetrycznych i orzeł wypada na nich z prawdopodobieństwem $1/3$. Wybrano losowo monetę i w wyniku rzutu wypadł orzeł. Jaka jest szansa, że moneta jest niesymetryczna?

Zad 11 Wśród 65 monet jest jedna z dwoma orłami. Na wybranej losowo monecie orzeł wypadł 6 razy z rzędu. Jaka jest szansa, że była to moneta z dwoma orłami?

Zad 12 W mieście działają taksówki: Zielone Taxi (85/100 samochodów) i Niebieskie Taxi (15/100 samochodów). Wiadek nocnego wypadku zakończony ucieczką kierowcy twierdzi, że samochód był niebieski. Eksperymenty pokazały, że świadek rozpoznaje kolor poprawnie w 80/100 przypadków, a myli się w 20/100 przypadków. Jaka jest szansa, że w wypadku uczestniczyła niebieska taksówka?

Zad 13 Udowodnić, że zdarzenia A_i rozłączne są niezależne wtedy i tylko wtedy tylko wtedy gdy dla prawie wszystkich zbiorów $P(A_i) = 0$. (Poza być może jednym).

Zad 14 Pokazać, że wylosowanie z talii kart asa i wylosowanie karty czerwonej są zdarzeniami niezależnymi.

Zad 15 Adam, Bolek i Czesio rzucają po kolei monetą. Wygra ten który pierwszy wyrzuci orła. Znaleźć szanse wygranej dla każdego z graczy.

Zad 16 Zdarzenia A_1, \dots, A_n są niezależne i mają jednakowe prawdopodobieństwo p . Jaka jest szansa, że zajdzie dokładnie jedno ?

Zad 17 Dwie osoby rzucają po n razy symetryczną monetą. Jakie jest prawdopodobieństwo, że każda otrzyma tę samą liczbę orłów.

Zad 18 W komodach A, B i C są po dwie szuflady. W każdej szufladzie jest jedna moneta, przy czym w komodzie A są monety złote w C monety srebrne, a w B jest jedna srebrna i jedna złota moneta. Wylosowano komodę, następnie szufladę, i znaleziono tam monetę złotą. Jaka jest szansa, że w drugiej szufladzie też jest złota moneta?