Seria 10. Wzory przybliżone

Wzór Poissona

Twierdzenie 1 *Jeśli* $n \to \infty$, $p_n \to 0$, $np_n \to \lambda > 0$, *to*

$$lim_{n\to\infty}\binom{n}{k}p_n^k(1-p)n)^{n-k} = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}.$$

Na ile dobre jest oszacowanie Poissona

Twierdzenie 2 *Niech* $X_1, X_2, ..., X_n$ *będą niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie:* $P(X_i = 1) = p$, $P(X_i = 0) = q$ $p + q = 1$, $i \in 1, 2, ..., n$. *Oznaczmy* $\lambda = np$, $\pi_k = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$ *dla* $k = 0, 1, 2, ...,$ $S_n = X_1 + ... + X_n$. *Dla każdego zbioru borelowskiego* $B \subset \mathbb{R}$ *mamy*

$$\left|P(S_n \in B) - \sum_{k \in B \cap \mathbb{N}} \pi_k\right| \leqslant \frac{\lambda^2}{n}.$$

Wynika stąd, że przybliżenie Poissona jest dobre jeśli $np_n^2 \to 0$.

Zad 1 *P-stwo* p *trafienia szóstki w Lotto jest równe* $1/\binom{49}{6} \simeq 7 \cdot 10^{-8}$. *Ilu szóstek można się spodziewać w każdym tygodniu, jeśli grający wypełniają kupony całkowicie losowy i niezależnie od siebie, a kuponów jest* $n = 10^7$.

Zad 2 *Tekst broszury zawiera* $n = 100000$ *znaków. W trakcie pisania każdy znak może zostać błędnie uprowadzony z p-stwem* 0.0001. *Zkolei redaktor znajduje każdy z błędów z p-stwem* 0.9 *po czym tekst wraca do autora, który znajduje każdy z pozostałych błędów z p-stwem* 0.5. *Jaka jest szansa, że po obu korektach broszura będzie zawierała nie więcej niż 3 błędy?*

Zad 3 *Ile średnio rodzynków powinno zawierać ciastko, żeby z p-stwem* 0.99 *dane ciastko zawierło przynajmniej jeden rodzynek?*

Zad 4 *W Warszawie na Ursynowie ginie średnio 7 samochodów tygodniowo. Jaka jest szansa, że jutro będzie dzień bez kradzieży, przy założeniu stałej intensywności złodziei.*

Zad 5 *W zasięgu stacji bazowej "Multikino"przebywa* 500 *abonentów. Szansa, że daby abonent będzie dzwonić w trakcie jednej minuty jest równa* $p = 0.01$. *Jaka jest szansa, że w ciągu jednej minuty bedzie dzwonić*

- *dokładnie dwóch abonentów;*
- *więcej niż trzech abonentów?*

Zad 6 *Do dzieży z ciastem wrzucono* 1000 *rodzynków, wymieszano i upieczono* 800 *pączków. Jaka jest szansa, że kupiony przez Ciebie pączek będzie zawierał*

- *dokładnie jeden rodzynek;*
- *przynajmniej jeden rodzynek?*

Zad 7 *W kuchni o powierzchni* $10m^2$ *wędruje po podłodze* 100 *mrówek. Jak jest szansa, że na jednym (ustalonym) decymetrze kwadratowym znajdziemy*

- *dokładnie dwie mrówki;*
- *więcej niż trzy?*

Centralne twierdzenie graniczne

Twierdzenie 3 *Niech $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie. Zakładamy, że istnieje wartość oczekiwana $\mathbf{E}X_n = m$, oraz wariancja $\mathbf{D}^2 X_n = \sigma^2$. Wówczas*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(a \leqslant \frac{S_n - nm}{\sqrt{n}\sigma} \leqslant b\right) = F(b) - F(a),$$

gdzie F jest dystrybuantą rozkładu normalnego $\mathcal{N}(0,1)$.

Zad 8 *Rzucono $n = 1200$ razy uczciwą kostką. Jaka jest szansa, że liczba szóstek będzie większa niż 17% liczby rzutów? Ile razy trzeba rzucić kostką, żeby to p-stwo nie przekraczało $\varepsilon = 0.01$?*

Zad 9 *Klient wydaje w supermarkecie srednio 99 zł, a wydana kwota ma rozkład wykładniczy.*

- *Jaka jest szansa, że 1000 osób wyda więcej niż 100000 zł?*
- *Czy sznsa, że 2000 osób wyda więcej niż 200000 zł jest mniejsza, taka sama, czy większa?*

Zad 10 *Wydział Matematyki pragnąłby przyjąć nie więcej niż 120 kandydatów. Zdających jest 250, a szansa, zaliczenia testu wynosi 0.4. Jakie jest p-stwo, że Wydział bedzie miał kłopot z nadmiarem kandydatów?*

Zad 11 *Otwarto dwie restauracje, każda po 120 miejsc. Wiadomo, że codziennie po 200 osób będzie chciało zjeść obiad a wyboru dokonują losowo. Jaka jest szansa, że w którejś restauracji zbraknie miejsc? Ile miejsc należy przygotować w każdej restauracji, by powyższe p-stwo było mniejsze niż 0.001?*

Zad 12 *Bolek rzucił 100 razy monetą i otrzymał 77 orłów. Adaś chce powtórzyć ten wyczyn i zamierza rzucać monetą do skutku. Ile średnio serii po 100 rzutów potrzeba, aby się doczekać 77 lub więcej orłów?*

Zad 13 *Wyznaczyć przybliżenie p-stw otrzymania w n rzutach symetryczną monetą co najmniej 60% orłów dla $n = 10$, 100 i 1000.*

Zad 14 *Na wydziale WNE jest 320 użytkowników poczty elektonicznej i każdy korzysta z niej średnio przez 9 minut w ciągu doby. Ile powinno być połączeń telefonicznych, żeby szansa dodzwonienia się do komputera pocztowego wynosiła co najmniej 0.75? Ile minut w ciagu doby korzysta średnio użytkownik korzysta z połączenia? Podać przybliżenie wynikające z twierdzenia*

- *twierdzenia Poissona;*
- *twierdzenia de Moivre'a-Laplace'a (CTG).*

Zad 15 *Na podstawie losowej próby szacujemy procent dorosłych osób, które umieją czytać i pisać. Wiadomo na pewno, że jest to ponad 90% (dorosłej) populacji, a błąd ma być mniejszy od 0.01 z p-stwem 0.9. Ile osób musi liczyć próba?*