Seria 1. Prawopodobieństwo klasyczne

1.Definicja Prawdopodobieństwa

Przykład Paradoksów Kawalera de Mere jako przykład, że trzeba podać ścisłą definicję prawdopdobieństwa i umieć wybrać dobry opis zjawiska.

Zad 1 *Przy rzucie trzema kostakami sumę* 11 *i* 12 *oczek można otrzymać na tyle samo sposobów. Dlaczego częściej wypada suma* 11*?*

Zad 2 *Co jest bardziej prawdopodobne: uzyskanie co najmniniej jednej jedynki przy rzucie* 4 *kostakami, czy co najmniej raz dwóch jedynek na obu kostkach przy* 24 *rzutach dwiema kostkami?*

Do zdefiniowania prawdopodobieństwa potrzeba trójki: $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. Aksjomaty dla $\mathcal{F}$:

1. $\mathcal{F} \neq \emptyset$;
2. Jeśli $A \in \mathcal{F}$, to $A' \in \mathcal{F}$;
3. Jeśli $A_i \in \mathcal{F}$ dla $i = 1, 2, ...$, to $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.

Zad 3 *Niech* A, B, C *będą zdarzeniami. Zapisać za pomocą działań na zbiorach następujące zdarzenia:*

1. *zachodzi dokładnie jedno ze zdarzeń* A, B, C*;*
2. *zachodzą dokładnie dwa spośród zdarzeń* A, B, C*;*
3. *zachodzą co najmniej dwa spośród zdarzeń* A, B, C*.*

Zad 4 *Pokazać, że* $A \cup B \cup C = (A' \cap B' \cap C')'$, $A \cap B \cap C = (A' \cup B' \cup C')'$.

Zad 5 *Udowodnić, że jeśli* A, B, C *są dowolnymi zdarzeniami, to:*

1. *jeżeli* $A \subset B$ *i* $B \subset C$*, to* $A \subset C$*;*
2. $A \cap B \subset A$*;*
3. $A \subset A \cup B$.

Aksjomaty dla $\mathbf{P}$:

1. $\mathbf{P}\mathcal{F} \to \mathbb{R}_+$;
2. $\mathbf{P}(\Omega) = 1$;
3. Jeśli $A_i \in \mathcal{F}$ dla $i = 1, 2, ...$, oraz $A_i \cap A_j = \emptyset$ dla $i \neq j$, to

$$\mathbf{P}(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_i).$$

Zad 6 *Udowodnić, że*

1. $\mathbf{P}(\emptyset) = 0$*;*
2. *Jesli* $A_1, A_2, ..., A_n$ *są parami rozłączne, to* $\mathbf{P}(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(A_i)$ *(skończona addytywność);*
3. $\mathbf{P}(A') = 1 - \mathbf{P}(A)$*;*
4. *Jeśli* $A \subset B$*, to* $\mathbf{P}(B \backslash A) = \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A)$*;*
5. *Jeśli* $A \subset B$*, to* $\mathbf{P}(A) \leqslant \mathbf{P}(B)$*;*

6. $\mathbf{P}(A) \leqslant 1$;

7. $\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B)$.

Zad 7 *Udowodnij wzór włączeń i wyłączeń w wersji dla trzech zbiorów:* A, B, C

$$\mathbf{P}(A \cup B \cup C) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) + \mathbf{P}(C) - \mathbf{P}(A \cap B) - \mathbf{P}(B \cap C) - \mathbf{P}(C \cap A) + \mathbf{P}(A \cap B \cap C).$$

Zachodzi następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1 *Wzór włączeń i wyłączeń*

$$\mathbf{P}(A_1 \cup ... \cup A_n) = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} \mathbf{P}(A_i) - \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 \leqslant n} \mathbf{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2}) + ... + (-1)^{n+1} \mathbf{P}(A_1 \cap ... \cap A_n).$$

Zadania dotyczące własności funkcji prawdopodobieństwa.

Zad 8 *Udowodnić, że* $P(A_1 \cup ... \cup A_n) \leqslant P(A_1) + ... + P(A_n)$.

Zad 9 *Udowodnić, że* $P(A \cup B) \geqslant P(A) + P(B) - 1$.

Zad 10 *Dane są* $P(A^{'}) = \frac{1}{3}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$ *i* $P(A \cup B) = \frac{2}{3}$. *Obliczyć* $P(B^{'})$, $P(A \cap B^{'})$.

2. Klasyczna definicja prawdopodobieństwa
Jeśli Ω jest zbiorem skończonym i składa się z równoprawdopodobnych zdarzeń, to

$$\mathbf{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}.$$

Zad 11 *Jaka jest szansa otrzymania pięciu pików w grze w brydża?*

Zad 12 *Obliczyć prawdopodobieństwo wyrzucenia trzech orłów w siedmiu rzutach monetą.*

Zad 13 *Rzucamy* n *kostek. Obliczyć prawdopodobieństwo, że suma wyrzuconych oczek będzie nie mniejsza niż* $6n - 1$.

Zad 14 *Rzucamy dwiema kostkami. Obliczyć prawdopobieństwo, że iloczyn liczb uzyskanych na kostkach jest liczbą parzystą.*

Zad 15 *Rzucono trzema rozróżnialnymi kostkami. Jakie jest prawdopodobieństwo wyrzucenia trzech oczek na co najmniej jednej z nich, jeśli suma wyrzuconych oczek wynosi* 10*?*

Zad 16 *Z urny zawierającej* n *białych i* n *czarnych kul pobieramy losowo parzystą liczbę kul (próbki są jednakowo prawdopodobne). Znaleźć prawdopodobieństwo, że wśród wyjętych kul będzie równa liczba kul czarnych i białych.*

Zadania ciekawsze jako przykład zastosowań prawdopodobieństwa

Zad 17 *Z jeziora wyłowiono* 200 *ryb, oznakowano je i wpuszczono do wody. Po pewnym czasie wyłowiono* 100 *ryb, a wśród nich było* 8 *oznakowanych. Za rozsądną ocenę liczby ryb w jeziorze mozna uznać liczbę ryb, dla której zrealizowalo się zdarzenie o największym prawdopodobieństwie. Jaka to liczba?*

Zad 18 *Na zajęcia przychodzi* n *osób. Jaka jest szansa, że w tej grupie dwie osoby urodziły się tego samego dnia? Ile musi być w grupie osób, żeby to prawdopodobieństwo przekroczyło* $\frac{1}{2}$.