Zadania zaliczeniowe z Procesów Stochastycznych

1. Niech $(W_t)_{t\geqslant 0}$ będzie ruchem Browna startującym z zera, rozpatrzmy następujące trzy procesy
a) $e^{-2t}W_{e^{4t}}$, $t \in (-\infty, \infty)$
b) $W_{t+1} - W_t$, $t \geqslant 0$
c) $tW_{1/t}$, $t > 0$.
Znajdź funkcję wartości średniej i kowariancji dla tych procesów. Które z tych procesów są stacjonarne, a które mają przyrosty niezależne?

2. Ustalmy $T > 0$ i liczby rzeczywiste a, b. Proces gaussowski $(X_t)_{t\in[0,T]}$ nazywamy mostem Browna z a do b jeśli $EX_t = a(1 - \frac{t}{T}) + b\frac{t}{T}$ oraz $\mathrm{Cov}(X_t, X_s) = \min(s,t) - \frac{st}{T}$ (zakładamy, że wiadomo, iż taki proces itnieje)
a) udowodnij, że istnieje modyfikacja procesu X_t mająca ciągłe trajektorie
b) co można powiedzieć o hölderowskości trajektorii ciągłej modyfikacji tego procesu?

3. Niech W_t będzie ruchem Browna startującym z zera, $a > 0 > b$ oraz $T = \inf\{t : W_t > a + bt\}, T_{\{a\}} = \inf\{t : W_t = a\}$. Pokaż, że dla $\lambda > 0$
$$Ee^{-\lambda T} = e^{-a(b+\sqrt{b^2+2\lambda})}$$
i wywnioskuj stąd, że
$$Ee^{-\lambda T_{\{a\}}} = e^{-a\sqrt{2\lambda}}.$$
(Wskazówka: $e^{sW_t - s^2t/2}$ jest martyngałem dla dowolnego parametru s, zastosuj twierdzenie Dooba)

4. Niech W_t będzie procesem Wienera startującym z zera, zaś τ momentem zatrzymania względem filtracji $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}^W_{\leqslant t}$ takim, że $\tau < \infty$ p.n.. Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $u_1, \ldots, u_k$ oraz $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_k$ zachodzi
$$E(e^{i\sum_{l=1}^k u_l(W_{\tau+t_l} - W_{\tau+t_{l-1}})}|\mathcal{F}_\tau) = e^{-\frac{1}{2}\sum_{l=1}^k u_l^2(t_l - t_{l-1})} \text{ p.n.}$$
Wywnioskuj stąd, że $(W_{t+\tau} - W_\tau)_{t\geqslant 0}$ jest procesem Wienera niezależnym od $\mathcal{F}_\tau$.