Seria 9. Zmienne losowe

1. Zmienna losowa X ma gęstość f_X. Wyznaczyć gęstość zmiennej losowej $aX+b$, gdzie $a \neq 0$. Można dla wygody załozyć, że funkcja g jest ciągłą

2. Funkcja
$$g(s) = \frac{s(1-s)}{6(1-s)}$$
jest funkcją tworzącą pewnej zmiennej losowej. Jakiej? Obliczyć wartość oczekiwaną i wariancję.

3. W pewnym kraju wszyscy zarabiają co najmniej 100 talarów miesięcznie, a co nawyżej 1000. Ponadto ułamek zarabiających ponad x talaraów wyraża się wzorem
$$G(x) = 1 - \frac{(x-100)}{810000}, \quad 100 \leqslant x \leqslant 1000.$$
Obliczyć średnią płacę

4. Pokaż, że dla dowolnej zmiennej losowej X różnej od stałej współczynnik korelacji $\rho(X,X) = 1$, $\rho(X,-X) = -1$.

5. Zauważ, że jeśli zmienne X, Y są niezależne o gęstościami f_X f_Y, to $X+Y$ ma gęstość będącą splotem gęstości zmiennych X, Y
$$f_{X+Y}(x) = f_X * f_Y(x) := \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x-y) f_Y(y) dt.$$

6. Niech $X_1, ..., X_n$ zmienne losowe niezależne o rozkładzie wykładniczym z prametrem 1. Policz rozkład zmiennej $S_n = X_1 + ...X_n$.

7. Zmienne losowe X, Y są niezależne i mają ten sam rozkład wykładniczy. Znaleźć rozkład $X - Y$.

8. Rozważmy zmienne losowe X, Y niezależne z rozkładu wykładniczego z parametrem λ. Pokaż, że zmienne $U = \min(X,Y), V = \max(X,Y) - \min(X,Y)$ są niezależne.

9. Podaj przykład ciągu zmiennych losowych zbieżnego według prawdopdobieństwa ale nie zbieżnego prawie na pewno.

10. Niech zmienne $X_1, ..., X_n$ będą niezależne z rozkładu wykładniczego. Policz rozkład zmiennej $Y = \min\{X_j : 1 \leqslant j \leqslant n\}$.

11. Niech $X_1, X_2, ...$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi. Pokaż, że zdarzenia

    (a) istnieje skończona granica $\lim_{n\to\infty} X_n$;

    (b) $\{\lim_{n\to\infty} \frac{X_1+...+X_n}{n}\}$;

należą do $\mathcal{F}_\infty$.

12. Z nierówności Czebyszewa udwodnij słabe prawo wielkich liczb. To znaczy, że jeśli $S_n = X_1 + ... + X_n$, $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\mathbf{D}^2 S_n = 0$, wówczas $\frac{S_n - \mathbf{E}S_n}{n}$ zbiega do 0 według prawdopodobieństwa.

13. Zagadka. Rzucamy monetą symetryczną. Gracz A wygrywa jeśli wypadną trzy reszki pod rząd tzn RRR. Gracz B wygrywa jeśli wypadną dwa orły pod rząd tzn. OO. Jakie jest prawdopodobieństwo wygrania dla gracza A? $(*)$ Jaka jest średnia długość tej gry?

14. Niech $X_1, ..., X_n$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie jednostajnym na $(0,1)$. Znajdź rozkład $Y = \max\{X_1, ..., X_n\}$, $Z = \min\{X_1, .., X_n\}$.

15. Niech $X_1, X_2, ...$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie jednostajnym na odcinku $(0,1)$. Policz granicę (w sensie prawie na pewno)zmiennej loswej

$$Y = \frac{X_1X_2 + X_2X_3 + ...X_{2k-1}X_{2k}}{2k}.$$