Seria 8. Zmienne losowe

1. Pokaż, że
$$\sqrt{2\pi} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

2. Pokaż, że dla $X \geqslant 0$
$$\mathbf{E}X = \int_0^{\infty} (1 - F_X(t))dt = \int_0^{\infty} P(X > t)dt.$$

3. Niech X i Y będą zmiennymi losowymi o skończonej wariancji, $\mathbf{D}^2 X \neq 0$. Wyznaczyć liczby A, b, żeby $\mathbf{E}(Y - aX - b)^2$ była minimalna. Prostą o równaniu
$$y = \frac{\mathbf{Cov}(X, Y)}{\mathbf{D}^2 X}(x - \mathbf{E}X) + \mathbf{E}Y$$
nazywamy prostą regersji.

4. Rzucamy kostką tak długo aż wyrzucimy wszystkie oczka. Znaleźć wartość oczekiwaną liczby rzutów.

5. Wyznaczyć współczynnik asymetrii dla rozkładu wykładniczego.

6. Wyznaczyć kurtozę dla rozkładu: a) jednostajnego, b) normalnego, c) wykładniczego.

7. Zmienne losowe X_0 i X_1 mają dane wartości oczekiwane, wariancje i współczynnikikorelacji: $\mathbf{E}X_0 = 0,05$, $\sqrt{\mathbf{D}^2 X_0} = 0,02$, $\mathbf{E}X_1 = 0,07$, $\sqrt{\mathbf{D}^2 X_1} = 0,03$ $\rho(X_0, X_1) = -0,5$. Niech $X_t = tX_0 + (1-t)X_1$, $t \in [0,1]$. Dla jakiego t wariancja jest minimalna.

8. Udowodnić regułę trzech sigm. Jeśli $\mathbf{D}^2 X = \sigma^2 < \infty$, to
$$P(|X - \mathbf{E}X| > 3\sigma) \leqslant \frac{1}{9}.$$

9. Pokaż, że jeśli $0 < p < q$, to
$$(\mathbf{E}|X|^p)^{\frac{1}{p}} \leqslant (\mathbf{E}|X|^q)^{\frac{1}{q}}.$$

10. Każdy z boków trójkąta dzielimy przy użyciu $n-1$ punktów na n równych części. Na każdym boku spośród tych $n-1$ punktów losujemy niezależnie po jednym punkcie: A, B, C. Jaka jest wartość oczekiwana pola trójkąta $\triangle ABC$?

11. Załóżmy, że czasy odstępu pomiędzy przyjazdami kolejnych autobusów są niezależne i mają ten sam rozkład wykładniczy z prametrem λ. Przychodzimy na przystanekw chwili t_0. Wykazać, że średni czas, jaki upłynął od przyjazdu ostatniego autobusu jest równy $\frac{1}{\lambda}(1 - e^{-\lambda t_0})$.

12. Niech $U_1, ..., U_n$ będą niezależnymi zmiennymi Bernouliego. Oznaczmy $S_n = U_1 + ... + U_n$. Wykazac, że
$$P(\frac{S_n}{\sqrt{n}} > r) \leqslant e^{-r^2/2}.$$

13. Udowodnij nierówność Jensena. Dla dowolnej funkcji wypukłej ϕ oraz zmiennej losowej X dla której $\mathbf{E}|X| < \infty, \mathbf{E}|\phi(X)| < \infty$ mamy nierówność $\mathbf{E}\phi(X) \geqslant \phi(\mathbf{E}X)$.

14. W chwili $t = 2, 3, ...$ cząstka albo znika albo z prawdopodobieństwem q albo przekształaca się w m takich samych cząstek z prawdopodobieństwem $p = 1 - q$. Jaka jest średnia liczba cząstek w n-tym pokoleniu?

15. Wykazać, że jeśli $X > 0$ i $\mathbf{E}X > 0$, to
$$\frac{1}{\mathbf{E}X} \leqslant \mathbf{E}(\frac{1}{X}).$$