

Seria 7. Zmienne losowe

1. Pokaż, że zmienna losowa X o rozkładzie

$$\mu_X(\{k\}) = P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad 0 \leq k \leq n, \quad k \in \mathbb{N},$$

jest zmienną losową dyskretną. Policz $\mathbf{E}X$, \mathbf{D}^2X .

2. Pokaż, że zmienna losowa X o rozkładzie

$$\mu_X(\{k\}) = P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad 0 \leq k, \quad k \in \mathbb{N},$$

jest zmienną losową dyskretną. Policz $\mathbf{E}X$, \mathbf{D}^2X .

3. Pokaż, że zmienna losowa X o rozkładzie

$$\mu_X(\{k\}) = P(X = k) = p(1-p)^{k-1}, \quad 0 \leq k, \quad k \in \mathbb{N},$$

jest zmienną losową dyskretną. Policz $\mathbf{E}X$, \mathbf{D}^2X .

4. Niech zmienne X_n mają rozkład $B(n, \frac{\lambda}{n})$ dla pewnego $\lambda > 0$. Pokaż, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

5. W Warszawie na Ursynowie ginie średnio 7 samochodów tygodniowo. Jaka jest szansa, że jutro będzie dzień bez kradzieży, przy założeniu stałej intensywności działania złodziei.
6. System bezpieczeństwa w laboratorium uruchamia alarm jeśli zarejestruje pięć lub więcej radioaktywnych cząsteczek na sekundę. Jeśli promieniowanie jest takie, że do sytsemu cząsteczki docierają zgodnie z rozkładem Poissona z intensywnością $\lambda = 0,5$, to jaka jest szansa, że alarm zostanie aktywowany po jednej sekundzie?
7. Jaki rozkład ma zmienna Y określająca liczbę wykonanych rzutów w doświadczeniu Bernouliego do chwili uzyskania pierwszego sukcesu. Jaki jest rozkład Y ?
8. Dla zmiennej X o rozkładzie jednostajnym $\mathcal{U}(a, b)$ z gęstością

$$f_X = \frac{1}{|b-a|} 1_{(a,b)}(x)$$

wyznacz F_X , $\mathbf{E}X$, \mathbf{D}^2X .

9. Znaleźć wartość c , żeby funkcja cx^p , $p > -1$ była gęstością rozkładu na $[0, 1]$.

10. Pokaż, że funkcja

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} 1_{(0,\infty)}(x)$$

jest gęstością rozkładu. Policz F_X , $\mathbf{E}X$, \mathbf{D}^2X .

11. Dla zmiennej losowej X o rozkładzie wykładniczym policz $P(X \in [4, 8])$.

12. Dla zmiennej losowej X o rozkładzie wykładniczym wykaż własność braku pamięci, to znaczy

$$P(X > t + s | X > t) = P(X > s).$$

13. Pokaż, że jeśli rozkład ma różniczkowalną dystrybuantę (po skończoną liczbą punktów), wówczas za gęstość f_X możemy przyjąć pochodną dystrybuanty F_X . To znaczy $f_X = F'_X$ tam gdzie F_X jest różniczkowalna, $f_X = 0$ w pozostałych punktach. Czy istnieje rozkład o ciągłej dystrybuancie nie posiadający gęstości?

14. Za pomocą dystrybuanty znajdź rozkład zmiennej $Y = 3X - 5$, jeżeli X ma rozkład wykładniczy.

15. Wykaż własność braku pamięci dla zmiennej losowej X o rozkładzie geometrycznym.