Seria 6. Zmienne losowe

1. Rzucamy dwiema kostkami. Niech X będzie większą z liczb uzyskanych na poszczególnych kostkach. Obliczyć $P(X \in [2,4])$.

2. Niech $\Omega = [0,1]$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}([0,1])$ i prawdopodobieństwem zadanymi przez miarę Lebsgue'a $|\cdot|$. Znajdź $P(X \in [0, \frac{1}{2})$, gdzie $X(x) = x^2$.

3. Niech X będzie czasem oczekiwania na pierwszego orła w rzucie monetą. Znaleźć $P(X \in 2\mathbb{N})$, gdzie $2\mathbb{N} = \{2n: \ n = 1, 2, 3, ...\}$.

4. Pokaż, że jeśli X jest stałą funkcją wówczas jest zmienną losową względem dowolnego σ-ciała $\mathcal{F}$.

5. Niech $\Omega = \{1,2,3,4\}$ oraz $\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega, \{1\}, \{2,3,4\}\}$. Czy zmienna $X(\omega) = 1 + \omega$ jest mierzalna względem σ-ciała $\mathcal{F}$. Jeśli nie podaj przykład zmiennej nie stałej która jest mierzalna względem $\mathcal{F}$.

6. Niech $\Omega = \{-2,-1,0,1,2\}$. Dla każdej z podanych funkcji znajdź najmniejsze σ-ciało względem którego jest mierzalna
   (a) $X(\omega) = \omega^2$;
   (b) $X(\omega) = \omega + 1$.

7. Jaką liczbę elementów (co najmniej) musi mieć σ-ciało względem którego mierzalna jest funkcja przyjmująca n różnych wartości.

8. Znajdź dystrybuantę dla zmiennych
   (a) $X(\omega) \equiv c$
   (b) $X(\omega) = 1$ dla $\omega \in A$, $X(\omega) = 2$ dla $\omega \in A'$, gdzie $P(A) = \frac{1}{3}$.
   (c) $X(\omega) = c_k$ z prawdopodobieństwem α_k dla $k = 1, 2, ..., n$, gdzie $c_1 < c_2 < ... < c_n$ i $\alpha_1 + ... + \alpha_n = 1$.

9. Niech $\Omega = [0,1]$ z miarą Lebesgue'a, $X(x) = 2x - 1$. Policz dystybuantę.

10. Udowodnij, że F_X ma własności
    (a) F_X jest niemalejące, to znaczy jeśli $y_1 \leqslant y_2$, to $F_X(y_1) \leqslant F_X(y_2)$;
    (b) $\lim_{y\to\infty} F_X(y) = 1$, $\lim_{y\to-\infty} F_X(y) = 0$;
    (c) Pokaż, że F_X jest prawostronnie ciągła. To znaczy $\lim_{y\to x_+} F_X(y) = F(x)$.

11. Niech $\Omega = [0,1] \times [0,1]$ będzie kwadratem z miarą jednostajnie rozłożoną. Niech $X(\omega)$ będzie odległością $\omega \in \Omega$ od najbliższej krawędzi w kwadracie. Policz F_X.

12. Pokaż, że istnieją dwie różne zmienne losowe X, X', które mają ten sam rozkład. To znaczy $\mu_X = \mu_{X'}$

13. Niech $\Omega = [0, 1]$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}([0, 1])$. Czy zmienna

    (a) $X(x) = x$ jest mierzalna względem $\mathcal{F}$;

    (b) $Y(x) = |x - \frac{1}{2}|$ jest mierzalne względem $\mathcal{F}$.

14. Niech X będzie czasem oczekiwania na pierwszego orła przy rzutach prawidłową monetą. Policz dystrybuntę F_X.

15. Pokaż, że dystrybuanta F_X jest ciągła w punkcie y wtedy i tylko wtedy, gdy $P_X(\{y\}) = 0$.