

Seria 2. Kombinatoryka

1. Udowodnij, że

$$(a) \binom{n}{k} = \binom{n-i}{k-i} + \binom{n-1}{k};$$

$$(b) \binom{n}{k} = \sum_{i=r}^{n-k+r} \binom{n-l}{k-l} \binom{i-1}{r-1}, \text{ gdzie } r \in \mathbb{Z}, 1 \leq r \leq k.$$

2. **Dni urodzin** Na zajęcia przychodzi n osób. Jaka jest szansa, że w tej grupie dwie osoby urodziły się tego samego dnia? Ile musi być w grupie osób, żeby to prawdopodobieństwo przekroczyło $\frac{1}{2}$.

3. Na ile sposobów można rozdać n nierozróżnialnych paczków k osobom?

4. Załóżmy, że n rozróżnialnych kul umieszczono losowo w n komórkach. Jaka jest szansa, że dokładnie jedna komórka jest pusta?

5. W pudełku jest 6 śrubek dobrych i 2 złe. Jaka jest szansa, że przy wyborze 4 śrubek wybierze się 3 dobre i jedną złą?

6. Z 52 kart wylosowano 6. Jaka jest szansa, że wśród wylosowanych kart będą karty czerwone i czarne?

7. Z 52 kart wylosowano 13. Jaka jest szansa, że wśród wylosowanych kart będą reprezentowane wszystkie wartości?

8. Ile jest różnych rozwiązań równania

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 25$$

(a) w zbiorze liczb całkowitych nieujemnych;

(b) w zbiorze liczb naturalnych.

9. Z jeziora wyłowiono 200 ryb, oznakowano je i wpuszczono do wody. Po pewnym czasie wyłowiono 100 ryb, a wśród nich było 8 oznakowanych. Za rozsądną ocenę liczby ryb w jeziorze można uznać liczbę ryb, dla której zrealizowało się zdarzenie o największym prawdopodobieństwie. Jaka to liczba.

10. Rozdano 52 karty czterem graczom, po 13 kart każdemu. Jak jest szansa, że

(a) każdy gracz ma asa?

(b) każdy ma jakiegoś pika?

(c) każdy gracz ma jakąś figurę?

11. Ile jest różnych wyników rzutu n nierozróżnialnych kości.

12. Przy okrągłym stole siedzą dziewczęta i chłopcy. Jaka jest szansa, że osoby tej samej płci nie siedzą obok siebie?

13. W Lotto losuje się 6 liczb z 49. Jaka jest szansa, że żadne dwie nie będą kolejnymi.

14. Znaleźć wzór na

$$\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k}.$$

15. Rzucono dziesięcioma rozróżnialnymi kostkami. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wypadnie jednakowa liczba jedynek i szóstek?