Seria 10. Zmienne losowe

1. Wyznaczyć przybliżenia prawdopodobieństw otrzymania w n rzutach symetryczną monetą co najmniej 60% orłów dla $n = 10, 100, 1000$.

2. Wydział Ekonomii pragnąłby przyjąć nie więcej niż 120 kandydatów. Zdających jest 250, a szansa zaliczenia testu 0.4. Jakie jest prawdopdobieństwo, że Wydział będzie miał kłopot z nadmiarem kandydatów?

3. Prawdopodobieńswto urodzenia chłopca wynosi 0.517. Jakie jest prawdopodobieństwo, ze wśród $n = 10000$ noworodków liczba chłopców nie przewyższy liczby dziewcząt?

4. Dwóch korektorów przeczytało książkę. Pierwszy znalazł 91 błędów a drugi 53 przy czym wspólnych błędów było 39. Następnie korektorzy zostali zwolnieni z pracy dlaczego?

5. Niech $X_1, X_2 ...$ będą niezależne, $X_k \geqslant 1$ o tym samym rozkładzie. Do czego zbiega (w sensie prawie na pewno) zmienna
$$Z_n = (X_1 X_2 \cdot ... \cdot X_n)^{\frac{1}{n}}.$$

6. Niech $X_1, X_2 ...$ będą niezależne, dodatnie o tym samym rozkładzie. Do czego zbiega (w sensie prawie na pewno) zmienna
$$Z_n = \frac{X_1^4 + ... + X_n^4}{X_1 + ... + X_n}?$$

7. Niech $(X_n)_n$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie, $\mathbf{E}X_1 = 0$, $\mathbf{D}^2 X_1 < \infty$. Wtedy dla każdego $\epsilon > 0$ mamy
$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n^{\frac{1}{2}} (\log n)^{\frac{1}{2}}} = 0$$
w sensie prawie na pewno.

8. Pokazać, że jeśli $\mathbf{P}$ jest rozkładem dyskretnym, to dla zmiennych losowych określonych na przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ zachodzi równoważność
$$X_n \xrightarrow{\text{p.n.}} \Leftrightarrow X_n \xrightarrow{P} X.$$

9. Pokaż, że jeśli $X_n \xrightarrow{\text{P}} X$, wówczas istnieje podciąg (X_{n_k}) taki, że $X_{n_k} \xrightarrow{\text{p.n}} X$.

10. Załóżmy, że rozkład prawdopodobieństwa jest zadany przez funkcję tworzącą
$$f(x) := p(\frac{1}{1 - \frac{x}{q}}).$$
Policz $\mathbf{E}X$, $\mathbf{D}^2 X$.