Kolokwium z RP1

1. Niech zmienna losowa X ma rozkład Cauchy'ego o gęstości
$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$
Dowieść, że zmienne
$$Y_1 = \frac{1}{X}, \quad Y_2 = \frac{2X}{1-X^2}, \quad Y_3 = \frac{(3X - X^3)}{(1-3X^2)}$$
mają ten sam rozkład.

2. Dane są niezależne zmienne losowe X i Y, gdzie $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$, $Y \sim \mathcal{E}(\mu)$. Niech $Z = \max\{X, Y\}$. Wyznaczyć $\mathbb{E}Z^n$.

3. Rzucamy monetą symetryczną. Kończymy jeśli wypadną trzy orły pod rząd. Niech X oznacza numer rundy w której gra się zakończy. Policz $\mathbb{E}X^2$.

4. Książka składająca się z 500 stron zawiera 50 błędów. Oszacować prawdopodobieństwo, że wylosowana strona będzie zawierać trzy błędy.

5. Niech X_n będzie ciągiem niezaleznych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie, przy czym $\mathbb{E}X_1 = a$, $0 < a < \infty$. Oznaczmy $S_n = X_1 + ... + X_n$. Dowieść, że
$$P(\sup_{n\to\infty} S_n = \infty) = 1, \quad P(\inf_{n\to\infty} S_n > -\infty) = 1.$$