Klasówka z teorii mnogości, 29 listopada 2001

Proszę rozwiązywać zadania 1 i 2 w pierwszej kolejności. Zadanie trzecie jest przeznaczone dla osób, które zrobią dwa poprzednie i będą się nudzić.

1. Funkcja $F : \mathbf{P}(\mathbb{N})^{\mathbb{N}} \to \mathbf{P}(\mathbb{N})$ jest określona warunkiem $F(x) = \bigcup\{x(i) \mid i \in \mathbb{N}\}$.
   (a) Czy F jest funkcją różnowartościową?
   (b) Czy F jest na $\mathbf{P}(\mathbb{N})$?
   (c) Czy istnieje taki zbiór $A \subseteq \mathbb{N}$, że $\vec{F}^{-1}(\{A\})$ jest zbiorem jednoelementowym?
   (d) Czy istnieje taki zbiór $A \subseteq \mathbb{N}$, że $\vec{F}^{-1}(\{A\})$ jest zbiorem czteroelementowym?

2. Ustalmy $k \in \mathbb{N} - \{0\}$. Określamy relacje $r_k, r \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ w następujący sposób:
   $\langle x, y\rangle \in r_k$ wtedy i tylko wtedy, gdy x i y są parzyste i $x - y$ jest podzielne przez k;
   $\langle x, y\rangle \in r$ wtedy i tylko wtedy, gdy x i y są nieparzyste oraz $x \cdot y > 0$.
   (a) Udowodnić, że relacja $\rho_k = r_k \cup r$ jest relacją równoważności.
   (b) Czy istnieje takie $x \in \mathbb{Z}$, że $[x]_{\rho_k}$ ma dokładnie k elementów?
   (c) Ile elementów ma zbiór ilorazowy $\mathbb{Z}/_{\rho_k}$, gdy:
      i. $k = 4$?
      ii. $k = 3$?

3. Zbiór $T \subseteq \mathbf{P}(\mathbb{N}) \times \mathbb{N}$ jest *dobry*, wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych a, x zachodzi implikacja:
   - Jeśli $\langle a, x\rangle \in T$ i $\langle b, x\rangle \in T$, oraz $a \subseteq b$ to $a = b$.

   Funkcja $\Phi : \{T \subseteq \mathbf{P}(\mathbb{N}) \times \mathbb{N} \mid T \text{ jest dobry}\} \to \mathbf{P}(\mathbb{N})^{\mathbf{P}(\mathbb{N})}$ jest określona tak:
   $$\Phi(T)(a) = \{x \in \mathbb{N} \mid \exists b\, (b \subseteq a \wedge \langle b, x\rangle \in T)\}$$
   (a) Czy Φ jest na $\mathbf{P}(\mathbb{N})^{\mathbf{P}(\mathbb{N})}$?
   (b) Czy istnieje takie T, że
      i. $\Phi(T) = \mathrm{id}_{\mathbf{P}(\mathbb{N})}$?
      ii. $\Phi(T)$ jest funkcją stałą?
   (c) Czy Φ jest funkcją różnowartościową?