

## Egzamin ze wstępu do teorii mnogości, 4 marca 2002

1. Proszę objaśnić następujące pojęcia, podając w każdym przypadku definicję i przykład.

- (a) Obraz zbioru  $a$  przy przekształceniu  $h : b \rightarrow c$ ;
- (b) Klasa abstrakcji relacji  $s$  w zbiorze  $a$  wyznaczona przez element  $b$ ;
- (c) Produkt uogólniony rodziny  $\{a_T\}_{T \in I}$ ;
- (d) Zupełny porządek częściowy;
- (e) Kres górny podzbioru  $a$  w zbiorze częściowo uporządkowanym  $\langle b, \leq \rangle$ .
- (f) Zbiór dobrze ufundowany.

2. Funkcja  $F : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$  jest określona tak:

$$F(f, g)(n) = \min(f(n), g(n)),$$

dla dowolnych  $f, g \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$  i dowolnego  $n \in \mathbb{N}$ .

- (a) Czy funkcja  $F$  jest „na”?
  - (b) Czy jest to funkcja różnowartościowa?
  - (c) Jakiej mocy jest zbiór wszystkich klas abstrakcji jądra<sup>1</sup> funkcji  $F$ ?
  - (d) Jakiej mocy są klasy abstrakcji tej relacji?
3. Udowodnić, że w każdym zbiorze częściowo uporządkowanym istnieje maksymalny (ze względu na inkluzję) podzbiór skierowany.
4. Niech  $\langle K, \leq \rangle$  będzie kratą zupełną i niech  $S$  będzie zbiorem wszystkich punktów stałych funkcji ciągłej  $f : K \rightarrow K$ . Załóżmy, że  $P \subseteq S$  i niech  $a$  będzie kresem górnym zbioru  $P$  w kracie  $K$ .
- (a) Udowodnić, że zbiór  $\{b \in S \mid b \geq a\}$  ma element najmniejszy.
  - (b) Czy ten element najmniejszy to musi być  $a$ ?
  - (c) Czy zbiór uporządkowany  $\langle S, \leq \rangle$  jest kratą zupełną?

---

<sup>1</sup>Jądrowo przekształcenia  $f : a \rightarrow b$  to relacja równoważności  $\ker(f) = \{(x, y) \in a \times a \mid f(x) = f(y)\}$ .



## Rozwiązania zadań

### Zadanie 1:

1a) Obraz zbioru  $a$  przy funkcji  $h : b \rightarrow c$  to zbiór  $\vec{h}(a) = \{z \in c \mid \exists y(y \in a \wedge f(y) = z)\}$ . Na przykład jeśli  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  jest dana wzorem  $f(n) = \min(2n, 7)$ , to obrazem zbioru  $\{1, 3, 5, 6\}$  jest zbiór  $\{2, 6, 7\}$ .

1b) Klasa abstrakcji relacji  $s$  wyznaczona przez  $b$  to zbiór  $[b]_s = \{x \in a \mid \langle x, b \rangle \in s\}$ . Na przykład klasa abstrakcji relacji  $s = \{\langle m, n \rangle \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid |m-n| \text{ dzieli się przez } 7\}$  wyznaczona przez 17 składa się ze wszystkich liczb, które dają resztę 3 przy dzieleniu przez 7.

1c) Produkt uogólniony rodziny  $\{a_T\}_{T \in t}$  to zbiór  $\prod_{T \in t} a_T$  złożony ze wszystkich funkcji  $f$  spełniających warunki

$$\text{Dom}(f) = t; \quad \forall T(T \in t \rightarrow f(T) \in a_T).$$

Na przykład gdy  $a_n = \{0, \dots, n\}$  dla  $n \in \mathbb{N}$  to produkt  $\prod_{n \in \mathbb{N}} a_n$  to zbiór wszystkich funkcji  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  spełniających dla wszystkich  $n$  warunek  $f(n) \leq n$ .

1d) Zupełny porządek częściowy to taki porządek częściowy, w którym każdy podzbiór skierowany ma kres górny. Na przykład zbiór wszystkich funkcji częściowych z  $\mathbb{N}$  w  $\mathbb{N}$  gdzie  $f \leq g$  zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy  $\text{Dom}(f) \subseteq \text{Dom}(g)$  oraz  $f(n) = g(n)$  dla dowolnego  $n \in \text{Dom}(f)$ .

1e) Kres górny podzbioru  $a$  w zbiorze częściowo uporządkowanym  $\langle b, \leq \rangle$  to najmniejsze ograniczenie górne tego zbioru, tj, taki element  $x$ , który spełnia warunki:

- $\forall y(y \in a \rightarrow y \leq x)$ ;
- $\forall z(\forall y(y \in a \rightarrow y \leq z) \rightarrow z \leq x)$ .

1f) Zbiór dobrze ufundowany to taki zbiór częściowo uporządkowany, w którym każdy niepusty podzbiór ma element minimalny.

### Zadanie 2:

2a) Funkcja  $F$  jest „na”, bo  $f = F(f, f)$ , dla dowolnego  $f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$

2b) To nie jest funkcja różnowartościowa. Jeśli przez  $\mathbf{n}$  oznaczymy funkcję stale równą  $n$ , to  $F(\mathbf{0}, \mathbf{1}) = F(\mathbf{0}, \mathbf{2})$ .

2c) Zbiór wszystkich klas abstrakcji jądra jest oczywiście równoliczny ze zbiorem wartości funkcji. Ponieważ funkcja jest „na”, więc w tym wypadku jest to zbiór mocy  $\overline{\mathbb{N}^{\mathbb{N}}} = \mathfrak{C}$ .

- 2d) Klasy abstrakcji tej relacji to przeciwobrazy zbiorów jednoelementowych. Każdy taki przeciwobraz  $F^{-1}(\{f\})$  jest mocy continuum. Z jednej strony jest on zawarty w  $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$  więc jest mocy co najwyżej  $\mathfrak{C}$ . Z drugiej strony, do  $F^{-1}(\{f\})$  należą wszystkie pary postaci  $\langle f, f + g \rangle$ , gdzie  $g$  jest dowolną funkcją z  $\mathbb{N}$  do  $\mathbb{N}$ . (Oczywiście przez  $f + g$  rozumiemy funkcję określoną wzorem  $(f + g)(n) = f(n) + g(n)$ .) Ponieważ zbiór par postaci  $\langle f, f + g \rangle$  jest mocy continuum, więc moc naszej klasy jest co najmniej taka. Z twierdzenia Cantora-Bernsteina wnioskujemy, że każda klasa ma moc  $\mathfrak{C}$ .

### Zadanie 3:

Rozpatrzmy rodzinę  $\mathcal{S}$  wszystkich skierowanych podzbiorów zbioru częściowo uporządkowanego  $\langle A, \leq \rangle$ . Mamy udowodnić, że zbiór  $\mathcal{S}$  (uporządkowany przez inkluzję) ma element maksymalny. Należy w tym celu pokazać, że suma każdego łańcucha  $L$  zbiorów skierowanych jest zbiorem skierowanym. Wówczas bowiem suma łańcucha  $L$  jest jego ograniczeniem górnym w  $\mathcal{S}$  i można zastosować lemat Kuratowskiego-Zorna. Przypuśćmy więc, że  $a, b \in \bigcup L$ . Wtedy  $a \in A$ ,  $b \in B$ , dla pewnych  $A, B \in L$ . Jeden z tych zbiorów jest zawarty w drugim, bo  $L$  jest łańcuchem. Jeśli na przykład  $A \subseteq B$  to  $a, b \in B$  i musi istnieć takie  $c \in B$ , że  $a, b \leq c$ . Oczywiście  $c \in \bigcup L$ , więc pokazaliśmy, że  $a$  i  $b$  mają wspólne ograniczenie w  $\bigcup L$ . A więc  $\bigcup L$  faktycznie jest zbiorem skierowanym.

### Zadanie 4:

- 4a) Funkcja  $f$  jest monotoniczna (bo jest ciągła), więc  $f(a) \geq f(p) = p$ , dla dowolnego  $p \in P$ . Zatem  $f(a)$  jest ograniczeniem górnym zbioru  $P$  i mamy  $a \leq f(a)$ . Dalej przez indukcję wynika, że elementy  $f^n(a)$ , gdzie  $n \in \mathbb{N}$ , tworzą ciąg wstępujący. Niech  $b$  będzie kresem górnym tego ciągu (w kracie  $K$ ). Wówczas

$$f(b) = f(\sup\{f^n(a) \mid n \in \mathbb{N}\}) = \sup\{f^{n+1}(a) \mid n \in \mathbb{N}\} = \sup\{f^n(a) \mid n \in \mathbb{N}\} = b,$$

a więc  $b$  jest punktem stałym. Przy tym  $b$  jest najmniejszym punktem stałym większym lub równym  $a$ . Jeśli bowiem  $c \geq a$  jest punktem stałym, to łatwo pokazać przez indukcję, że  $c \geq f^n(a)$  dla dowolnego  $n$ , i w konsekwencji  $c \geq b$ .

- 4b) Nie. Na przykład weźmy taką funkcję  $f : \mathbf{P}(\mathbb{N}) \rightarrow \mathbf{P}(\mathbb{N})$ :

$$f(X) = \begin{cases} X, & \text{jeśli } \overline{\overline{X}} \leq 1; \\ X \cup \{7\}, & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Wtedy każdy zbiór jednoelementowy jest punktem stałym funkcji  $f$ . Jeśli teraz  $P = \{\{2\}, \{3\}\}$ , to kresem zbioru  $P$  w kracie  $\mathbf{P}(\mathbb{N})$  jest zbiór  $\{2, 3\}$ , który nie jest punktem stałym.

- 4c) Tak. W pierwszej części zadania mowa o tym, że każdy podzbiór  $P$  zbioru  $S$  ma kres górny w  $S$ .