Egzamin ze wstępu do teorii mnogości, 21 stycznia 2002

1. Czy następujące stwierdzenia są prawdziwe? Jeśli nie, co należy wpisać zamiast wielokropka? To zadanie wyjątkowo nie wymaga uzasadnień.

   (a) Przeciwobraz obrazu zbioru a przy ... przekształceniu f pokrywa się ze zbiorem a.

   (b) Jeśli d jest relacją równoważności w a oraz $b, c \in a$ ... to $[b]_d \cap [c]_d = \emptyset$.

   (c) W każdym drzewie nieskończonym ... istnieje gałąź nieskończona.

   (d) Produkt uogólniony dowolnej ... rodziny zbiorów skończonych jest zawsze skończony lub nieprzeliczalny

   (e) Każde ciągłe ... przekształcenie kraty zupełnej w siebie ma najmniejszy punkt stały.

   (f) Jeśli $\overline{\overline{A}} = \mathfrak{C}$ i B jest ... zbiorem przeliczalnym, to $\overline{\overline{A^B}} = \mathfrak{C}$.

   (g) Jeśli A jest ... zbiorem przeliczalnym, to $\overline{\overline{A^A}} = \mathfrak{C}$.

   (h) Każdy przedział ... w zbiorze liczb rzeczywistych można dobrze uporządkować.

2. Jaka jest moc zbioru wszystkich dobrze ufundowanych częściowych porządków w $\mathbb{N}$?

3. Rozpatrzmy następujące częściowe uporządkowanie zbioru $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$:
$$f \leq g \quad \Leftrightarrow \quad \forall x\,(f(x) \leq g(x)).$$

   (a) Czy ten porządek jest liniowy?

   (b) Czy ten porządek jest dobrym ufundowaniem?

   (c) Czy ten porządek jest kratą zupełną?

   (d) Czy istnieje w tym porządku łańcuch nieskończony?

   (e) Czy istnieje w tym porządku antyłańcuch nieskończony?

   (f)* Czy istnieje w tym porządku antyłańcuch nieprzeliczalny?

   (g)* Czy istnieje łańcuch nieprzeliczalny w zbiorze $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ uporządkowanym w analogiczny sposób, tj. przez relację:
$$f \leq g \quad \Leftrightarrow \quad \forall x\,(f(x) \leq g(x))?$$

4. Niech A będzie ustalonym podzbiorem płaszczyzny, który ma przynajmniej dwa elementy. Udowodnić, że istnieje podzbiór $B \subseteq A$, o takich własnościach:

   - Żadne trzy różne punkty zbioru B nie są współliniowe;
   - Każdy punkt zbioru $A - B$ leży na pewnej prostej wyznaczonej przez dwa różne punkty ze zbioru B.

Rozwiązania zadań

Zadanie 1:

1a) Nieprawda. Trzeba wstawić „*różnowartościowym*”.

1b) Nieprawda. Trzeba wstawić „*i nie są w relacji d*”.

1c) Nieprawda. Trzeba wstawić „*o skończonym rozgałęzieniu*”.

1d) Prawda. Jeśli wszystkie zbiory są niepuste, i nieskończenie wiele z nich ma przynajmniej dwa elementy to produkt musi być nieprzeliczalny.

1e) Prawda. W kracie zupełnej wystarczy nawet aby przekształcenie było monotoniczne.

1f) Nieprawda. Trzeba wstawić „*niepustym*”.

1g) Nieprawda. Trzeba wstawić „*nieskonczonym*”.

1h) Prawda. Nie tylko przedział w $\mathbb{R}$, ale w ogóle każdy zbiór można dobrze uporządkować.

Zadanie 2:

Niech Z oznacza zbiór wszystkich dobrze ufundowanych częściowych porządkow w $\mathbb{N}$. Oczywiście $\overline{\overline{Z}} \leq \mathfrak{C}$, bo $Z \subseteq \mathbf{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$. Aby udowodnić nierówność $\mathfrak{C} \leq \overline{\overline{Z}}$ określimy $F : \mathbf{P}(\mathbb{N} - \{0\}) \xrightarrow{1-1} Z$. Dla dowolnego $A \subseteq \mathbb{N} - \{0\}$ przyjmiemy

$$F(A) = \{\langle a, 0\rangle \mid a \in A\} \cup \{\langle n, n\rangle \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Relacja $F(A)$ jest dobrym ufundowaniem zbioru $\mathbb{N}$ (łańcuchy są co najwyżej dwuelementowe). Ponadto jeśli $A \neq B$, np. jeśli $a \in A - B$, to $\langle a, 0\rangle \in F(A) - F(B)$, więc funkcja faktycznie jest różnowartościowa. Z nierówności $\overline{\overline{Z}} \leq \mathfrak{C}$ i $\mathfrak{C} \leq \overline{\overline{Z}}$ i z twierdzenia Cantora-Bernsteina wynika równość.

Zadanie 3:

3a) Nie. Na przykład funkcje g_0 i g_1 (zob. część 3e) nie są porównywalne.

3b) Nie. Na przykład takie funkcje f_n tworzą ciąg malejący:

$$f_n(m) = \begin{cases} 0, & \text{jeśli } m \leq n; \\ 1, & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

3c) Tak. Jest izomorficzny z $\langle \mathbf{P}(\mathbb{N}), \subseteq \rangle$.

3d) Tak. Ciąg malejący (część 3b) jest oczywiście nieskończonym łańcuchem.

3e) Tak, na przykład zbiór $\{g_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, gdzie

$$g_n(m) = \begin{cases} 1, & \text{jeśli } m = n; \\ 0, & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

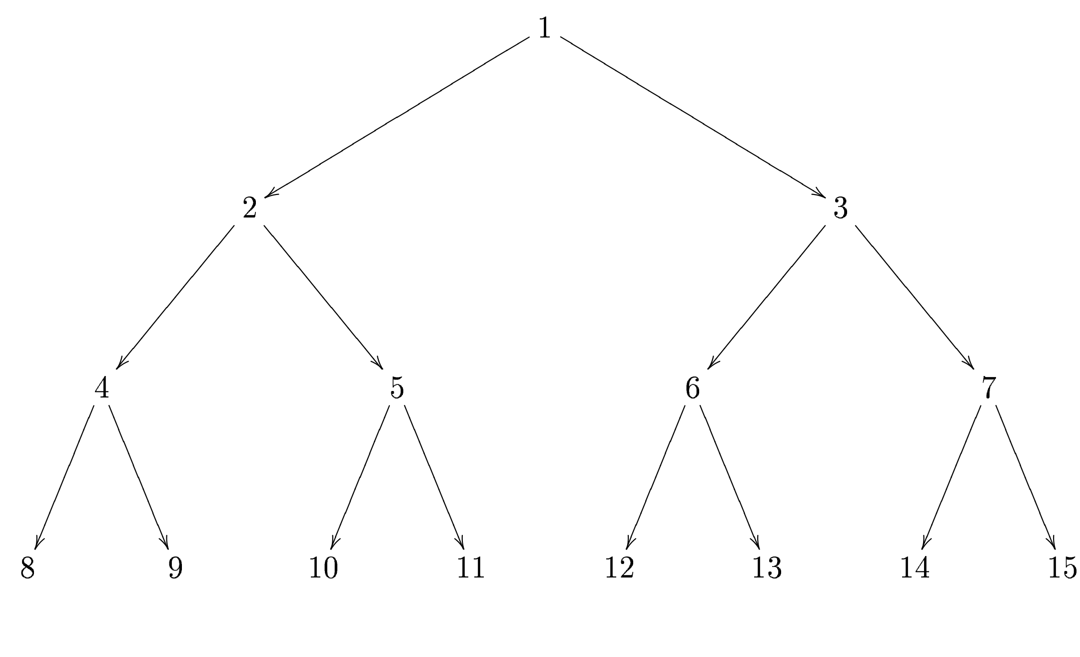
3f) Tak. Wystarczy oczywiście wskazać nieprzeliczalny antyłańcuch w $\langle \mathbf{P}(\mathbb{N}), \subseteq \rangle$ (por. część 3c). Dla dowolnego ciągu $\alpha : \mathbb{N} \to 0, 1$ skonstruujemy przez indukcję ściśle rosnącą funkcję $f_\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Przyjmujemy $f_\alpha(0) = 1$, oraz

$$f_\alpha(n+1) = \begin{cases} 2f_\alpha(n), & \text{jeśli } \alpha(n) = 0; \\ 2f_\alpha(n) + 1, & \text{jeśli } \alpha(n) = 1. \end{cases}$$

Jeśli teraz $A_\alpha = \mathrm{Rg}(f_\alpha)$, to zbiory A_α tworzą antyłańcuch. Istotnie, niech $\alpha \neq \beta$ i niech $m = \min\{k \in \mathbb{N} \mid \alpha(k) \neq \beta(k)\}$. Wtedy mamy $f_\alpha(m+1) \in A_\alpha - A_\beta$ oraz $f_\beta(m+1) \in A_\beta - A_\alpha$.

Zbiory A_α odpowiadają nieskończonym krawędziom drzewa na rysunku.

3g) Funkcje f_α z części 3f tworzą nieprzeliczalny łańcuch w $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.



Zadanie 4

Należy udowodnić, że rodzina $Z = \{B \subseteq A \mid \text{żadne trzy punkty w B nie są współliniowe}\}$ ma element maksymalny. W tym celu rozpatrzmy dowolny łańcuch $Ł$ w Z. Suma tego łańcucha należy do Z. Jeśli bowiem $a, b, c \in \bigcup Ł$ to każdy z tych punktów należy do pewnego zbioru z łańcucha $Ł$. Jeden z tych trzech zbiorów zawiera pozostałe (bo przecież $Ł$ jest łańcuchem) więc punkty a, b, c nie mogą być współliniowe.

Skoro $\bigcup Ł \in Z$ to $\bigcup Ł$ jest ograniczeniem górnym łańcucha $Ł$. A więc pokazaliśmy, że dowolny łańcuch w Z ma ograniczenie górne. Z lematu Kuratowskiego-Zorna wynika istnienie elementu maksymalnego. Jest to zbiór spełniający warunki zadania.