

Zadania z podstaw matematyki dla 1 roku informatyki¹

Zadania na rozgrzewkę

1. Zaznacz na rysunku zbiory:

(a) $\{\langle x, y \rangle \in \mathbb{R}^2 \mid (x^2 + y^2 > 1) \rightarrow [(x^2 + y^2 \leq 2) \wedge (\neg(x \cdot y = 0) \rightarrow |y| = |x|)]\}$;

(b) $\{\langle x, y \rangle \in \mathbb{R}^2 \mid ((x^2 + y^2 = 4) \rightarrow (y > -1 \wedge y \neq 1)) \rightarrow (x^2 + y^2 = 9)\}$;

(c) $\{\langle x, y \rangle \in \mathbb{R}^2 \mid (x \cdot x + y \cdot y > 1) \rightarrow (y + x > 0)\}$;

(d) $\{\langle x, y \rangle \in \mathbb{R}^2 \mid \forall x(x^2 + 1 > y) \rightarrow (y + x < 0)\}$.

2. Zaznacz na rysunku zbiory

(a) $\{z \in \mathbb{R} \mid \forall x \exists x(x = 1)\}$;

(b) $\{z \in \mathbb{R} \mid \exists x \forall x(x = 1)\}$;

(c) $\{x \in \mathbb{R} \mid \forall x \exists x(x = 1)\}$.

3. Zaznacz na rysunku zbiory:

(a) $\{\langle x, y \rangle \in \mathbb{R}^2 \mid (x \cdot x < 0) \rightarrow (x \cdot x > 0)\}$;

(b) $\{\langle x, y \rangle \in \mathbb{R}^2 \mid (x > y) \rightarrow (y + x > 0)\}$.

4. Zaznacz na rysunku zbiory:

(a) $\{x \in \mathbb{R} \mid \exists y \forall z(y - z^2 < x \wedge x \leq y + \frac{1}{2} \wedge y \geq 1)\}$;

(b) $\{\langle x, y \rangle \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 > 1 \rightarrow \exists z(x^2 + (y - z)^2 \leq \frac{1}{4})\}$;

(c) $\{\langle x, y \rangle \in \mathbb{R}^2 \mid \forall z(y^2 + (x - z)^2 \neq 1) \rightarrow \exists z((x - z)^2 + (y - z^2)^2 = 1)\}$.

Logika

5. Zbadać, czy następujące formuły są tautologiami rachunku zdań i czy są spełnialne:

(a) $(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow s) \wedge (\neg p \vee \neg s) \rightarrow (\neg p \vee \neg q)$;

(b) $(p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow r)$;

(c) $((p \rightarrow q) \rightarrow r) \wedge \neg(((q \rightarrow r) \rightarrow r) \rightarrow r)$;

(d) $(p \rightarrow q) \wedge (\neg p \rightarrow r) \rightarrow (r \rightarrow \neg q)$;

(e) $((\neg p \rightarrow q) \rightarrow r) \rightarrow \neg(p \rightarrow q)$;

(f) $p \vee (\neg p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$;

(g) $(p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow \neg q)$;

(h) $q \vee r \rightarrow (p \vee q \rightarrow p \vee r)$;

(i) $(p \vee q \vee r) \wedge (q \vee (\neg p \wedge s)) \wedge (\neg s \vee q \vee r) \rightarrow q$;

¹Zadania są zebrane przypadkowo, nie zawsze sprawdzone i bez gwarancji poprawności. Korzystać można na własne ryzyko i odpowiedzialność. Zadania i rozwiązania pochodzą od różnych autorów, między innymi Mikołaja Bojańczyka, Jacka Chrzęszcza, Norberta Dojera, Piotra Hoffmana, Tomasza Kazany, Bartka Klina, Eryka Kopczyńskiego, Agnieszki Kozubek, Sławomira Lasoty, Filipa Murlaka, Linha Anh Nguyena, Damiana Niwińskiego, Marcina Peczarskiego, Marcina Penconka, Wojciecha Plandowskiego, Aleksego Schuberta, Adama Śląskiego, Michała Strojnowskiego, Jerzego Tyszkiewicza, Darii Walukiewicz-Chrzęszcz, Piotra Wilkina. Jednak autorstwo wielu zadań jest trudne do ustalenia. Za wykrycie błędów dziękuję Paniom Weronice Kisielińskiej i Agnieszce Kozubek oraz Panom Radosławowi Burnemu, Jackowi Chrzęszczowi, Kamilowi Herbie, Januszowi Kudelce, Sławomirowi Lasocie, Kamilowi Majdanikowi, Damianowi Rodziewiczowi, Maciejowi Różańskiemu, Damianowi Sawickiemu, Adamowi Śląskiemu, Michałowi Włodarczykowi i Karolowi Wychowańcowi.

- (j) $(p \vee q) \leftrightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow q)$;
 (k) $((p \rightarrow q) \rightarrow r) \rightarrow ((r \rightarrow p) \rightarrow (q \rightarrow p))$;
 (l) $((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow (p \rightarrow q)$.

6. Jak rozumiesz następujące zdania? Jak je sformułować, żeby nie budziły wątpliwości?

- (a) *Nie wolno pić i grać w karty.*
 (b) *Nie wolno pluć i łapać.*
 (c) *Zabrania się jedzenia lub picia na terenie laboratorium komputerowego.²*
 (d) *Zabrania się zaśmiecania i zanieczyszczania drogi.³*
 (e) *Zabrania się zaśmiecania lub zanieczyszczania drogi.⁴*
 (f) *Wpisać, gdy osoba ubezpieczona nie posiada numerów identyfikacyjnych NIP lub PESEL.⁵*
 (g) *Podaj przykład liczby, która jest pierwiastkiem pewnego równania kwadratowego o współczynnikach całkowitych i takiej, która nie jest.*
 (h) *Warunek zachodzi dla każdego x i dla pewnego y .*
 (i) *Funkcja częściowa z A do B nie jest na ogół funkcją z A do B .*
 (j) *Każda liczba ma pewien dzielnik pierwszy.*
 (k) *Każdy marynarz zna pewną knajpę.*

7. Sformułować poprawnie zaprzeczenia stwierdzeń:

- (a) *Liczby m i n są pierwsze.*
 (b) *Liczby m i n są względnie pierwsze.*

8. Zapisać następujące stwierdzenia w języku arytmetyki liczb naturalnych $(+, \cdot, 0, 1, =)$ używając symboli logicznych i kwantyfikatorów:

- (a) *Liczba a jest mniejsza lub równa liczbie b .*
 (b) *Liczba a jest resztą z dzielenia liczby b przez c .*
 (c) *Liczba a jest pierwsza.*
 (d) *Liczba a jest największym wspólnym dzielnikiem liczb b i c , chyba, że jest parzysta.*
 (e) *Liczby x i y mają te same dzielniki pierwsze.*
 (f) *Pewne liczby są parzyste a inne nie są.*
 (g) *Nie każda liczba jest parzysta.*
 (h) *Żadna liczba parzysta nie jest mniejsza od każdej liczby pierwszej.*
 (i) *Zbiór liczb pierwszych jest nieskończony.*
 (j) *Warunkiem koniecznym na to, aby n było nieparzyste, jest aby n było podzielne przez 6.*
 (k) *Prawie wszystkie liczby naturalne są parzyste.*

9. Pokazać, że następujące formuły są tautologiami:

- (a) $(\exists y p(y) \rightarrow \forall z q(z)) \rightarrow \forall y \forall z (p(y) \rightarrow q(z))$;
 (b) $(\forall x \exists y r(x, y) \rightarrow \exists x \forall y r(y, x)) \rightarrow \exists x \forall y (r(x, y) \rightarrow r(y, x))$;

²Dotyczy również korytarza.

³Kodeks Drogowy przed nowelizacją w roku 1997.

⁴Kodeks Drogowy (Art. 45 p. 1(9)) po nowelizacji w roku 1997.

⁵Instrukcja wypełniania formularza ZUS ZCZA (Zgłoszenie danych o członkach rodziny...)

- (c) $\forall x \exists y ((p(x) \rightarrow q(y)) \rightarrow r(y)) \rightarrow ((\forall x p(x) \rightarrow \forall y q(y)) \rightarrow \exists y r(y))$;
 (d) $\forall x (p(x) \rightarrow \exists y q(y)) \rightarrow \exists y (\exists x p(x) \rightarrow q(y))$.
 (e) $(\forall x P(x) \rightarrow \forall y Q(y)) \rightarrow \exists x (P(x) \rightarrow \forall y Q(y))$;
 (f) $\exists y (P \rightarrow Q(y)) \leftrightarrow (P \rightarrow \exists y P(y))$.

Wskazówka: Przekształcić formuły do odpowiedniej postaci, stosując prawa De Morgana i prawa dystrybucyjności.

^R 10. Czy następujące formuły są tautologiami?

- (a) $\forall x (p(x) \rightarrow q(x)) \vee \forall x (q(x) \rightarrow p(x))$;
 (b) $\exists y (P(x) \rightarrow \forall y P(y))$;
 (c) $\forall x \exists y \forall u \exists v P(x, y, u, v) \rightarrow \forall u \exists v \forall x \exists y P(x, y, u, v)$;
 (d) $(\exists x \exists y P(x, y) \rightarrow \forall y R(y)) \rightarrow \forall x (P(x, x) \rightarrow R(x))$.

11. Czy następujące definicje można lepiej sformułować?

- (a) *Zbiór A jest dobry, jeśli ma co najmniej 2 elementy.*
 (b) *Zbiór A jest dobry, jeśli dla każdego $x \in A$, jeśli x jest parzyste, to x jest podzielne przez 3.*
 (c) *Zbiór A jest dobry, jeśli dla pewnego $x \in A$, jeśli x jest parzyste, to x jest podzielne przez 3.*

12. Wskazać błąd w rozumowaniu:

- (a) *Aby wykazać prawdziwość tezy „Dla dowolnego n , jeśli zachodzi warunek $W(n)$ to zachodzi warunek $U(n)$ ” założymy, że dla dowolnego n zachodzi $W(n)$...*
 (b) *Aby wykazać prawdziwość tezy „Dla pewnego n , jeśli zachodzi warunek $W(n)$ to zachodzi warunek $U(n)$ ” założymy, że dla pewnego n zachodzi $W(n)$...*

^R 13. Wskazać błąd logiczny w następującym rozumowaniu:

Udowodnimy, że istnieje największa liczba rzeczywista. W tym celu rozpatrzmy dwa przypadki. Przypadek pierwszy ma miejsce, gdy dla każdego $x \in \mathbb{R}$ i pewnego $y \in \mathbb{R}$ zachodzi $x \leq y$. Wtedy y jest największą liczbą rzeczywistą. Jeśli przypadek pierwszy nie zachodzi, to z prawa De Morgana wnioskujemy, że dla pewnego $x \in \mathbb{R}$ i każdego $y \in \mathbb{R}$ nierówność $x \leq y$ jest fałszywa. Wtedy jednak $x > y$, dla każdego $y \in \mathbb{R}$, skąd w szczególności $x > x$, sprzeczność.

14. Jak poprawnie sformułować następujące zadanie z egzaminu z rachunkowości w SGH?

Naliczone odsetki od kredytów bankowych są:

- a) *stratami nadzwyczajnymi*
 b) *kosztami działalności operacyjnej zasadniczej*
 c) *kosztami pozostałej działalności operacyjnej*
 d) *żadna odpowiedź nie jest prawidłowa*

15. Metodą naturalnej dedukcji udowodnić następujące formuły:

- (a) $((p \wedge q) \rightarrow r) \leftrightarrow (p \rightarrow (q \rightarrow r))$;
 (b) $(p \rightarrow q) \rightarrow ((\neg p \rightarrow q) \rightarrow q)$;
 (c) $(p \rightarrow q \vee r) \leftrightarrow (p \rightarrow q) \vee r$;
 (d) $(\neg p \rightarrow \neg q) \wedge (\neg p \rightarrow q) \rightarrow p$;

- R 16. Która z następujących formuł jest tautologią?
- (a) $(\forall x R(x) \rightarrow \exists y S(y)) \rightarrow \forall x \exists y (R(x) \rightarrow S(y))$;
 (b) $(\forall x R(x) \rightarrow \exists y S(y)) \rightarrow \exists x (R(x) \rightarrow S(x))$.
- R 17. Niech S będzie pewnym nieskończonym zbiorem formuł zdaniowych zbudowanych ze zmiennych p_1, \dots, p_n . Udowodnić, że istnieje taki nieskończony podzbiór A zbioru S , że wszystkie formuły w A są parami równoważne.⁶

Rachunek zbiorów

18. Ile elementów mają zbiory $\{1, 2\}$, $\{1, 2, 1\}$, $\{\{1, 2\}, \{2, 1\}, \{1, 2, 1\}\}$, $\{a, b\}$?
19. Sprawdzić, czy dla dowolnych zbiorów A, B, C zachodzą równości:
- (a) $A - (B \cup C) = (A - B) \cup (A - C)$;
 (b) $(A \cup B \cup C) - (A \cup B) = C$;
 (c) $A = (A \cap B) \cup (A - B)$;
 (d) $(A - B) - C = A - (B \cup C)$;
 (e) $A \cup (A \cap B) = A$.
- R 20. Pokazać, że:
- (a) jeśli $A - B = B - A$, to $A = B$;
 (b) jeśli $A \cup B = C$, to $C - B = A - B$;
 (c) jeśli $A \cup B \subseteq A \cap B$, to $A = B$;
 (d) jeśli $A \div B = A \div C$ to $B = C$.
21. Uzupełnić poniższe zdania, wpisując w miejsce pierwszego wielokropka znak \in lub \subseteq , a w miejsce drugiego wielokropka C lub $\cup C$.
- (a) Jeśli $A \in B \in C$, to $A \dots \dots$
 (b) Jeśli $A \in B \subseteq C$, to $A \dots \dots$
 (c) Jeśli $A \subseteq B \in C$, to $A \dots \dots$
 (d) Jeśli $A \subseteq B \subseteq C$, to $A \dots \dots$
- R 22. Które z poniższych implikacji są prawdziwe dla dowolnych zbiorów X i Y :
- (a) Jeśli $P(Y) \subseteq X$, to $Y \subseteq \cup X$?
 (b) Jeśli $Y \subseteq \cup X$, to $P(Y) \subseteq X$?
23. Zbadać, czy dla dowolnych A, B i C zachodzi
- (a) $P(A \cup B) = P(A) \cup P(B)$;
 (b) $P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$;
 (c) $A - (B \cup C) = (A - B) - C$;
 (d) $A - (B - C) = (A - B) \cup C$.
24. Udowodnić równoważność $A \cap C \subseteq B \leftrightarrow C \subseteq -A \cup B$.
25. Pokazać, że $A \subseteq B$ zachodzi wtedy i tylko wtedy gdy $P(A) \subseteq P(B)$.
26. Czy jeśli $A \subseteq B$ to $\cup A \subseteq \cup B$? Czy jeśli $A \subseteq B$ to $\cap B \subseteq \cap A$?
27. Czy jeśli $\cup A \subseteq \cup B$ to $A \subseteq B$? A co jeśli $\cap B \subseteq \cap A$?

⁶Zadanie ściągnięte z Uniwersytetu Wrocławskiego

28. Pokazać, że $\bigcup P(A) = A$, dla dowolnej rodziny A .

29. Niech $\mathcal{A} : P(P(\mathbb{R}))$ będzie rodziną zbiorów spełniającą warunek

$$(\forall B \in \mathcal{A})(\forall C \subseteq \mathbb{R})(C \subseteq B \longrightarrow C \in \mathcal{A}).$$

Pokazać, że $\bigcup \mathcal{A} = \{z \in \mathbb{R} \mid \{z\} \in \mathcal{A}\}$.

30. Udowodnić, że dla dowolnej rodziny zbiorów $\{A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, zachodzi równość

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n,$$

gdzie $B_n = A_n - \bigcup_{i < n} A_i$, dla $n \in \mathbb{N}$.

^R 31. Zaznacz w układzie współrzędnych zbiór $\bigcup_{n \in \mathbb{N} - \{0\}} A_n$, gdzie

$$A_n = \{\langle x, y \rangle \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 > \frac{1}{n^2} \rightarrow n(y - x^2 - 1) \geq 1\}.$$

Brzegi obszarów zawarte w zbiorze proszę zaznaczyć pogrubioną linią, brzegi nie zawierające się w zbiorze – linią przerywaną.

32. Udowodnić, że jeśli $A_n \subseteq A_{n+1}$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$, to $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n \in H} A_n$, dla dowolnego nieskończonego $H \subseteq \mathbb{N}$.

33. Znaleźć $\bigcup_{t \in \mathbb{R}_+} A_t$ i $\bigcap_{t \in \mathbb{R}_+} A_t$, gdzie:

(a) $A_t = (1 - \frac{1}{t}, 2 + \sqrt{t})$, dla $t \in \mathbb{R}_+$;

(b) $A_t = [\sqrt{t}, \sqrt{2t}]$, dla $t \in \mathbb{R}_+$.

34. Znaleźć $\bigcup_{t \in \mathbb{R}} A_t$, gdzie $A_t = \{\langle x, y \rangle \in \mathbb{R}^2 \mid |x - t| + |y| \leq 1\}$, dla $t \in \mathbb{R}$.

35. Niech $A_{n,m} = \{x \in \mathbb{R} \mid \frac{n-1}{m+1} \leq x < n + m\}$, dla $m, n \in \mathbb{N}$. Znaleźć $\bigcup_n \bigcap_m A_{n,m}$ oraz $\bigcap_n \bigcup_m A_{n,m}$.

36. Określić taką rodzinę $\{A_{i,j} \mid i, j \in I\}$, żeby wszystkie poniższe zbiory były różne:

$$\bigcup_i \bigcap_j A_{i,j}, \quad \bigcap_i \bigcup_j A_{i,j}, \quad \bigcup_i \bigcup_j A_{i,j}, \quad \bigcap_i \bigcap_j A_{i,j}, \quad \bigcup_j \bigcap_i A_{i,j}, \quad \bigcap_j \bigcup_i A_{i,j}.$$

37. Niech $T = \bigcup_{s \in S} T_s$ i niech \mathcal{K} będzie rodziną wszystkich podzbiorów T , które z każdym ze zbiorów T_s mają przynajmniej jeden element wspólny. Udowodnij, że

$$\bigcup_{s \in S} \bigcap_{t \in T_s} A_t = \bigcap_{Y \in \mathcal{K}} \bigcup_{t \in Y} A_t.$$

38. Czy dla dowolnej rodziny indeksowanej $\{A_{i,j}\}_{i,j \in \mathbb{N}}$ zachodzi równość:

$$\bigcup_{i \in \mathbb{N}} \bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_{i,j} = \bigcup \{A_{i,j} \mid i, j \in \mathbb{N}\}?$$

39. Która z następujących równości zachodzi dla dowolnych zbiorów $A_{t,s}$, gdzie $t \in T$, $s \in S$:

$$\bigcup_{t \in T} \prod_{s \in S} A_{t,s} = \prod_{s \in S} \bigcup_{t \in T} A_{t,s} \quad \bigcap_{t \in T} \prod_{s \in S} A_{t,s} = \prod_{s \in S} \bigcap_{t \in T} A_{t,s}?$$

40. W aksjomatycznej teorii mnogości definiuje się parę uporządkowaną $\langle a, b \rangle$ jako zbiór $\langle a, b \rangle = \{\{a\}, \{a, b\}\}$. Jakiego typu jest $\langle a, b \rangle$, jeśli a i b są typu \mathcal{D} ? Udowodnić, że tak zdefiniowane pary spełniają warunek $\langle a, b \rangle = \langle x, y \rangle$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a = x$ i $b = y$.

^R 41. Która z następujących równości

(a) $\bigcap \{P(B) \mid B \subseteq A\} = \{ \bigcap P(B) \mid B \subseteq A \}$;

(b) $\bigcup \{P(B) \mid B \subseteq A\} = \{ \bigcup P(B) \mid B \subseteq A \}$,

zachodzi dla dowolnego zbioru A ?

^R 42. Która z następujących równości

(a) $\bigcap A \cap \bigcap B = \bigcap (A \cup B)$;

- (b) $\bigcap A \cap \bigcap B = \bigcap(A \cap B)$;
- (c) $\bigcup A \cup \bigcup B = \bigcup(A \cup B)$;
- (d) $\bigcap A \cup \bigcap B = \bigcap(A \cup B)$;
- (e) $\bigcup A \cap \bigcup B = \bigcup(A \cap B)$;
- (f) $\bigcup A \cup \bigcup B = \bigcup(A \cap B)$,

zachodzi dla dowolnych niepustych rodzin zbiorów A i B o niepustym przecięciu?

- R 43. Dla każdej z następujących równości zbadać czy ta równość zachodzi dla dowolnych niepustych rodzin A i B .
- (a) $\bigcap A \times \bigcap B = \bigcap\{\alpha \times \beta \mid \alpha \in A \wedge \beta \in B\}$;
 - (b) $\bigcup A \times \bigcup B = \bigcup\{\alpha \times \beta \mid \alpha \in A \wedge \beta \in B\}$,
- R 44.* Dla dowolnego zbioru A , przez $P_2(A)$ oznaczmy rodzinę wszystkich dwuelementowych podzbiorów zbioru A . Niech $\{X, Y\}$ będzie podziałem zbioru $P_2(\mathbb{N})$. Pokazać, że istnieje taki nieskończony zbiór A , że $P_2(A) \subseteq X$ lub $P_2(A) \subseteq Y$.

Relacje

45. Udowodnić, że jeśli $r \subseteq r'$ i $s \subseteq s'$ to $r \cdot s \subseteq r' \cdot s'$.
46. Dla jakich relacji $r \subseteq A \times A$ zachodzą równości $r \cdot r^{-1} = r^{-1} \cdot r = \mathbf{1}_A$?
47. Znaleźć przykład 5-elementowej relacji symetrycznej w zbiorze \mathbb{N} . Czy istnieje 5-elementowa relacja zwrotna w \mathbb{N} ? A 5-elementowa relacja przechodnia?
48. Czy relacja $\{\langle 0, 3 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 1, 5 \rangle, \langle 4, 5 \rangle, \langle 4, 2 \rangle\}$ w zbiorze $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ jest przechodnia?
49. Niech r będzie relacją dwuargumentową w zbiorze A . Czy możliwe jest, że:
- (a) $r^{-1} \subsetneq r$?
 - (b) $r \cdot r = r$ i r jest przeciwzwrotna (tj. $\forall x \in A (\neg x r x)$)?
 - (c) $r^{-1} = A^2 - r$?
50. Udowodnić, że relacja r jest przechodnia wtedy i tylko wtedy, gdy $r \cdot r \subseteq r$.
51. Udowodnić, że jeśli relacja r w zbiorze A jest przechodnia, to $r \cdot (r \cup \mathbf{1}_A) \subseteq r$.
52. Udowodnić, że iloczyn dowolnej rodziny relacji przechodnich jest relacją przechodnią.
53. Niech \mathcal{R} będzie taką niepustą rodziną relacji przechodnich w zbiorze A , że dla dowolnych $r, s \in \mathcal{R}$ zachodzi $r \subseteq s$ lub $s \subseteq r$. Udowodnić, że $s = \bigcup \mathcal{R}$ jest relacją przechodnią.
54. Udowodnić, że dla dowolnej relacji $r \subseteq A \times A$ istnieje najmniejsza relacja przechodnia zawierająca r .
- R 55. Udowodnić, że dla dowolnej relacji r w zbiorze A zachodzą równości:
- (a) $r^+ = r \cdot r^* = r^* \cdot r$;
 - (b) $r^* = r^+ \cup \mathbf{1}_A$,
- gdzie r^+ i r^* to odpowiednio domknięcie przechodnie i przechodnio-zwrotne relacji r .
- R 56. *Przestrzenią zgodności* nazywamy rodzinę zbiorów \mathcal{A} , spełniającą warunki:
- (a) Jeśli $a \in \mathcal{A}$ i $a' \subseteq a$ to $a' \in \mathcal{A}$.
 - (b) Jeśli $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ oraz dla dowolnych $a, b \in \mathcal{B}$ zachodzi $a \cup b \in \mathcal{A}$ to $\bigcup \mathcal{B} \in \mathcal{A}$.

Niech \mathcal{A} będzie przestrzenią zgodności. Udowodnić, że istnieje taka zwrotna i symetryczna relacja r , że dla dowolnego a zachodzi równoważność:

$$a \in \mathcal{A} \quad \text{wtedy i tylko wtedy, gdy} \quad \forall xy (x, y \in a \rightarrow xry).$$

- R 57. Relacja $r \subseteq A \times A$ jest *przeciwwrotna* gdy dla żadnego a nie zachodzi $\langle a, a \rangle \in r$.
- Czy złożenie relacji przeciwwrotnych jest relacją przeciwwrotną?
 - Czy iloczyn dowolnej niepustej rodziny relacji przeciwwrotnych jest relacją przeciwwrotną?
 - Czy suma dowolnej rodziny relacji przeciwwrotnych jest relacją przeciwwrotną?
- R 58. Relację $r \subseteq A \times A$ nazwiemy *krzaczastą* gdy
- $$\forall abc (arb \wedge arc \rightarrow \neg brc \wedge \neg crb)$$
- Czy złożenie relacji krzaczastych jest relacją krzaczastą?
 - Czy iloczyn dowolnej niepustej rodziny relacji krzaczastych jest relacją krzaczastą?
 - Czy suma dowolnej rodziny relacji krzaczastych jest relacją krzaczastą?
 - Niech r_i krzaczaste dla $i \in \mathbb{N}$ i niech $\forall ij (i \leq j \rightarrow r_i \subseteq r_j)$. Czy $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} r_i$ jest relacją krzaczastą?

Funkcje

59. Udowodnić, że:

- jeśli $f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow C$ i $h : C \rightarrow D$, to $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$;
- jeśli $f : A \xrightarrow[\text{na}]{1-1} B$, to $f^{-1} \circ f = \text{id}_A$ oraz $f \circ f^{-1} = \text{id}_B$;
- jeśli $f : A \rightarrow B$, to $f \circ \text{id}_A = f = \text{id}_B \circ f$.

60. Udowodnić, że:

- jeśli $f : A \xrightarrow{1-1} B$ oraz $g : B \xrightarrow{1-1} C$ to $g \circ f : A \xrightarrow{1-1} C$;
- jeśli $f : A \xrightarrow{\text{na}} B$ oraz $g : B \xrightarrow{\text{na}} C$ to $g \circ f : A \xrightarrow{\text{na}} C$.

61. Znaleźć obraz prostej o równaniu $3x - 2y = 1$ i przeciwobraz okręgu o równaniu $x^2 + y^2 = 1$ przy przekształceniu $f(x, y) = \langle 2x + y, x - y \rangle$.

62. Znaleźć obraz kwadratu $[0, 1) \times (0, 1]$ i przeciwobraz odcinka $[1, 2]$ przy przekształceniu $f(x, y) = \frac{x+2}{2}$.

63. Niech $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \dashrightarrow \mathbb{R}$ będzie taka, że $f(x, y) = \frac{x}{y}$. Znaleźć przeciwobrazy $f^{-1}(\{1\})$ i $f^{-1}([1, 2])$ oraz obraz kwadratu $(1, 2) \times (3, 4)$.

64. Funkcja $f : \mathcal{P}(A) \rightarrow \mathcal{P}(A)$ jest *addytywna*, gdy $f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y)$, dla dowolnych zbiorów $X, Y \subseteq A$. Czy każda funkcja addytywna ma własność $f(X) = \bigcup_{x \in X} f(\{x\})$?

65. Niech $f : A \rightarrow B$ i $g : B \rightarrow A$. Udowodnić, że jeśli $f \circ g = \text{id}_A$ oraz $g \circ f = \text{id}_B$, to funkcje f i g są wzajemnie odwrotne.

66. Niech $f, g : A \rightarrow A$. Czy z tego, że dla dowolnego $x \in A$ zachodzi $f(g(x)) = g(f(x))$ wynika, że f i g są wzajemnie odwrotne?

67. Udowodnić, że $\langle \pi_1(a), \pi_2(a) \rangle = a$, dla dowolnego $a : \mathcal{D} \times \mathcal{E}$.

68. Niech $f : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$ będzie taka, że $f(\langle C, D \rangle) = C \cap D$, dla dowolnych $C, D \subseteq \mathbb{N}$, i niech $B \subseteq \mathbb{N}$. Czy f jest różnowartościowa i czy jest na $\mathcal{P}(\mathbb{N})$? Znaleźć obraz zbioru $\mathcal{P}(B) \times \mathcal{P}(B)$ i przeciwobraz zbioru $\{\mathbb{N}\}$, przy przekształceniu f .

- R 69. Niech $\alpha : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \xrightarrow[\text{na}]{1-1} \mathbb{N}$ i niech $g : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow (\mathbb{N} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ będzie taką funkcją, że $g(A)(n) = \{i \in \mathbb{N} \mid \alpha(n, i) \in A\}$. Udowodnić, że funkcja g jest bijekcją.
- R 70. Przypuśćmy, że $(\mathbb{N} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})) = \bigcup \{\mathcal{F}_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Udowodnić, że istnieje taka liczba n , że $\{f(n) \mid f \in \mathcal{F}_n\} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$.
- R 71. Podaj przykład pary funkcji $f, g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ spełniającej wszystkie poniższe warunki:
- $\forall x g(x) \neq x$;
 - $g \circ g$ jest identycznością na \mathbb{N} ;
 - $f \circ g = f$;
 - f jest funkcją na \mathbb{N} ;
 - obrazem zbioru liczb naturalnych parzystych w odwzorowaniu g jest zbiór liczb naturalnych nieparzystych.
- R 72. Niech $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją zadaną wzorem $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.
- Jaki jest obraz zbioru $A = [2, 4] \times [-1, 3]$ przy przekształceniu f ?
 - Ile elementów ma zbiór $(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \cap f^{-1}((-3, 3) \cup \{5\})$?
- R 73. Mamy taką funkcję $f : \mathcal{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$:⁷
- $$f(r) = \{k \mid \exists x \exists y (\langle x, y \rangle \in r^{k+1} \wedge \forall w \langle w, x \rangle \notin r \wedge \forall z \langle y, z \rangle \notin r)\}.$$
- Czy f jest różnowartościowa?
 - Czy f jest „na”?
 - Czy istnieje relacja nieprzechodnia r , dla której $f(r) = \{0\}$?
- R 74. Niech $c : \mathcal{P}(A) \rightarrow A$ będzie taką funkcją, że dla dowolnego niepustego zbioru $D \subseteq A$ zachodzi $c(D) \in D$ i niech $f, g : A \xrightarrow{\text{na}} B$. Pokazać, że istnieje taka funkcja $h : A \rightarrow A$, że $f \circ h = g$.
75. Niech $\varphi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ będzie taka, że $\varphi(\langle n, k \rangle) = nk$, dla dowolnych $n, k \in \mathbb{N}$. Zbadać, czy φ jest różnowartościowa i czy jest na \mathbb{N} . Znaleźć $\varphi(\mathcal{P} \times (\mathbb{N} - \mathcal{P}))$, $\varphi^{-1}(\{10\})$, $\varphi^{-1}(\mathbb{N} - \mathcal{P})$, $\varphi^{-1}(\{2^n : n \in \mathbb{N} - \{0\}\})$, gdzie \mathcal{P} oznacza zbiór liczb parzystych.
76. Niech $F : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$ będzie taka, że $F(f) = f^{-1}(\{1\})$. Czy F jest różnowartościowa i czy jest na $\mathcal{P}(\mathbb{N})$? Znaleźć obraz zbioru funkcji stałych i przeciwobraz zbioru $\{\{10\}\}$.
77. Niech $f : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$ będzie taka, że $f(\varphi) = \varphi(\mathbb{N})$. Czy f jest różnowartościowa i czy jest na $\mathcal{P}(\mathbb{N})$? Znaleźć $f^{-1}(\mathcal{B})$, gdzie \mathcal{B} oznacza zbiór jednoelementowych podzbiorów \mathbb{N} .
78. Udowodnić, że $\bigcap_{i \in I} \bigcup_{j \in J} A_{i,j} = \bigcup_{f: I \rightarrow J} \bigcap_{i \in I} A_{i,f(i)}$.
79. Pokazać, że funkcja $\varphi : \mathcal{P}(A)^B \rightarrow \mathcal{P}(A \times B)$ taka, że dla dowolnego $f \in \mathcal{P}(A)^B$,

$$\varphi(f) = \{\langle a, b \rangle \in A \times B : a \in f(b)\},$$
 jest różnowartościowa i na $\mathcal{P}(A \times B)$.
80. Pokazać, że funkcja $\varphi : \mathcal{P}(A \times B) \rightarrow \mathcal{P}(A)^B$ taka, że dla dowolnych $\Delta \in \mathcal{P}(A \times B)$, $b \in B$,

$$\varphi(\Delta)(b) = \{a \in A : \langle a, b \rangle \in \Delta\},$$
 jest różnowartościowa i na $\mathcal{P}(A)^B$.
81. Niech $f : A \rightarrow B$ i niech $Z \subseteq A$, $T \subseteq B$. Pokazać, że $Z \subseteq f^{-1}(T)$ wtedy i tylko wtedy gdy $f(Z) \subseteq T$.

⁷Przez r^k oznaczamy k -krotne złożenie relacji r ze sobą: $r^0 = \mathbf{1}$, oraz $r^{k+1} = r^k \cdot r$.

82. Niech $A \neq \emptyset$ i niech $f : A \rightarrow A$. Udowodnić, że dla dowolnego $x \in A$ istnieje najmniejszy zbiór $Z \subseteq A$ taki, że $x \in Z$ oraz $f^{-1}(Z) \subseteq Z$.
83. Ile elementów mają zbiory: $\emptyset^\emptyset, \emptyset^A, A^\emptyset$, jeżeli $A \neq \emptyset$?
84. Podaj przykład funkcji f i takich zbiorów A, B, C, D , że

$$f^{-1}(f(A)) \neq A, \quad f(f^{-1}(B)) \neq B, \quad f(C \cap D) \neq f(C) \cap f(D).$$
85. Które z poniższych zdań są prawdziwe, a które fałszywe?
 (a) $\forall f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \exists B \subseteq \mathbb{N} (f^{-1}(B) \neq \emptyset \wedge B \neq \mathbb{N})$
 (b) $\exists B \subseteq \mathbb{N} \forall f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} (f^{-1}(B) \neq \emptyset \wedge B \neq \mathbb{N})$
 (c) $\exists f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \forall B \subseteq \mathbb{N} (f^{-1}(B) \neq \emptyset \rightarrow B = \mathbb{N})$
 (d) $\forall B \subseteq \mathbb{N} \exists f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} (f^{-1}(B) \neq \emptyset \rightarrow B = \mathbb{N})$
86. Udowodnić, że rodzina $\{A_t \mid t \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R})$ spełnia warunki

$$\bigcap_{t \in \mathbb{R}} A_t = \emptyset, \quad \bigcup_{t \in \mathbb{R}} A_t = \mathbb{R}, \quad \forall t \in \mathbb{R} (A_t = \bigcup_{s < t} A_s)$$
 wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taka funkcja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, że $A_t = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) < t\}$ dla wszystkich $t \in \mathbb{R}$.
87. Które z poniższych stwierdzeń są równoważne dla każdej funkcji f :
 (a) f jest różnowartościowa;
 (b) dla każdego $x \in \text{Dom}(f)$, zbiór $f(\{x\})$ jest jednoelementowy;
 (c) dla każdego $x \in \text{Rg}(f)$, zbiór $f^{-1}(\{x\})$ jest jednoelementowy?
88. Znaleźć takie $f, g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, że dla dowolnego $x \in \mathbb{N}$, przeciwobraz $f^{-1}(\{x\})$ jest dwuelementowy, a przeciwobraz $g^{-1}(\{x\})$ jest nieskończony.
89. Znaleźć takie $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, że dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$, przeciwobraz $f^{-1}(\{x\})$ jest dwuelementowy, a przeciwobraz $g^{-1}(\{x\})$ jest nieskończony.
90. Niech $f : T \rightarrow T$ będzie bijekcją. Czy zawsze zachodzą równości

$$\bigcup_{t \in T} A_t = \bigcup_{t \in T} A_{f(t)} \quad \text{i} \quad \prod_{t \in T} A_t = \prod_{t \in T} A_{f(t)}?$$
91. *Krakowskim produktem* rodziny zbiorów $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{D})$ nazywamy zbiór

$$\mathbf{KR} = \{f : \mathcal{R} \rightarrow \bigcup \mathcal{R} \mid \forall A (A \in \mathcal{R} \rightarrow f(A) \in A)\}.$$
 Jeśli $\mathcal{R} = \{A, B\}$ to zamiast \mathbf{KR} piszemy $A \otimes B$. Przypuśćmy, że zbiór A ma n elementów. Ile elementów mają zbiory $A \otimes A, A \otimes (A \otimes A), (A \otimes A) \otimes (A \otimes A), A \otimes (A \otimes (A \otimes A))$?
92. Pokazać, że jeśli $f : \mathcal{D} \xrightarrow{1-1} \mathcal{E}$ oraz $A \subseteq \mathcal{E}$ to przeciwobraz A przy przekształceniu f jest tym samym, co obraz A przy przekształceniu f^{-1} .
93. Skonstruować:
 • bijekcję $f : \mathcal{D} \times (\mathcal{E} \oplus \mathcal{H}) \xrightarrow[na]{1-1} (\mathcal{D} \times \mathcal{E}) \oplus (\mathcal{D} \times \mathcal{H})$;
 • włożenie $g : \mathcal{D} \oplus (\mathcal{E} \times \mathcal{H}) \xrightarrow{1-1} (\mathcal{D} \oplus \mathcal{E}) \times (\mathcal{D} \oplus \mathcal{H})$.
94. Niech $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}$ i $g : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{D}$ będą takie, że $g \circ f = \text{id}_{\mathcal{D}}$. Pokazać, że f jest różnowartościowa, a g jest na \mathcal{D} . Co można powiedzieć o funkcjach f i g jeśli $g \circ f = \text{id}_{\mathcal{D}}$ oraz $f \circ g = \text{id}_{\mathcal{E}}$?
95. Niech $\alpha : C \rightarrow A$ i $\beta : C \rightarrow B$. Pokazać, że istnieje dokładnie jedna taka funkcja $\gamma : C \rightarrow A \times B$, że $\pi_1 \circ \gamma = \alpha$ i $\pi_2 \circ \gamma = \beta$. Sformułować analogiczną własność produktu uogólnionego.

96. Jakiego typu jest produkt $\prod_{t:T} A_t$, jeśli $A_t : P(\mathcal{D})$ dla $t : T$?
97. Niech $\alpha : A \rightarrow C$ i $\beta : B \rightarrow C$. Pokazać, że istnieje dokładnie jedna taka funkcja $\gamma : A \oplus B \rightarrow C$, że $\gamma \circ \text{in}_1 = \alpha$ i $\gamma \circ \text{in}_2 = \beta$.
98. Niech $f : T \rightarrow T$. Udowodnić, że $f \circ f = f$ wtedy i tylko wtedy gdy $f|_{\text{Rg}(f)} = \text{id}_{\text{Rg}(f)}$.
99. Niech $f : T \rightarrow T$ i niech $g = f|_{\text{Rg}(f)}$. Udowodnić, że $f^3 = f$ wtedy i tylko wtedy, gdy $g^2 = \text{id}_{\text{Rg}(f)}$.
100. Niech $n \geq 1$. Udowodnić, że funkcja $f : A \rightarrow A$ jest różnowartościowa wtedy i tylko wtedy, gdy f^n jest różnowartościowa.
101. Niech A będzie zbiorem skończonym i niech $f : A \rightarrow A$. Pokazać, że $f^n \circ f^n = f^n$, dla pewnego n .
102. Niech $f : A \rightarrow A$ i niech $f^n = f$ dla pewnego $n > 1$. Udowodnić, że $f(\text{Rg}(f)) = \text{Rg}(f)$.
103. Niech $f : T \rightarrow T$ i niech $f^k = f$ dla pewnego $k \geq 2$. Pokazać, że $\text{Rg}(f^m) = \text{Rg}(f)$ dla wszystkich $m \geq 2$.
104. Niech $f : A \rightarrow B$. Udowodnić, że f jest różnowartościowa wtedy i tylko wtedy gdy dla dowolnego C i dowolnych $g, h : C \rightarrow A$ zachodzi implikacja $f \circ g = f \circ h \rightarrow g = h$.
105. Niech $f : A \rightarrow B$. Udowodnić, że f jest na B wtedy i tylko wtedy gdy dla dowolnego C i dowolnych $g, h : B \rightarrow C$ zachodzi implikacja $g \circ f = h \circ f \rightarrow g = h$.
106. Niech $\Phi : \mathbb{C}_\infty([0, 1]) \rightarrow \mathbb{C}_\infty([0, 1])$ będzie taka, że $\Phi(f) = f'$. Czy Φ jest różnowartościowa i na $\mathbb{C}_\infty([0, 1])$? Znaleźć przeciwobraz zbioru wielomianów.
107. Niech r będzie jądrem funkcji f . Pokazać, że r jest antysymetryczna wtedy i tylko wtedy, gdy f jest różnowartościowa, i że r jest spójna wtedy i tylko wtedy gdy f jest funkcją stałą.
108. Udowodnić, że każda (częściowa) relacja równoważności jest jądrem pewnego (częściowego) przekształcenia.
109. Niech $P'(\mathbb{N}) = P(\mathbb{N}) - \{\emptyset\}$ i niech $f : P'(\mathbb{N}) \times P'(\mathbb{N}) \rightarrow P(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$ będzie taka, że $f(\langle C, D \rangle) = C \times D$, dla dowolnych $C, D \subseteq \mathbb{N}$. Czy f jest różnowartościowa i czy jest na $P(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$? Znaleźć $f^{-1}(P(P \times P))$, gdzie P oznacza zbiór wszystkich liczb parzystych.
110. Niech $f : P(\mathbb{R}) \rightarrow P(P(\mathbb{R}))$ będzie taka, że $f(A) = P(A)$, dla $A \subseteq \mathbb{R}$. Czy f jest różnowartościowa i czy jest „na”? Znaleźć $f^{-1}(P(P(\mathbb{Q})))$ oraz $f(P(\mathbb{Q}))$.
111. Niech $I_\alpha = (\alpha, 4 + \alpha)$, dla $\alpha \in \mathbb{R}$ i niech $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, będzie określona przez równanie $f(x) = \frac{1}{2}x$. Jakimi przedziałami są zbiory:

$$\bigcup_{\alpha \in (0, 2)} f(I_\alpha) \quad \text{oraz} \quad \bigcap_{\alpha \in (0, 1)} f^{-1}(I_{f(\alpha)})?$$
112. Niech $f : A \rightarrow B$ i niech $F : P(B) \rightarrow P(A)$ będzie określone tak: $F(X) = f^{-1}(X)$. Pokazać, że funkcja f jest różnowartościowa (na) wtedy i tylko wtedy gdy F jest na (różnowartościowa).
113. Niech $\varphi : B \rightarrow C$ i niech $\Phi : A^C \rightarrow A^B$ będzie taka, że $\Phi(f) = f \circ \varphi$ dla wszystkich f . Zakładając, że A ma co najmniej dwa elementy, pokazać, że
 (a) Φ jest różnowartościowa wtedy i tylko wtedy, gdy φ jest „na”;
 (b) Φ jest „na” wtedy i tylko wtedy, gdy φ jest różnowartościowa.
114. Dla $a \in \mathbb{N}$ określamy $a^* : (\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}) \rightarrow \mathbb{N}$ wzorem $a^* = \lambda f. f(a)$. Czy funkcja $\lambda a. a^*$ jest różnowartościowa i czy jest na $(\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}) \rightarrow \mathbb{N}$?

^R115. Funkcja $F : (\mathbb{N} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$ jest określona warunkiem $F(x) = \bigcup \{x(i) \mid i \in \mathbb{N}\}$.

- (a) Czy F jest funkcją różnowartościową?
- (b) Czy F jest na $\mathcal{P}(\mathbb{N})$?
- (c) Czy istnieje taki zbiór $A \subseteq \mathbb{N}$, że $F^{-1}(\{A\})$ jest zbiorem jednoelementowym?
- (d) Czy istnieje taki zbiór $A \subseteq \mathbb{N}$, że $F^{-1}(\{A\})$ jest zbiorem czteroelementowym?

^R116. Zbiór $T \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathbb{N}$ jest *dobry*, wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych a, b, x :

z tego, że $\langle a, x \rangle \in T$ i $\langle b, x \rangle \in T$ oraz $a \subseteq b$ wynika $a = b$.

Funkcja $\Phi : \{T \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathbb{N} \mid T \text{ jest dobry}\} \rightarrow (\mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ jest określona tak:

$$\Phi(T)(a) = \{x \in \mathbb{N} \mid \exists b (b \subseteq a \wedge \langle b, x \rangle \in T)\}.$$

- (a) Czy Φ jest na $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$?
- (b) Czy istnieje takie T , że
 - i. $\Phi(T) = \text{id}_{\mathcal{P}(\mathbb{N})}$?
 - ii. $\Phi(T)$ jest funkcją stałą?
- (c) Czy Φ jest funkcją różnowartościową?

^R117. Podać przykład takiej funkcji $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ i zbioru $X \subseteq \mathbb{N}$, aby funkcja $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$, określona wzorem

$$g(i) = f^{-i}(X),$$

gdzie $f^{-i}(X)$ oznacza przeciwobraz X przy przekształceniu f^i , była różnowartościowa.

118. Niech $\varphi : (\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})^{\mathcal{P}(\mathbb{N})}$ będzie określona w następujący sposób:

$$\varphi(f)(A) = f^{-1}(A).$$

- (a) Czy funkcja φ jest różnowartościowa?
- (b) Czy funkcja φ jest na?
- (c) Znaleźć $\varphi^{-1}(\{\text{id}_{\mathcal{P}(\mathbb{N})}\})$.
- (d) Czy istnieje funkcja $f \in \text{Rg}\varphi$, która jest różnowartościowa? Czy każda funkcja $f \in \text{Rg}\varphi$ jest różnowartościowa?

^R119. Niech $\phi : (\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R})$ będzie określona następująco: $\phi(f) = f^{-1}(\mathbb{I}\mathbb{Q})$, gdzie $\mathbb{I}\mathbb{Q} = \mathbb{R} - \mathbb{Q}$. Z badać, czy funkcja ϕ jest różnowartościowa i czy jest na $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

^R120. Niech $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$ będzie zdefiniowana następująco:

$$\varphi(n) = \{\langle x, n \rangle \mid x \leq n\} \cup \{\langle n, y \rangle \mid n \leq y\}.$$

- (a) Znaleźć przeciwobraz $\varphi^{-1}(\mathcal{T})$, gdzie \mathcal{T} to rodzina wszystkich relacji przechodnich.
- (b) Czy $\bigcup \varphi(\mathbb{N})$ jest relacją przechodnią w \mathbb{N} ?

^R121. Niech $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$ będzie zdefiniowana następująco:

$$\varphi(n) = \{\langle n, x \rangle \mid n \leq x \leq 2n\} \cup \{\langle y, 2n \rangle \mid n \leq y \leq 2n\}.$$

- (a) Znaleźć $\varphi^{-1}(\mathcal{T})$, gdzie \mathcal{T} to rodzina wszystkich relacji przechodnich.
- (b) Czy $\bigcup \varphi(\mathbb{N})$ jest relacją przechodnią w \mathbb{N} ?

^R122. Niech $\varphi : (\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$ będzie funkcją określoną wzorem $\varphi(f) = f(\mathcal{P})$, gdzie \mathcal{P} to zbiór wszystkich liczb pierwszych.

- (a) Czy φ jest na $\mathcal{P}(\mathbb{N})$?
- (b) Czy φ jest różnowartościowa?
- (c) Dla dowolnych $A, B \subseteq \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ określamy zbiór $A \bullet B = \{f \circ g \mid f \in A \wedge g \in B\}$. Niech $C = \varphi^{-1}(\mathcal{P}(\mathcal{P}))$. Udowodnić, że $C \bullet C = C$.

Relacje równoważności

123. Czy istnieje taka relacja równoważności r w zbiorze \mathbb{N} , która ma 22 klasy abstrakcji, a każda klasa abstrakcji ma 37 elementów?
124. Czy istnieje taka relacja równoważności r w zbiorze \mathbb{N} , która ma 2 klasy abstrakcji po 17 elementów, 5 klas po 33 elementy i jedną klasę nieskończoną?
125. Czy istnieje taka relacja równoważności r w zbiorze \mathbb{N} , która ma nieskończenie wiele nieskończonych klas abstrakcji?
126. Które z poniższych rodzin podzbiorów płaszczyzny są zbiorami klas abstrakcji pewnych relacji równoważności w $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$?
- rodzina wszystkich parabol o równaniach $y = x^2 + c$, dla $c \in \mathbb{R}$?
 - rodzina wszystkich prostych o równaniach $y = cx$, dla $c \in \mathbb{R}$?
 - rodzina wszystkich hiperbol o równaniach $y = cx^{-1}$, dla $c \neq 0$?
127. Niech A będzie niepustym zbiorem i niech $f : A \rightarrow A$.
- Udowodnić, że jeśli f jest różnowartościowa to relacja $r \subseteq A \times A$, dana warunkiem

$$xry \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}(f^n(x) = y \vee f^n(y) = x)$$
 jest relacją równoważności.
 - Czy prawdziwe jest twierdzenie odwrotne, tj. czy jeśli r jest relacją równoważności to f musi być różnowartościowa?
 - Podać przykład takich A i f , że r ma nieskończenie wiele skończonych klas abstrakcji, każdą o innej liczbie elementów. (Można zrobić rysunek.)
128. Rozpatrzmy następującą relację w $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$:
- $$\langle m, n \rangle \sim \langle m', n' \rangle \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } m + n' = m' + n.$$
- Nie korzystając z pojęcia liczby całkowitej, udowodnić, że jest to relacja równoważności. Następnie udowodnić, że jeśli $\langle m, n \rangle \sim \langle m', n' \rangle$ i $\langle m_1, n_1 \rangle \sim \langle m'_1, n'_1 \rangle$, to:
- $\langle m + m_1, n + n_1 \rangle \sim \langle m' + m'_1, n' + n'_1 \rangle$;
 - $\langle mm_1 + nn_1, mn_1 + nm_1 \rangle \sim \langle m'm'_1 + n'n'_1, m'n'_1 + n'm'_1 \rangle$;
 - $\langle n, m \rangle \sim \langle n', m' \rangle$.
129. Niech $\mathbb{Z}[x]$ oznacza zbiór wszystkich wielomianów zmiennej x o współczynnikach całkowitych i niech r będzie taką relacją w zbiorze $\mathbb{Z}[x]$, że $\langle f, g \rangle \in r$ zachodzi wtedy i tylko wtedy gdy różnica $f - g$ ma wszystkie współczynniki parzyste. Pokazać, że r jest relacją równoważności. Wskazać trzy różne klasy abstrakcji.
130. Niech s będzie taką relacją w zbiorze $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$, że $\langle f, g \rangle \in s$ zachodzi wtedy i tylko wtedy gdy różnica $f - g$ jest zbieżna do zera. Pokazać, że s jest relacją równoważności. Wskazać trzy różne klasy abstrakcji.
131. Niech s będzie taką relacją w zbiorze $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$, że $\langle f, g \rangle \in s$ zachodzi wtedy i tylko wtedy gdy $\exists n \forall m(m > n \rightarrow f(m) = g(m))$. Pokazać, że s jest relacją równoważności. Wskazać trzy różne klasy abstrakcji.
132. Niech $r \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ będzie relacją równoważności w zbiorze \mathbb{N} , i niech $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$ będzie taka, że $f(\langle x, y \rangle) = [x]_r \cup [y]_r$, dla dowolnych $x, y \in \mathbb{N}$. Czy funkcja f jest różnowartościowa? Czy jest na $\mathcal{P}(\mathbb{N})$? Znaleźć $f^{-1}(\{[3]_r\})$ oraz $f(r)$.

133. Niech $r \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ będzie relacją równoważności w zbiorze \mathbb{N} , i niech $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$ będzie taka, że $f(\langle x, y \rangle) = [x]_r \cap [y]_r$, dla dowolnych $x, y \in \mathbb{N}$. Czy funkcja f jest różnowartościowa? Czy jest na $\mathcal{P}(\mathbb{N})$? Znaleźć $f^{-1}(\{[3]_r\})$ oraz $f(\mathbb{N} \times \mathbb{N} - r)$.
134. Niech \mathcal{R} będzie niepustą rodziną relacji równoważności w zbiorze A taką, że dla dowolnych $r, s \in \mathcal{R}$ zachodzi $r \subseteq s$ lub $s \subseteq r$. Udowodnić, że $s = \bigcup \mathcal{R}$ jest relacją równoważności, oraz że $[a]_s = \bigcup_{r \in \mathcal{R}} [a]_r$, dla dowolnego $a \in A$.
135. Niech r_1, r_2 będą takimi relacjami równoważności w zbiorze A , że $r_1 \cap r_2 = id_A$ oraz $r_1 \cdot r_2 = A \times A$. Znaleźć bijekcję z $A/r_1 \times A/r_2$ do A .
136. Niech r_1, r_2 będą relacjami równoważności w zbiorze A . Czy z tego, że $A/r_1 = A/r_2$ wynika, że $r_1 = r_2$? Pokazać, że zbiór $\{u \subseteq A : \exists a \in A (u = [a]_{r_1} \cap [a]_{r_2})\}$ jest zbiorem klas abstrakcji pewnej relacji równoważności w zbiorze A . Co to za relacja?
137. Niech R i S będą relacjami równoważności w zbiorze \mathbb{N} wszystkich liczb naturalnych i niech funkcja $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$ będzie taka, że $f(x) = [x]_R \cap [x]_S$, dla dowolnego $x \in \mathbb{N}$. Udowodnić, że f jest różnowartościowa wtedy i tylko wtedy gdy $R \cap S$ jest relacją identycznościową.
138. Czy iloczyn dwóch relacji równoważności musi (może) być pusty?
139. Niech rodzina $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$ spełnia warunki (taką rodzinę nazywamy *filtrem*):
- $\mathcal{F} \neq \emptyset$ oraz $\mathcal{F} \neq \mathcal{P}(\mathbb{N})$;
 - dla każdych $X, Y \in \mathcal{F}$ zachodzi $X \cap Y \in \mathcal{F}$;
 - dla każdego $X \in \mathcal{F}$ i każdego $Y \supseteq X$ zachodzi $Y \in \mathcal{F}$.
- Udowodnić, że relacja $r \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N})$ taka, że
- $$a r b \equiv \exists f \in \mathcal{F} (a \cap f = b \cap f)$$
- jest relacją równoważności. Znaleźć klasę abstrakcji $[\mathbb{N}]_r$.
140. Niech $f : A \rightarrow B$, gdzie A, B są niepustymi zbiorami i niech r będzie relacją równoważności w zbiorze B . Określamy relację równoważności s w zbiorze A warunkiem:
- $$a s b \quad \text{wtedy i tylko wtedy gdy} \quad f(a) r f(b)$$
- Czy zawsze zachodzą inkluzje:
- $f([a]_s) \subseteq [f(a)]_r$;
 - $[f(a)]_r \subseteq f([a]_s)$?
141. Niech $f : A \rightarrow B$ i niech r będzie relacją równoważności w zbiorze A . Określamy relację s w zbiorze B warunkiem:
- $$a s b \quad \text{wtedy i tylko wtedy gdy} \quad \exists x, y \in A (f(x) = a \wedge f(y) = b \wedge \langle x, y \rangle \in r).$$
- Jaka musi być funkcja f , aby s była relacją równoważności w B ?
142. Niech $f : A \rightarrow A$. Czy relacja $r = \{\langle a, b \rangle \in A \times A \mid \exists m, n \in \mathbb{N} (f^m(a) = f^n(b))\}$ jest relacją równoważności w A ?
143. Niech \mathcal{R} będzie zbiorem wszystkich relacji równoważności w \mathbb{N} i niech $f : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$ będzie taka, że $f(r) = [1]_r$, dla dowolnego $r \in \mathcal{R}$. Znaleźć $\bigcup_{r \in \mathcal{R}} f(r)$ i $\bigcap_{r \in \mathcal{R}} f(r)$.
144. Niech \mathcal{R} będzie jak w zadaniu 143 i niech $f : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))$ będzie taka, że $f(r) = \mathbb{N}/r$, dla dowolnego $r \in \mathcal{R}$. Znaleźć $\bigcup_{r \in \mathcal{R}} f(r)$ i $\bigcap_{r \in \mathcal{R}} f(r)$. Czy f jest różnowartościowa, czy jest „na”? Znaleźć $f(\mathcal{R})$ oraz $f^{-1}(\{Z \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N}) : \overline{Z} = 1\})$ i $f^{-1}(\{\{Z \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) : \overline{Z} = 1\}\})$.

145. Niech \mathcal{R} będzie jak w zadaniu 143 i niech $f : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$ będzie taka, że $f(r) = [0]_r \cap [1]_r$. Zbadać, czy f jest różnowartościowa, znaleźć $f(\mathcal{R})$ i przeciwobraz zbioru $\mathcal{P}(\mathbb{N}) - \{\emptyset\}$.
- ^R146. Niech $Z \subseteq N$. Określamy relację $R_Z \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N})$ następująco:
- $$\langle X, Y \rangle \in R_Z \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } X \cup Z = Y \cup Z.$$
- Niech \mathcal{R} będzie zbiorem wszystkich relacji równoważności w $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. Funkcja $f : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow \mathcal{R}$ jest określona warunkiem $f(Z) = R_Z$.
- Czy funkcja f jest różnowartościowa?
 - Czy funkcja f jest na \mathcal{R} ?
 - Znajdź $f^{-1}(\{\text{id}_{\mathcal{P}(\mathbb{N})}\})$ i $f^{-1}(\{\mathcal{P}(\mathbb{N})^2\})$.
147. Niech $r \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N})$ będzie taką relacją równoważności, że $X r Y$ wtedy i tylko wtedy gdy istnieje skończony zbiór Z o własności $X \cup Z = Y \cup Z$. Sprawdzić, że r jest relacją równoważności. Znaleźć $[\emptyset]_r$.
148. Niech r i s będą takimi relacjami równoważności w zbiorze A , że ich suma $r \cup s$ też jest relacją równoważności. Pokazać, że dla dowolnego $x \in A$:
- $$[x]_{r \cup s} = \bigcup \{[y]_s : y \in [x]_r\}.$$
149. Udowodnić, że jeśli r_1, r_2 są relacjami równoważności w A to
- $$(r_1 \cdot r_2) = A \times A \iff (r_2 \cdot r_1) = A \times A.$$
150. Niech r będzie relacją w zbiorze \mathbb{Q} liczb wymiernych, określoną tak: xy wtedy i tylko wtedy gdy $x = y \cdot t^2$, dla pewnej wymiernej liczby $t \neq 0$. Udowodnić, że to jest relacja równoważności, i że ma nieskończenie wiele klas abstrakcji.
- ^R151. Ustalmy $k \in \mathbb{N} - \{0\}$. Określamy relacje $r_k, r \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ w następujący sposób:
- $$\langle x, y \rangle \in r_k \quad \text{wtedy i tylko wtedy, gdy } x \text{ i } y \text{ są parzyste i } x - y \text{ jest podzielne przez } k;$$
- $$\langle x, y \rangle \in r \quad \text{wtedy i tylko wtedy, gdy } x \text{ i } y \text{ są nieparzyste oraz } x \cdot y > 0.$$
- Udowodnić, że relacja $\rho_k = r_k \cup r$ jest relacją równoważności.
 - Czy istnieje takie $x \in \mathbb{Z}$, że $[x]_{\rho_k}$ ma dokładnie k elementów?
 - Ile elementów ma zbiór ilorazowy \mathbb{Z}/ρ_k , gdy:
 - $k = 4$?
 - $k = 3$?
- ^R152. Niech $\phi : (\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R})$ będzie określona tak: $\phi(f) = \vec{f}^{-1}(\mathbb{I}\mathbb{Q})$ (por. zadanie 119).
- Czy $r = \{\langle f, g \rangle \mid \mathbb{Q} \subseteq \phi(f) \cap \phi(g)\}$ jest relacją równoważności w $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$?
 - Czy $s = \{\langle f, g \rangle \mid \phi(f) \times \phi(g) \text{ jest relacją równoważności w } \mathbb{R}\}$ jest relacją równoważności w $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$?
- ^R153. Niech $\Phi : (\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}) \rightarrow (\mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ będzie taka, że
- $$\Phi(f)(A) = f^{-1}(f(A)),$$
- dla wszystkich $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ i $A \subseteq \mathbb{N}$.
- Czy funkcja Φ jest różnowartościowa?
 - Czy funkcja Φ jest na zbiór $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$?
 - Znaleźć przeciwobraz $\Phi^{-1}(\{\text{id}_{\mathcal{P}(\mathbb{N})}\})$.
 - Udowodnić, że dla dowolnego $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ istnieje taka relacja równoważności $r \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, że dla wszystkich $A \subseteq \mathbb{N}$ zachodzi
- $$\Phi(f)(A) = \bigcup \{[a]_r \mid a \in A\}.$$

154. Załóżmy, że relacja $r \subseteq \mathcal{D} \times \mathcal{D}$ jest zwrotna. Niech

$$r^- = \{\langle x, y \rangle : \mathcal{D} \times \mathcal{D} \mid \forall z ((x r z \leftrightarrow y r z) \wedge (z r x \leftrightarrow z r y))\}.$$

Pokazać, że r^- jest relacją równoważności oraz $r^- \subseteq r$. Udowodnić, że $r = r^-$ wtedy i tylko wtedy, gdy r jest relacją równoważności.

^R155. Niech \mathcal{R} oznacza rodzinę wszystkich relacji równoważności w zbiorze \mathbb{N} liczb naturalnych i niech funkcja $F : \mathcal{R} \rightarrow (\mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N})$ będzie dana wzorem

$$F(R)(m, n) = \min\{|x - y| \mid m R x \wedge y R n\}.$$

(a) Zbadać, czy funkcja F jest różnowartościowa i czy jest na $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$.

(b) Które z następujących zbiorów są niepuste:

- i. Przeciwobraz zbioru wszystkich funkcji stałych;
- ii. Przeciwobraz zbioru wszystkich funkcji różnowartościowych;
- iii. Przeciwobraz zbioru wszystkich funkcji na \mathbb{N} ?

^R156. Niech $r \subseteq (\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}) \times (\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N})$ będzie określona w następujący sposób:

$$\langle f, g \rangle \in r \quad \text{wtedy i tylko wtedy, gdy} \quad f(\mathbb{N}) = g(\mathbb{N}).$$

(a) Udowodnić jednym (krótkim!) zdaniem, że r jest relacją równoważności.

(b) Znaleźć klasy $[\lambda x 1]_r$ i $[\text{id}_{\mathbb{N}}]_r$.

(c) Czy zbiór wszystkich funkcji różnowartościowych jest klasą abstrakcji tej relacji?

(d) Czy istnieje dwuelementowa klasa abstrakcji?

(e) Czy iloraz $(\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N})/r$ jest skończony?

^R157. Niech Parz oznacza zbiór liczb naturalnych parzystych i niech $r \subseteq (\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}) \times (\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N})$ będzie określona w następujący sposób:

$$\langle f, g \rangle \in r \quad \text{wtedy i tylko wtedy, gdy} \quad f^{-1}(\text{Parz}) = g^{-1}(\text{Parz}).$$

(a) Udowodnić jednym (krótkim!) zdaniem, że r jest relacją równoważności.

(b) Znaleźć klasy $[\lambda x 2]_r$ i $[\text{id}_{\mathbb{N}}]_r$.

(c) Czy zbiór wszystkich funkcji „na \mathbb{N} ” jest klasą abstrakcji tej relacji?

(d) Czy istnieje jednoelementowa klasa abstrakcji?

^R158. Niech $f, g : A \rightarrow A$ będą takimi funkcjami, że $f \circ g = g \circ f$. Rozpatrzmy relację $r = \{\langle x, y \rangle \in A \times A \mid \exists n, m \in \mathbb{N}. f^n(g^m(x)) = f^n(g^m(y))\}$.

(a) Udowodnić, że r jest relacją równoważności.

(b) Udowodnić, że $r = \mathbf{1}_A$ wtedy i tylko wtedy, gdy f i g są różnowartościowe.

(c) Czy w przypadku $A = \mathbb{N}$ można tak określić f i g , aby relacja r miała nieskończenie wiele nieskończonych klas abstrakcji?

^R159. Niech $r \subseteq A \times A$ będzie taką relacją, że $x, y, z [r(x, y) \wedge r(x, z) \rightarrow r(y, z)]$ i niech $s = r \cup r^{-1}$. Udowodnić, że:

(a) Suma $\mathbf{1}_A \cup (s \cdot s \cdot s)$ jest relacją równoważności.

(b) Jeśli r jest przechodnia, to $\mathbf{1}_A \cup (s \cdot s)$ jest relacją równoważności.

(c) Jeśli r jest symetryczna, to $\mathbf{1}_A \cup s$ jest relacją równoważności.

Typy indukcyjne

^R160. Udowodnić, że dla dowolnych liczb $m, k, l \in \mathbb{N}$:

(a) $m + (k + l) = (m + k) + l$;

- (b) jeśli $m + k = m$ to $k = 0$;
- (c) jeśli $k + l = 0$ to $k = 0$;
- (d) $m + 0 = m$;
- (e) $s(m) + k = m + s(k)$;
- (f) $m + k = k + m$.
161. Udowodnić, że $w \subseteq v$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy
- $w = \varepsilon$, lub
 - $w = aw'$, $v = av'$, dla pewnych w', v' , oraz $w' \subseteq v'$, lub
 - $w = bw'$, $v = bv'$, dla pewnych w', v' , oraz $w' \subseteq v'$.
162. Pokazać, że $w \subseteq v$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $w(n) = v(n)$ dla $n < |w|$.
163. Niech $w \sqsubseteq v$ oznacza, że $v = u \cdot w$, dla pewnego u (porządek sufiksowy). Udowodnić, że dla dowolnego alfabetu A , relacja \sqsubseteq jest porządkiem częściowym w A^* . Pokazać, że $w \sqsubseteq v$ wtedy i tylko wtedy, gdy albo $w = v$ albo $v = av'$, gdzie $a \in A$ oraz $w \sqsubseteq v'$.
164. Suma prosta $\mathcal{D} \oplus \mathcal{E}$ może być uważana za typ indukcyjny. Jakie są tu konstruktory i jaka zasada indukcji? A schemat definiowania przez indukcję?
165. Typ jednostkowy **Unit** ma tylko jeden element \bullet . Czy **Unit** można uważać za typ indukcyjny? Skonstruować z niego typy skończone o dowolnej liczbie elementów.
166. Zdefiniować przez indukcję operację $\lambda w. w^R$ odwracania słowa (tak aby na przykład $(baba)^R = abab$). Udowodnić przez indukcję, że $(w^R)^R = w$, dla dowolnego słowa w .
167. Zdefiniować przez indukcję następujące operacje na listach:
- (a) Dopisanie liczby n na końcu listy;
 - (b) Usunięcie ostatniego elementu listy;
 - (c) Odwracanie listy, itp.
168. Typ wartości logicznych **Bool** można utożsamiać z sumą prostą $\mathbf{Unit} \oplus \mathbf{Unit}$ a zatem za typ indukcyjny. Uogólnić tę obserwację na typy skończone o dowolnej liczbie argumentów. Sformułować dla takich typów zasadę indukcji i schemat definiowania przez indukcję.
169. *Skończone drzewa binarne* to elementy typu indukcyjnego z jednym konstruktorem dwuargumentowym \wedge i jedną stałą \circ . Sformułować dla tego typu zasadę indukcji i schemat definiowania przez indukcję. Zastosować ten schemat do definiowania takich funkcji jak „lewe poddrzewo drzewa t ”, „liczba wierzchołków drzewa t ”, „wysokość drzewa t ” itd.
170. Zdefiniować typ indukcyjny skończonych drzew binarnych etykietowanych liczbami naturalnymi, sformułować dla tego typu zasadę indukcji i schemat definiowania przez indukcję. Zdefiniować funkcję „suma etykiet drzewa t ”.

Moce zbiorów

171. Określić bijekcje pomiędzy następującymi zbiorami:
- (a) Odcinek otwarty $(0, 1)$ i cała prosta \mathbb{R} ;
 - (b) Odcinek otwarty $(0, 1)$ i odcinek domknięty $[0, 2]$;
 - (c) Zbiory \mathbb{N} i $\{0, 1\}^*$;
 - (d) Płaszczyzna \mathbb{R}^2 i sfera $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$;

- (e) Koło $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ i kwadrat $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| \leq 2\}$.
172. Czy jeśli $A \sim B$ to $A - B \sim B - A$? A czy jeśli $A - B \sim B - A$ to $A \sim B$?
- ^R173. Udowodnić, że jeśli A i B są równoliczne, to $P(A) \times P(B) \sim \{0, 1, 2, 3\}^A$.
174. Jakiej mocy jest zbiór punktów leżących na powierzchni kuli?
175. Jakiej mocy jest zbiór punktów leżących na powierzchni bocznej stożka?
176. Jakiej mocy jest podzbiór płaszczyzny ograniczony krzywymi o równaniach $y = x^2$ i $y = 1 - x^2$?
177. Niech \mathcal{P} będzie zbiorem wszystkich prostokątów na płaszczyźnie i niech r będzie relacją podobieństwa prostokątów (jest to relacja równoważności w zbiorze \mathcal{P}). Znaleźć moc zbioru ilorazowego \mathcal{P}/r . Jakiej mocy są klasy abstrakcji relacji r ?
178. Niech $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$. Udowodnić, że dla pewnego $x \in \mathbb{R}$ zbiór $f^{-1}(\{x\})$ nie zawiera żadnej kuli.
179. Udowodnić, że zbiór A jest nieskończony wtedy i tylko wtedy gdy

$$\forall f \in A^A \exists B \in P(A) ((B \neq \emptyset) \wedge (B \neq A) \wedge (f(B) \subseteq B)).$$
180. Udowodnić, że jeśli A jest dowolnym zbiorem parami rozłącznych przedziałów na prostej, to $\overline{A} \leq \aleph_0$.
181. Udowodnić, że zbiór punktów nieciągłości funkcji rosnącej z \mathbb{R} do \mathbb{R} jest co najwyżej przeliczalny.
182. Czy zbiór ekstremów właściwych funkcji ciągłej z \mathbb{R} do \mathbb{R} może być nieprzeliczalny?
- 183.* Czy zbiór zer funkcji ciągłej z \mathbb{R} do \mathbb{R} może być nieprzeliczalny, gdy funkcja nie jest stała na żadnym przedziale?
184. Znaleźć moce zbiorów ilorazowych i moce klas abstrakcji relacji równoważności rozważanych w zadaniach 130–131.
185. Czy istnieje taka funkcja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, że dla każdego $x \in \mathbb{R}$ zbiór $f^{-1}(\{x\})$ jest:
 (a) odcinkiem?
 (b) kwadratem?
186. Niech relacja równoważności $r \subseteq \mathbb{R}^2$ będzie taka, że:

$$\forall x \in \mathbb{R} \exists \varepsilon > 0 ((x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq [x]_r).$$

 Co można powiedzieć o mocy zbioru \mathbb{R}/r ?
187. Niech $A \subseteq \mathbb{R}$ będzie taki, że:

$$\forall x \in A \exists \varepsilon > 0 (A \cap (x - \varepsilon, x + \varepsilon) = \{x\}).$$

 Co można powiedzieć o mocy zbioru A ?
188. Czy istnieje taka relacja równoważności r w zbiorze \mathbb{R} , której każda klasa abstrakcji jest mocy \aleph_0 , oraz
 (a) $\overline{\mathbb{R}/r} = \mathfrak{C}$?
 (b) $\overline{\mathbb{R}/r} = \aleph_0$?
189. Czy istnieje taka relacja równoważności r w zbiorze \mathbb{R} , której każda klasa abstrakcji jest mocy continuum, oraz \mathbb{R}/r jest zbiorem (a) przeliczalnym? (b) nieprzeliczalnym?
190. Które z poniższych zdań są prawdziwe, a które fałszywe?

- (a) Jeśli $f : A \xrightarrow{1-1} B$ oraz $f(A) \neq B$ to $\overline{\overline{A}} < \overline{\overline{B}}$.
 (b) Jeśli $\overline{\overline{A}} < \overline{\overline{B}}$ i $C \neq \emptyset$ to $\overline{\overline{A \times C}} < \overline{\overline{B \times C}}$.

191. Czy produkt przeliczalnej rodziny zbiorów przeliczalnych musi być przeliczalny?
192. Znaleźć moc zbioru wszystkich czteroelementowych podziałów zbioru \mathbb{R} .
193. Udowodnić, że na płaszczyźnie istnieje okrąg, którego każdy punkt ma przynajmniej jedną współrzędną niewymierną.
194. Znaleźć moc zbioru wszystkich ciągów liczb wymiernych, które są zbieżne do zera.
- ^R195. Znaleźć moc zbioru wszystkich funkcji ciągłych z \mathbb{R} do \mathbb{R} .
196. Znaleźć moc zbioru wszystkich otwartych podzbiorów prostej.
197. Obliczyć moce zbiorów:
- (a) $X = \{A : A \subseteq \mathbb{R} \text{ i } A \text{ ma element najmniejszy i największy}\};$
 (b) $Y = \{A : A \subseteq \mathbb{Z} \text{ i } A \text{ ma element najmniejszy i największy}\};$
 (c) $Z = \{A : A \subseteq \mathbb{Q} \text{ i } A \text{ ma element najmniejszy i największy}\}.$
198. Niech R będzie relacją równoważności w zbiorze \mathbb{Z} . Znaleźć moc zbioru R .
199. Które z następujących zbiorów są równoliczne:
 $\mathbb{Q} \times \mathbb{Z}, \mathbb{R} \times \mathbb{Q}, \mathbb{R} - \mathbb{Q}, 2^{\mathbb{N}}, 2^{\mathbb{R}}, P(\mathbb{R} \times \mathbb{Z}), \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \mathbb{N}^m?$
200. Które z następujących zbiorów są równoliczne:
 $\mathbb{Z}, \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}, \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \{0, 1\}^*, \{0, 1\}^{\mathbb{N}}, P(\mathbb{Q}), P(\mathbb{R})?$
201. Relacja równoważności R w zbiorze $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ jest określona następująco:

$$R = \{\langle f, g \rangle : \forall n (f(2n) = g(2n))\}.$$
 Podać moc zbioru wszystkich klas abstrakcji relacji R , oraz moc każdej klasy.
202. Znaleźć moc zbioru $C = \{X \in P(\mathbb{R}) : X \cap \mathbb{Q} \text{ jest skończone}\}.$
203. Niech $\overline{\overline{A}} = 2^{\mathfrak{C}}$. Udowodnić, że istnieje $f : A \xrightarrow[na]{1-1} A$, taka że zbiór $\{x \in A : x = f(x)\}$ jest mocy \mathfrak{C} .
204. Niech $\overline{\overline{A}} = 2^{\mathfrak{C}}$. Udowodnić, że istnieje $f : A \xrightarrow[na]{1-1} A$, taka że zbiór $\{x \in A : x \neq f(x)\}$ jest mocy \mathfrak{C} .
205. Niech \mathcal{R} będzie zbiorem wszystkich relacji równoważności w zbiorze \mathbb{N} . Określamy relację równoważności ρ w zbiorze \mathcal{R} warunkiem: $r_1 \rho r_2$ wtedy i tylko wtedy, gdy zbiory \mathbb{N}/r_1 i \mathbb{N}/r_2 są równoliczne. Znaleźć moc \mathcal{R}/ρ , oraz moc $[r]_{\rho}$, gdzie mrn zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $2|mn(n+1)$
206. Niech r będzie relacją równoważności w zbiorze \mathbb{Q} określoną tak: xry wtedy i tylko wtedy gdy $x^2 + y^2 \neq 0$ lub $xy = 0$. Znaleźć moc zbioru \mathbb{Q}/r oraz moce klas abstrakcji.
- ^R207. W zbiorze $\mathbb{R}[x]$ wszystkich wielomianów jednej zmiennej o współczynnikach rzeczywistych określamy relację równoważności r :
 $f r g$ wtedy i tylko wtedy, gdy $f - g$ jest funkcją liniową.
 Znaleźć moc zbioru ilorazowego relacji r i moc każdej klasy abstrakcji.
208. Pokazać że jeśli $\overline{\overline{A}} = \mathfrak{m}$ oraz $0 \neq \mathfrak{n} \leq \mathfrak{m}$, to istnieje relacja równoważności r w zbiorze A spełniająca warunek $\overline{\overline{A/r}} = \mathfrak{n}$.

209. Niech $\aleph_0 \leq n \leq m = \overline{A}$. Udowodnić, że istnieje taka funkcja $f : A \xrightarrow[\text{na}]{1-1} A$, że zbiór $\{x \in A \mid x \neq f(x)\}$ jest mocy n .
210. Jakiej mocy jest zbiór wszystkich skończonych (nieskończonych, przeliczalnych, mocy \mathfrak{C}) podzbiorów \mathbb{R} ?
211. Niech $\varphi : \mathbb{Z}[x] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie taka, że $\varphi(\langle p, r \rangle) = p(r)$. Jaka jest moc zbioru $\varphi^{-1}(\mathbb{Q} - \mathbb{Z})$ i zbioru $\mathbb{Z}[x] \times \mathbb{R} / \ker \varphi$? Udowodnić, że jeśli $X_1, X_2 \subseteq \mathbb{R}$ oraz $X_1 \cap \mathbb{Z}$ i $X_2 \cap \mathbb{Z}$ są niepuste, to zbiory $\varphi^{-1}(X_1)$ i $\varphi^{-1}(X_2)$ są równoliczne.
212. Podzbiór W zbioru liczb wymiernych \mathbb{Q} nazywamy *wypukłym*, jeśli dla dowolnych trzech liczb wymiernych $a < b < c$, jeśli $a, c \in W$, to także $b \in W$. Ile jest wszystkich podzbiorów \mathbb{Q} , które są wypukłe? Ile jest podzbiorów, które nie są wypukłe?
213. Niech $X \neq \emptyset$ będzie ustalonym zbiorem i niech $a \in X$ będzie ustalonym elementem. W zbiorze $\mathcal{P}(X)$ określamy następującą relację równoważności: $A \sim B$ wtedy i tylko wtedy gdy $A = B$ lub $a \notin A \cup B$. Z badać moc $\mathcal{P}(X)/\sim$, w zależności od mocy zbioru X .
214. Czy istnieje zbiór mocy mniejszej niż zbiór jego wszystkich skończonych podzbiorów?
- ^R215. Czy istnieją takie zbiory A i B , że $\overline{A} < \overline{B}$, ale A^B i B^A są równoliczne?
216. Jakiej mocy jest zbiór wszystkich funkcji okresowych z \mathbb{Z} do \mathbb{Z} ? A zbiór wszystkich funkcji okresowych z \mathbb{Q} do \mathbb{Q} ? (Przyjmujemy, że funkcja $f : X \rightarrow X$ jest okresowa, jeżeli nie jest stała, oraz istnieje takie $d \in X$, że $d > 0$ i dla dowolnego $x \in X$ zachodzi $f(x + d) = f(x)$.)
- ^R217. Jakiej mocy jest zbiór wszystkich wypukłych podzbiorów \mathbb{R}^2 ?
218. Ile jest wszystkich relacji przechodnich $R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$? Ile jest relacji symetrycznych? Zwrotnych? Relacji równoważności?
219. Ile jest funkcji z \mathbb{N} do \mathbb{N} : (a) nierosnących? (b) niemalejących?
- ^R220. Jakiej mocy jest zbiór \mathcal{F} tych wszystkich funkcji $f : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$, że dla każdego skończonego $Z \subseteq \mathbb{N}$ wartość funkcji $f(Z)$ też jest skończona?
- ^R221. Funkcja $f : \mathbb{Z} \rightarrow \{0, 1\}$ jest *okresowa*, gdy istnieje takie $k \in \mathbb{N} - \{0\}$, że $f(x) = f(x + k)$ dla każdego $x \in \mathbb{Z}$. Wykazać, że zbiór funkcji okresowych z \mathbb{Z} w $\{0, 1\}$ ma moc \aleph_0 .
- ^R222. Udowodnić, że jeśli w rodzinie podzbiorów zbioru liczb naturalnych każde dwa różne zbiory mają co najwyżej jeden element wspólny, to rodzina ta jest przeliczalna.
- ^R223. Czy teza zadania 222 pozostaje prawdziwa przy założeniu, że:
- każde dwa różne zbiory z danej rodziny mają co najwyżej k wspólnych elementów?
 - każde dwa różne zbiory z danej rodziny mają skończony iloczyn?
- ^R224. Jakiej mocy jest zbiór funkcji monotonicznych z \mathbb{R} w \mathbb{R} ?
225. Jakiej mocy jest zbiór wszystkich funkcji różnowartościowych z \mathbb{R} do \mathbb{R} ?
- ^R226. Znaleźć moc zbioru wszystkich funkcji różnowartościowych z \mathbb{N} do $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ i moc zbioru wszystkich surjekcji z \mathbb{N} na $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.
227. Jakiej mocy jest rodzina wszystkich tych relacji równoważności w \mathbb{N} , które mają skończenie wiele klas abstrakcji?
228. Jakiej mocy jest rodzina wszystkich tych relacji równoważności w \mathbb{N} , które mają tylko skończone klasy abstrakcji?

229. Dla $a \in \mathbb{N}$ określamy $C_a = \{\langle x, y \rangle \in \mathbb{R}^2 : ax \leq y < (a+1)x\}$. Znaleźć moc każdego ze zbiorów C_a . Czy istnieje takie X i takie r , że $X/r = \{C_a : a \in \mathbb{N}\}$? Jeśli tak, to znaleźć X . Co się zmieni, jeśli przyjmiemy $C_a = \{\langle x, y \rangle \in \mathbb{R}^2 : |ax| \leq |y| < |(a+1)x|\}$?
230. Które ze zbiorów $A, B, f, Rg(f)$ są równoliczne dla dowolnej funkcji $f : A \rightarrow B$? Które są równoliczne pod warunkiem, że funkcja f jest różnowartościowa? (Gdy jest „na”? Gdy jest i taka i taka?)
231. Czy istnieje taki zbiór X , że $|P(X)| = \aleph_0$? A taki, że $|X^X| = \aleph_0$? A może istnieje taki, że $|\mathbb{N}^X| = \aleph_0$?
- ^R232. Niech A będzie zbiorem (niekoniecznie wszystkich) ciągów dodatnich liczb naturalnych o tej własności, że dla każdego ciągu liczb dodatnich a_1, a_2, \dots (niekoniecznie należącego do zbioru A) istnieje w A taki ciąg b_1, b_2, \dots , że $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = \infty$. Udowodnić, że $|A| > \aleph_0$.
233. Ile jest takich funkcji $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, że każdy zbiór $f^{-1}(\{n\})$ jest skończony?
- ^R234. Niech $\overline{A}, \overline{B} < \mathfrak{C}$. Pokazać, że $\overline{A \cup B} < \mathfrak{C}$.
- ^R235. Niech $\overline{A} < \mathfrak{C}$ i $\overline{B} \leq \aleph_0$. Pokazać, że $\overline{A \times B} < \mathfrak{C}$.
236. W zbiorze $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określamy relację równoważności r , przyjmując frg wtedy i tylko wtedy, gdy $f|_{\mathbb{Q}} = g|_{\mathbb{Q}}$. Ile klas abstrakcji ma relacja r i jakie są ich moce?
237. Dwa prostokąty na płaszczyźnie są w relacji r wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje przesunięcie przekształcające jeden na drugi. Ile klas abstrakcji ma relacja r i jakie są ich moce?
- ^R238. Jaka jest moc zbioru $F = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid \overline{\phi(f)} = \aleph_0\}$, jeśli ϕ jest funkcją z zadania 119?
- ^R239. Relacja równoważności r w zbiorze $\mathbb{N} - \{0\}$ jest określona tak:
- $$\langle m, n \rangle \in r \iff m \text{ i } n \text{ mają te same dzielniki pierwsze.}$$
- Ile klas abstrakcji ma relacja r i jakie są moce tych klas?
- ^R240. Funkcja $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ jest *uporczywa*, gdy spełnia warunek
- $$\forall n \in \mathbb{N} \forall m \in \mathbb{N} \exists k \in \mathbb{N} (k > m \wedge f(k) = n).$$
- Jakiej mocy jest zbiór U wszystkich funkcji uporczywych?
- ^R241.* Relacja równoważności w \mathbb{R} ma przeliczalną liczbę klas abstrakcji. Udowodnić, że co najmniej jedna z nich jest mocy continuum
- ^R242. Niech \mathcal{R} oznacza rodzinę wszystkich relacji równoważności w \mathbb{N} . Wiadomo, że \mathcal{R} jest mocy continuum. Jakiej mocy są zbiory:
- $A = \{r \in \mathcal{R} \mid [0]_r = \mathbb{N} - \{7\}\}$?
 - $B = \{r \in \mathcal{R} \mid [0]_r = \mathbb{N} - \{7, 49\}\}$?
 - $C = \{r \in \mathcal{R} \mid [0]_r = \{7, 49\}\}$?
- ^R243. Jakiej mocy jest zbiór \mathcal{F} wszystkich funkcji z \mathbb{N} do \mathbb{N} mających skończony zbiór wartości?
- ^R244. Funkcję $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ nazywamy *zygzakiem*, gdy spełnia warunek
- $$\forall x > 0 ((f(x) > f(x-1) \rightarrow f(x) > f(x+1)) \wedge (f(x) < f(x-1) \rightarrow f(x) < f(x+1))).$$
- Jakiej mocy jest zbiór wszystkich zygzaków?
- ^R245. Jaka jest moc zbioru $A = \{f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \mid \forall x. f(x) \leq x\}$? Jakiej mocy są podzbiory $B = \{f \in A \mid f \text{ jest na } \mathbb{N}\}$ i $C = \{f \in A \mid f \text{ jest różnowartościowa}\}$?

246. Znaleźć moc zbioru wszystkich łańcuchów maksymalnych w zbiorze $\{0, 1\}^*$ z relacją porządku prefiksowego.
- ^R247. Niech \sim będzie relacją równoważności w zbiorze $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ określoną następująco:
 $f \sim g$ wtedy i tylko wtedy, gdy $|f(n) - g(n)|$ jest ograniczone.
 Jaka jest moc zbioru $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}/\sim$?
- ^R248. Niech $f: \mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow \mathbb{N}$ będzie zadana wzorem
- $$f(X) = \begin{cases} \min X, & \text{gdy } X \text{ nieskończony;} \\ \prod_{x \in X} x, & \text{gdy } X \text{ skończony,} \end{cases}$$
- gdzie $\prod_{x \in X} x$ to iloczyn wszystkich elementów X . Jaka jest moc zbioru $A = \mathcal{P}(\mathbb{N})/\ker(f)$?
- ^R249. Jaka jest moc zbioru $B = \{f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \mid (\forall n: \mathbb{N} f(n) \leq n) \wedge (\forall m: \mathbb{N} \exists n: \mathbb{N} f(n) > m)\}$?
- ^R250. Niech $R \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N})^2$ będzie następującą relacją równoważności:
- $$\langle r, s \rangle \in R \Leftrightarrow \exists \pi (\pi: \mathbb{N} \xrightarrow[\text{na}]{1-1} \mathbb{N} \wedge \forall x, y \in \mathbb{N} (\langle x, y \rangle \in r \leftrightarrow \langle \pi(x), \pi(y) \rangle \in s)).$$
- Jakiej mocy jest zbiór $\mathcal{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N})/R$?
- ^R251. Zbiory $A, B \subseteq \mathbb{R}^2$ są w relacji r wtedy i tylko wtedy, gdy różnica symetryczna $A \dot{-} B$ jest zawarta w pewnym kole.⁸
- Udowodnić, że r jest relacją równoważności.
 - Jakiej mocy są klasy abstrakcji relacji r ?
 - Jakiej mocy jest rodzina wszystkich klas abstrakcji relacji r ?
- ^R252. Jakiej mocy jest zbiór \mathcal{F} tych wszystkich funkcji $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, że dla dowolnych $m, n \in \mathbb{N}$ zachodzi równość:
- $f(m + n) = f(m) + f(n)$;
 - $f(m \cdot n) = f(m) \cdot f(n)$;
 - $f(m^n) = f(m)^{f(n)}$?

Porządki częściowe

253. Podać przykład zbioru częściowo uporządkowanego, z dwoma elementami maksymalnymi i jednym minimalnym, bez elementu najmniejszego i z takim czteroelementowym antyłańcuchem, który jest ograniczony z góry ale nie ma kresu górnego.
254. W zbiorze $\{2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 12, 24\}$, uporządkowanym częściowo przez relację podzielności ($m \preceq n$ wtedy i tylko wtedy gdy $n = m \cdot k$, dla pewnego k) wskazać wszystkie elementy minimalne, maksymalne, największe i najmniejsze. Czy istnieją w tym zbiorze trzelementowe łańcuchy lub antyłańcuchy ?
255. Wskazać elementy minimalne, maksymalne, największe i najmniejsze w zbiorze $\{\{1, 2, 3, 4, 6\}, \{3\}, \{1, 2, 3, 4, 5\}, \{2, 3, 3, 5, 2\}, \{3, 4, 2, 4, 1\}, \{2, 1, 2, 2, 1\}, \{2, 1, 2, 1\}\}$, uporządkowanym przez inkluzję.
256. Zbiór częściowo uporządkowany nazywamy *kratą*, gdy każdy jego dwuelementowy podzbiór ma kres górny i kres dolny. Czy zbiór z poprzedniego zadania jest kratą ?
- ^R257. Dla dowolnego $X \subseteq \mathbb{R}$ przyjmujemy $a \preceq_X b$ wtedy i tylko wtedy, gdy $b - a \in X$. Zbiory X , dla których relacja \preceq_X jest częściowym porządkiem w \mathcal{R} , nazywamy *porządkami*. Które z poniższych zbiorów są porządne:

⁸Różnica symetryczna to zbiór $A \dot{-} B = (A - B) \cup (B - A)$.

- (a) \mathbb{N} ?
- (b) $[1, \infty)$?
- (c) $\mathbb{Q} \cap (-\infty, 0]$?
- (d) $\{n + q \mid n \in \mathbb{N} \wedge q \in \mathbb{Q} \cap (-\infty, 0]\}$?
- (e) $\{n + q\pi \mid n \in \mathbb{N} \wedge q \in \mathbb{Q} \cap (-\infty, 0]\}$?
- (f) $([0, \infty) - \mathbb{Q}) \cup \{0\}$?
- ^R258. Które z następujących stwierdzeń są prawdziwe dla dowolnego porządkowego X (patrz zadanie 257)?
- (a) Porządek $\langle \mathbb{R}, \preceq_X \rangle$ nie ma elementu największego.
- (b) Porządek $\langle \mathbb{R}, \preceq_X \rangle$ nie ma elementu minimalnego.
- (c) $\forall a : \mathbb{R} \forall B : \mathcal{P}(\mathbb{R}) (a = \sup_{\preceq_X} B \leftrightarrow a + 1 = \sup_{\preceq_X} \{b + 1 \mid b \in B\})$
- (d) W porządku $\langle \mathbb{R}, \preceq_X \rangle$ każdy podzbiór skierowany jest łańcuchem.
- (e) Porządek $\langle \mathbb{R}, \preceq_X \rangle$ jest liniowy wtedy i tylko wtedy, gdy pewien otwarty przedział liczb rzeczywistych jest łańcuchem w $\langle \mathbb{R}, \preceq_X \rangle$.
259. Niech $\langle X, r \rangle$ i $\langle Y, s \rangle$ będą niepustymi zbiorami częściowo uporządkowanymi. Pokazać, że:
- (a) $\langle X \oplus Y, r \oplus s \rangle$ jest zbiorem częściowo uporządkowanym bez elementu największego.
- (b) Dla dowolnego $a \in X \oplus Y$, element a jest minimalny w $\langle X \oplus Y, r \oplus s \rangle$ wtedy i tylko wtedy gdy jest elementem minimalnym w $\langle X, r \rangle$ lub w $\langle Y, s \rangle$.
260. Jeśli \leq jest częściowym porządkiem w zbiorze A to relację $<$ nazywamy *ostrym uporządkowaniem* wyznaczonym przez \leq . Pokazać, że ostre uporządkowania wyznaczone przez porządki częściowe to dokładnie te relacje, które są przechodnie i przeciwzwrotne.
- ^R261. Niech A i B będą zbiorami częściowo uporządkowanymi i niech funkcje $f : A \rightarrow B$ oraz $g : B \rightarrow A$ będą monotoniczne. Udowodnić, że następujące warunki są równoważne:
- (a) $\forall a \in A \forall b \in B (a \leq g(b) \leftrightarrow f(a) \leq b)$;
- (b) $\forall a \in A (a \leq g(f(a)))$ oraz $\forall b \in B (f(g(b)) \leq b)$.
262. Niech $\langle D, \leq \rangle$ będzie skończonym zbiorem częściowo uporządkowanym z elementem największym i najmniejszym. Dla $a, b \in D$ stosujemy oznaczenia:
- $$(a, b) = \{d \in D : a < d < b\}; \quad [a, b] = \{d \in D : a \leq d \leq b\}.$$
- Założmy, że dla dowolnych $a, b \in D$, jeśli $(a, b) \neq \emptyset$ to $(a, b) = [c, d]$, dla pewnych c, d (tj. że każdy przedział otwarty jest też przedziałem domkniętym). Udowodnić, że wtedy $\langle D, \leq \rangle$ jest liniowo uporządkowany.
263. Czy zbiór tych słów nad alfabetem $\{0, 1\}$, które mają tyle samo zer co jedynek, ma kres górny (dolny) w porządku leksykograficznym?
264. Czy zbiory $\{01^n : n \in \mathbb{N}\}$ i $\{0^n 1 : n \in \mathbb{N}\}$ mają kresy górne (dolne) w zbiorze $\{0, 1\}^*$ uporządkowanym leksykograficznie?
265. Ile jest relacji równoważności w \mathbb{N} , które są jednocześnie częściowymi porządkami?
266. Niech X będzie zbiorem częściowo uporządkowanym i niech $A \subseteq X$ nie ma elementu największego. Niech $B = \{b \in X : \forall a \in A (b > a)\}$. Pokazać, że jeśli istnieje $\inf(B)$, to istnieje $\sup(A)$ oraz $\sup(A) = \inf(B) \in B$.
267. Podaj przykłady:
- Zupełnego porządku częściowego, który nie jest kratą zupełną;
 - Przekształcenia monotonicznego w kracie zupełnej, które nie jest ciągłe;

268. Podaj przykład takiego przekształcenia monotonicznego f w kracie $\langle P(\mathbb{N}), \subseteq \rangle$, że kres górny zbioru $\{f^n(\emptyset) : n \in \mathbb{N}\}$ nie jest najmniejszym punktem stałym f . Czy można tak wybrać f , aby najmniejszy punkt stały nie istniał?
269. Podać przykład kraty, która ma element największy i najmniejszy, ale nie jest zupełna.
270. Udowodnić, że w kracie zupełnej każdy podzbiór ma kres dolny.
- ^R271. Rozpatrzmy funkcję $f : P(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \rightarrow P(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$ określoną tak:
- $$f(s) = s \cdot s,$$
- gdzie kropka oznacza składanie relacji. Udowodnić, że funkcja f jest ciągła ze względu na uporządkowanie przez inkluzję, tj. że $f(\bigcup \mathcal{X}) = \bigcup f(\mathcal{X})$, dla dowolnej skierowanej rodziny relacji $\mathcal{X} \subseteq P(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$.
272. Funkcja $f : P(A) \rightarrow P(A)$ jest ciągła. Powiemy, że zbiór $x \subseteq A$ jest *dobry*, gdy $f(x) \subseteq x$. Udowodnić, że iloczyn dowolnej rodziny zbiorów dobrych jest dobry i że suma dowolnej skierowanej rodziny zbiorów dobrych jest dobra.
273. Niech f będzie ciągłym przekształceniem kraty zupełnej $\langle K, \leq_K \rangle$ w kratę zupełną $\langle L, \leq_L \rangle$. Czy f jest ciągłym przekształceniem z $\langle K, \geq_K \rangle$ do $\langle L, \geq_L \rangle$? (Inaczej, czy zachowuje kresy dolne zbiorów „skierowanych w dół”?)
274. Niech r będzie relacją częściowego porządku w zbiorze A . Udowodnić, że jeśli $r \cup r^{-1}$ jest relacją równoważności, to każdy skierowany podzbiór zbioru A jest łańcuchem.
275. Niech A będzie zupełnym częściowym porządkiem i niech $f : A \rightarrow A$ będzie ciągła.
- Jeśli $a \leq f(a)$ to istnieje taki punkt stały b funkcji f , że $a \leq b$.
 - Czy jeśli $a \geq f(a)$ to istnieje taki punkt stały b funkcji f , że $a \geq b$?
276. Udowodnić, że zbiór częściowo uporządkowany jest kratą zupełną wtedy i tylko wtedy gdy jest jednocześnie kratą i zupełnym porządkiem częściowym.
277. Udowodnić, że każdy skończony porządek częściowy jest izomorficzny z pewnym podzbiorem \mathbb{N} uporządkowanym przez relację podzielności.
278. Udowodnić, że w zbiorze \mathbb{N}^k , uporządkowanym „po współrzędnych”, wszystkie antyłańcuchy są skończone.
279. Niech $F : P(S \times S) \rightarrow P(S \times S)$ będzie funkcją monotoniczną o takich własnościach:
- $\text{id}_S \subseteq F(\text{id}_S)$;
 - $F(r) \cdot F(r') \subseteq F(r \cdot r')$, dla wszystkich r, r' ;
 - $F(r)^{-1} \subseteq F(r^{-1})$, dla wszystkich r .
- Udowodnić, że największy punkt stały funkcji F jest relacją równoważności.
280. Niech $\langle A, \leq \rangle$ będzie zupełnym porządkiem częściowym, a $f : A \rightarrow A$ niech będzie funkcją ciągłą. Zbadać prawdziwość następujących stwierdzeń:
- Jeśli a jest najmniejszym punktem stałym funkcji f to $a = \inf\{x \in A \mid f(x) \leq x\}$.
 - Jeśli a jest największym punktem stałym funkcji f to $a = \sup\{x \in A \mid f(x) \geq x\}$.
- ^R281. Niech A będzie nieskończonym zbiorem i niech $f : P(A) \rightarrow P(A)$ będzie monotoniczną funkcją w kracie $\langle P(A), \subseteq \rangle$. Przypuśćmy, że dla dowolnego zbioru $B \subseteq A$ i dowolnego $x \in f(B)$ istnieje taki skończony podzbiór $C \subseteq B$, że $x \in f(C)$. Udowodnić, że f jest ciągła, tj. dla dowolnego skierowanego $S \subseteq P(A)$ zachodzi $f(\bigcup S) = \bigcup f(S)$.

282. Przez $head(w)$ oznaczamy pierwszą literę słowa w (jego głowę), a przez $tail(w)$ jego ogon, czyli to, co zostaje po odcięciu głowy. Rozpatrzmy definicję rekurencyjną:

$$f(w) = \text{if } |w| < 3 \text{ then } \varepsilon \\ \text{else if } head(w) = 0 \text{ then } f(tail^3(w)00) \\ \text{else } f(tail^3(w)1101).$$

Co można powiedzieć o dziedzinie funkcji f ? Wyznaczyć kilka początkowych wartości ciągu $F^k(\perp)$, gdzie F jest takim operatorem, że $f = lfp(F)$.

283. Które z następujących stwierdzeń jest prawdziwe dla dowolnego zbioru częściowo uporządkowanego $\langle X, \leq \rangle$ i dowolnych $A, B \subseteq X$?
- Jeśli w X istnieją $\sup A$ i $\sup B$ to istnieje $\sup(A \cup B)$.
 - Jeśli w X istnieje $\sup(A \cup B)$ to istnieją $\sup A$ i $\sup B$.
- ^R284. Niech $\langle A, \leq \rangle$ będzie częściowym porządkiem i niech $f : A \rightarrow A$. Załóżmy, że dla każdego łańcucha L w $\langle A, \leq \rangle$ istnieją kresy dolne⁹ zbiorów L i $f(L)$, a jeśli $L \neq \emptyset$, to na dodatek $f(\inf L) = \inf(f(L))$. Udowodnić, że f ma największy punkt stały.
- ^R285. Udowodnić, że funkcja $f : P(\mathbb{N}) \rightarrow P(\mathbb{N})$ jest ciągła (ze względu na inkluzję) wtedy i tylko wtedy, gdy

$$f(a) = \bigcup \{f(e) \mid e \text{ skończony oraz } e \subseteq a\},$$

dla dowolnego $a \in P(\mathbb{N})$.

- ^R286. Dany jest następujący porządek częściowy w zbiorze $P(\mathbb{N}) - \{\emptyset\}$:
- $$X \leq Y \Leftrightarrow (\min(X) < \min(Y)) \vee ((\min(X) = \min(Y)) \wedge X \subseteq Y).$$
- Czy ten porządek jest liniowy?
 - Czy ten porządek jest dobrze ufundowany?
 - Wskaż w nim elementy minimalne, maksymalne, najmniejsze, największe.
 - Czy ten porządek jest kratą zupełną?

- ^R287. Podzbiór B częściowo uporządkowanego zbioru $\langle A, \leq \rangle$ nazywamy *podstawą* zbioru A , gdy dla dowolnego elementu $a \in A$ istnieje takie $b \in B$, że $a \geq b$. Podstawa jest *minimalna*, gdy jest elementem minimalnym rodziny wszystkich podstaw, uporządkowanej przez inkluzję.

- Udowodnić, że podstawa jest minimalna wtedy i tylko wtedy, gdy jest antyłańcuchem. Czy każdy antyłańcuch jest podstawą?
 - Czy każdy zbiór częściowo uporządkowany ma minimalną podstawę?
- ^R288. Dla dowolnej rodziny $\mathcal{S} \subseteq P(\mathbb{N}) - \{\emptyset\}$ określamy relację $\preceq_{\mathcal{S}}$ w \mathcal{S} , przyjmując, że

$$A \preceq_{\mathcal{S}} B \Leftrightarrow \overline{\overline{A}} < \overline{\overline{B}} \vee (\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}} \wedge \min A \leq \min B).$$

Które z następujących stwierdzeń są prawdziwe?

- Jeśli rodzina \mathcal{S} jest przeliczalna, to $\preceq_{\mathcal{S}}$ jest częściowym porządkiem.
- Jeśli $\preceq_{\mathcal{S}}$ jest częściowym porządkiem, to rodzina \mathcal{S} jest przeliczalna.
- Jeśli r jest relacją równoważności i $\mathcal{S} = \mathbb{N}/r$, to $\preceq_{\mathcal{S}}$ jest częściowym porządkiem.
- Jeśli $\preceq_{\mathcal{S}}$ jest częściowym porządkiem, to jest dobrym porządkiem.

⁹Uwaga: Założenia o kresach dolnych dotyczą *tylko łańcuchów*.

Lemat Kuratowskiego-Zorna

^R289. W przestrzeni \mathbb{R}^n , której elementami są n -tki liczb rzeczywistych określamy *odległość* $\rho(x, y)$ pomiędzy krotkami $x = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$ i $y = \langle y_1, \dots, y_n \rangle$ wzorem

$$\rho(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$$

Podzbiór $X \subseteq \mathbb{R}^n$ nazwiemy *rzadkim* wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych różnych punktów $x, y \in X$ zachodzi $\rho(x, y) \geq 1$. Podzbiór Y nazwiemy *wszędobylskim*, gdy dla dowolnego $z \notin Y$ istnieje takie $x \in Y$, że $\rho(z, x) < 1$. Udowodnić, że suma łańcucha zbiorów rzadkich jest zbiorem rzadkim. Czy istnieje rzadki zbiór wszędobylski w przestrzeni \mathbb{R}^3 ? Czy istnieje taki zbiór w przestrzeni \mathbb{R}^{2008} ?

^R290. Udowodnić, że w każdym zbiorze częściowo uporządkowanym istnieje maksymalny (ze względu na inkluzję) podzbiór skierowany.

291. Udowodnić, że w każdym zbiorze częściowo uporządkowanym jest maksymalny łańcuch.

292. Niech $B \subseteq \mathbb{R}_+$. Udowodnić, że istnieje taki zbiór $C \subseteq \mathbb{R}$, że

- $\forall x, y \in C (x \neq y \rightarrow |x - y| \in B)$;
- $\forall x (x \notin C \rightarrow \exists y \in C |x - y| \notin B)$.

293. Niech $D \subseteq A \times A$. Udowodnić, że istnieje zbiór $Z \subseteq A$ taki, że $(Z \times Z) \cap D = \emptyset$, oraz jeśli $Z \subsetneq V \subseteq A$ to $(V \times V) \cap D \neq \emptyset$.

294. Niech $r \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Udowodnić, że istnieje maksymalny (ze względu na inkluzję) zbiór $C \subseteq \mathbb{N}$ taki, że $C \times C \cap r = \emptyset$.

295. Udowodnić, że jeśli \mathcal{R} jest dowolną rodziną zbiorów, to istnieje taka rodzina $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{R}$ zbiorów parami rozłącznych, że dla każdego $A \in \mathcal{R} - \mathcal{S}$ istnieje $B \in \mathcal{S}$ o własności $A \cap B \neq \emptyset$.

296. Czy istnieje taki łańcuch przeliczalnych podzbiorów \mathcal{R} , którego suma nie jest przeliczalna?

297. Załóżmy, że $B \subseteq A \times A$. Udowodnić, że istnieje maksymalny (ze względu na inkluzję) zbiór $C \subseteq A$ taki, że $C \times C \subseteq B$.

298. Rodzinę zbiorów $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{P}(A)$ nazywamy *ideałem*, jeżeli:

- (a) $\mathcal{I} \neq \emptyset$ oraz $\mathcal{I} \neq \mathcal{P}(A)$;
- (b) dla każdych $X, Y \in \mathcal{I}$ zachodzi $X \cup Y \in \mathcal{I}$;
- (c) dla każdego $X \in \mathcal{I}$ i każdego $Y \subseteq X$ zachodzi $Y \in \mathcal{I}$.

Udowodnić, że każdy ideał można rozszerzyć do maksymalnego ideału.

299. Dowolny podzbiór zbioru \mathbb{Z} nazwiemy *zeznaniami*. Zbiór zeznań \mathcal{R} jest *sprzeczny* jeśli istnieje takie $i \in \mathbb{Z}$, że $i, -i \in \bigcup \mathcal{R}$. Udowodnić, że jeśli \mathcal{R} jest dowolną rodziną zeznań, to istnieje maksymalna niesprzeczna podrodzina $\mathcal{R}' \subseteq \mathcal{R}$.

300. Niech f będzie bijekcją z A do A . Pokazać, że istnieje maksymalny podzbiór $B \subseteq A$ taki, że $B \subseteq f(A - B)$.

301. Niech $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Udowodnić, że istnieje maksymalna rodzina $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$, taka że dla dowolnych $f, g \in \mathcal{G}$ zachodzi warunek $\exists i (f(i) = g(i))$.

302. Niech $C \subseteq \mathbb{R}$. Udowodnić, że istnieje zbiór $A \subseteq \mathbb{R}$ spełniający warunki:

- $\forall x \forall y (x, y \in A \rightarrow x + y \notin C)$;
- $\forall x (x \notin A \rightarrow \exists y (y \in A \cup \{x\} \wedge x + y \in C))$.

303. Niech $f : A \times A \rightarrow A$ i niech $C \subseteq A$. Udowodnić, że istnieje maksymalny podzbiór D zbioru A taki, że obraz zbioru $D \times D$ przy funkcji f jest zawarty w C .
304. Udowodnić, że istnieje taki zbiór parami rozłącznych prostych w \mathbb{R}^3 , że każda prosta nie należąca do tego zbioru przecina jakąś prostą z tego zbioru.
305. Udowodnić, że istnieje taka rodzina $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, że
- dla dowolnych $f, g \in \mathcal{A}$ istnieje takie $x \in \mathbb{R}$, że $f(x) = g(x)$;
 - dla dowolnej funkcji $f \notin \mathcal{A}$ istnieje takie $g \in \mathcal{A}$, że $f(x) \neq g(x)$ dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$.
- ^R306. Niech $f : A \rightarrow B$. Pokazać, że istnieje maksymalny podzbiór A , na którym f jest różnowartościowa.
307. Udowodnić, że każdy częściowy porządek $\langle A, \leq \rangle$ ma taki podzbiór $B \subseteq A$, że:
- Żadne dwa różne elementy B nie są porównywalne;
 - Jeśli $a \in A - B$ to istnieje $b \in B$, porównywalne z a .
- ^R308. Niech A będzie ustalonym podzbiorem płaszczyzny, który ma przynajmniej dwa elementy. Udowodnić, że istnieje podzbiór $B \subseteq A$, o takich własnościach:
- Żadne trzy różne punkty zbioru B nie są współliniowe;
 - Każdy punkt zbioru $A - B$ leży na pewnej prostej wyznaczonej przez dwa różne punkty ze zbioru B .
- ^R309. Niech $D \subseteq \mathbb{R}$. Zbiór $V \subseteq \mathbb{R}$ jest D -łatwy, gdy $(x + y)^3 - 2xy \in D$ dla wszystkich $x, y \in V$, takich że $x \neq y$. Zbiór $V \subseteq \mathbb{R}$ jest D -trudny, gdy:
- $$\forall x \in \mathbb{R}(x \in V \vee \exists y \in V((x + y)^3 - 2xy \notin D)).$$
- Dla jakich D istnieje zbiór V , jednocześnie D -łatwy i D -trudny?
- ^R310. Zbiór $A \subseteq \mathbb{R}$ nazwiemy *wzorcowym*, jeżeli każda liczba rzeczywista jest współmierna¹⁰ z pewną liczbą ze zbioru A , ale żadne dwie różne liczby ze zbioru A nie są współmierne. Czy istnieją zbiory wzorcowe?
- ^R311. Niech $A, B \subseteq \mathbb{R}$ będą niepustymi zbiorami. Dla dowolnej liczby x przez $|x - A|$ oznaczamy odległość x od zbioru A , czyli $\inf\{|x - a| \mid a \in A\}$. Udowodnić, że istnieje podzbiór T zbioru B o takich własnościach:
- Jeśli $x, y \in T$ oraz $x \neq y$ to $|x - y| \geq \frac{1}{2}(|x - A| + |y - A|)$;
 - Jeśli $x \in B - T$ to istnieje takie $y \in T$, że $|x - y| < \frac{1}{2}(|x - A| + |y - A|)$.
- ^R312. Powiemy, że dwa zbiory $A, B \subseteq \mathcal{N}$ są *styczne* wtedy i tylko wtedy, gdy $A \cap B \neq \emptyset$. Udowodnić, że istnieje taka rodzina $R \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{N})$, że:
- do R należą wszystkie zbiory skończone (te, które mają skończone dopełnienia);
 - jeśli $A, B \in R$, to A i B są styczne;
 - jeśli $A \notin R$, to istnieje taki $B \in R$, że A i B nie są styczne.

Dobre ufundowanie i porządki liniowe

¹⁰Liczby rzeczywiste x i y są *współmierne*, gdy $mx + ny = 0$ dla pewnych całkowitych m i n , różnych od 0.

^R313. Niech X oznacza zbiór funkcji kwadratowych z \mathbb{R} do \mathbb{R} o współczynnikach całkowitych. Na X określmy porządek:

$$f \leq g \iff \langle f(1), f(2), f(3) \rangle \preceq \langle g(1), g(2), g(3) \rangle,$$

gdzie \preceq jest porządkiem leksykograficznym w \mathbb{R}^3 . Czy ten porządek:

- (a) jest liniowy?
- (b) jest dobrze ufundowany?
- (c) jest kratą zupełną?
- (d) ma element najmniejszy i największy? Jakie są elementy minimalne i maksymalne?

Gdyby w definicji zbioru X zastąpić funkcje kwadratowe dowolnymi wielomianami, to jak zmieniłyby się odpowiedzi?

Rozpatrywany porządek nie jest gęsty. Czy istnieje inny porządek na X (jeśli tak – to jaki), który jest gęsty?

^R314. Przy definicjach z zadania 287:

- (a) Czy każdy zbiór dobrze ufundowany ma minimalną podstawę?
- (b) Czy każdy zbiór, który ma minimalną podstawę jest dobrze ufundowany?

315. Czy zbiór \mathbb{N}^* uporządkowany leksykograficznie jest dobrze ufundowany? A zbiór \mathbb{N}^2 ?

^R316. Dla jakich zbiorów $\langle A, \leq \rangle$ porządek leksykograficzny na A^* jest dobrze ufundowany?

317. Przez *multizbiór* (zbiór z powtórzeniami) nad A , rozumiemy dowolną funkcję $M : A \rightarrow \mathbb{N}$. Wtedy $M(a)$ uważa się za liczbę powtórzeń elementu a w multizbiorze M . Multizbiór jest *skończony* jeśli $\{a \in A : M(a) > 0\}$ jest skończony. Jak można dobrze ufundować zbiór wszystkich skończonych multizbiorów nad \mathbb{N} ?

318. Niech $\langle A, \leq \rangle$ będzie zbiorem dobrze ufundowanym. W zbiorze $P(A)$ określamy porządek częściowy \sqsubseteq w następujący sposób: $X \sqsubseteq Y$ ma miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy $X = Y$ lub $Y \neq \emptyset$ i dla wszystkich $x \in X$ i $y \in Y$ zachodzi $x \leq y$. Udowodnić, że zbiór $\langle P(A), \sqsubseteq \rangle$ jest dobrze ufundowany.

319. Relacja r częściowo porządkująca zbiór \mathbb{N} jest *przyjemna*, jeżeli ma nieskończony łańcuch i jest dobrym ufundowaniem, ale nie jest dobrym porządkiem. Jakiej mocy jest rodzina wszystkich relacji przyjemnych?

^R320. Czy dla każdej funkcji $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ istnieje taka relacja liniowego porządku \sqsubseteq w \mathbb{N} , że dla dowolnych $m, n \in \mathbb{N}$:

- (a) jeśli $m \sqsubseteq n$ to $f(m) \sqsubseteq f(n)$?
- (b) jeśli $m \leq n$ to $f(m) \sqsubseteq f(n)$?
- (c) jeśli $m \sqsubseteq n$ to $f(m) \leq f(n)$?

321. Dla $f, g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, niech $f \leq g$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $f = g$ lub istnieje takie n , że $f(n) < g(n)$ oraz $f(i) = g(i)$ dla $i < n$. Czy porządek \leq jest gęsty?

322. Czy porządek leksykograficzny w zbiorze $\{0, 1\}^*$ jest gęsty? A w zbiorze \mathbb{Z}^* ?

323. Które z następujących podzbiorów \mathbb{R} (ze zwykłym uporządkowaniem) są ze sobą izomorficzne: \mathbb{Q} , \mathbb{R} , $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$, $A = \mathbb{Q} - [0, 1]$, $B = \{m \cdot 2^{-n} : m, n \in \mathbb{N}\}$, $C = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} (2m, 2m + 1]$?

324. Rozpatrzmy zbiory $A = \{3 - \frac{1}{2^n} : n \in \mathbb{N} - \{0\}\}$, $B = \{\pi - \frac{2}{n} : n \in \mathbb{N} - \{0\}\} \cup \{4\}$, $C = \{0\} \cup \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} - \{0\}\} \cup \{2 - \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} - \{0\}\}$. Które ze zbiorów A , B , C , \mathbb{N} ,

\mathbb{Z} , \mathbb{Q} , $\mathbb{Q} - \{0\}$, \mathbb{R} , $\mathbb{R} - \{0\}$, są dobrze uporządkowane przez zwykłą relację \leq ? Które są izomorficzne?

325. Rozważamy $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ z porządkiem

- (a) leksykograficznym;
 (b) $(x, y) \leq (x', y')$ wtedy i tylko wtedy gdy $x \leq x'$ i $y \leq y'$.

Czy istnieje funkcja z $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ w \mathbb{R} , zachowująca porządek? Czy istnieje taka funkcja na \mathbb{R} ? A czy istnieje taka funkcja różnowartościowa?

326. Niech $\langle A, \leq \rangle$ będzie dobrym porządkiem, i niech $\{S_a : a \in A\}$ będzie dowolną rodziną zbiorów. Udowodnić, że $\bigcup_{a \in A} S_a = \bigcup_{a \in A} (S_a - \bigcup_{b < a} S_b)$.

327. Podaj trzy przykłady zbiorów dobrze uporządkowanych mocy \aleph_0 , tak aby żadne dwa nie były izomorficzne.

328. Czy istnieje relacja dobrze porządkująca zbiór $P(\mathbb{R})$?

329. Czy istnieje relacja dobrze porządkująca zbiór $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$?

330. Niech $P_{fin}(\mathbb{N}) = \{A \subseteq \mathbb{N} \mid \overline{A} < \aleph_0\}$. Zdefiniować taki dobry porządek \preceq w zbiorze $P_{fin}(\mathbb{N})$, żeby $\forall A, B \in P_{fin}(\mathbb{N}) (A \subseteq B \rightarrow A \preceq B)$.

331. Niech \leq będzie relacją dobrego porządku w zbiorze A , i niech $f : A \rightarrow A$ spełnia warunek

$$\forall x, y \in A (x < y \rightarrow f(x) < f(y)).$$

Udowodnić, że $x \leq f(x)$, dla dowolnego $x \in A$.

332. Niech \preceq będzie relacją liniowego porządku w zbiorze A , taką że każdy właściwy odcinek początkowy w zbiorze A jest postaci $\mathcal{O}(x) = \{y \in A : y \prec x\}$, dla pewnego $x \in A$. Udowodnić, że \preceq jest dobrym porządkiem.

333. Niech $\langle A, \leq \rangle$ będzie nieskończonym zbiorem dobrze uporządkowanym. Pokazać, że nie istnieje taka różnowartościowa funkcja $f : A \rightarrow A$, że dla dowolnych $a, b \in A$, jeśli $a \leq b$ to $f(b) \leq f(a)$.

334. Jeśli zbiór D jest dobrym porządkiem, to użyjemy oznaczenia

$$D' = \{d \in D \mid d \neq \min D \text{ jest elementem granicznym (nie jest następnikiem) w } D\}.$$

Podać przykład takiego dobrego porządku D , że wszystkie zbiory D', D'', D''', \dots są niepuste. Czy istnieje taki zbiór przeliczalny?

335. Podać przykład dobrego porządku $\mathcal{D} = \langle D, \leq \rangle$ i (ostro) rosnącej funkcji $f : D \rightarrow D$, która spełnia jednocześnie warunki:

- (a) $\forall a \in D \exists b \in D (a < b \wedge f(b) = a)$;
 (b) $\forall a \in D \exists b \in D (a < b \wedge f(b) > a)$;

336. Niech $\langle A, \leq \rangle$ liniowy porządek z elementem najmniejszym 0 i elementem największym 1. Funkcja $f : A \rightarrow A$ jest *zmniejszająca* jeśli $f(x) < x$, dla każdego $x \neq 0$. Funkcja f jest *zwiększająca*, jeśli $f(x) > x$, dla każdego $x \neq 1$. Rozpatrzmy następujące warunki:

- (a) dla każdej funkcji zmniejszającej f zachodzi $\forall x \exists n f^n(x) = 0$;
 (b) dla każdej funkcji zwiększającej f zachodzi $\forall x \exists n f^n(0) \geq x$.

Czy warunek (a) implikuje (b)? Czy (b) implikuje (a)?

337. Niech $A \subseteq \mathbb{R}$ będzie dobrze uporządkowany przez zwykłą relację nierówności dla liczb rzeczywistych. Udowodnić, że A jest zbiorem przeliczalnym.

338. Rozszerzyć porządek prefiksowy na słowach do dobrego porządku.

^R339.* Niech $\langle A, \leq \rangle$ będzie zbiorem dobrze ufundowanym, w którym wszystkie antyłańcuchy są skończone. Niech $\{a_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ będzie dowolnym ciągiem elementów A . Udowodnić, że istnieją takie liczby i, j , że $i < j$ oraz $a_i \leq a_j$.

^R340.* Mówimy, że relacja częściowego porządku \leq w zbiorze A jest *bardzo dobrym ufundowaniem*, jeżeli w każdym ciągu nieskończonym $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ można wskazać takie $i < j$, że $a_i \leq a_j$. Pokazać, że jeśli A jest bardzo dobrze ufundowany przez relację \leq , to każdy ciąg nieskończony w A ma nieskończony podciąg wstępujący $a_{i_1} \leq a_{i_2} \leq a_{i_3} \leq \dots$

Zadania różne

^R341. Rozważmy funkcję $\Phi : (\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{N}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{R}))$, określoną tak:

$$\Phi(f) = \mathbb{R} /_{\ker(f)}$$

Czy Φ jest „na”? Czy jest różnowartościowa? Jaka jest moc zbioru wartości Φ ?

^R342. Funkcja $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ przyjmuje wartość $g(x) = x + 1$ dla parzystych argumentów x , i wartość $g(x) = x - 1$ dla x nieparzystych.

(a) Jaka jest moc rodziny zbiorów $R = \{B \subseteq \mathbb{N} \mid x \in B \leftrightarrow g(x) \notin B\}$?

(b) Relacja $r = \{\langle A, B \rangle \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N}) \mid g(A) \cup A = B \cup g(B)\}$ jest relacją równoważności. Ile elementów ma klasa abstrakcji $[\{0, 1, 2\}]_r$?

^R343. Funkcja $\Phi : (\mathcal{P}(\mathbb{N}) - \{\emptyset\}) \rightarrow (\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N})$ przypisuje każdemu zbiorowi $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) - \{\emptyset\}$ funkcję $\Phi(A) : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, która jest zdefiniowana przez indukcję:

- Na początek $\Phi(A)(0) = \min A$.
- Jeśli $\Phi(A)(n)$ jest największym elementem A , to $\Phi(A)(n + 1) = \min A$.
- W przeciwnym razie $\Phi(A)(n + 1) = \min(\{a \in A \mid a > \Phi(A)(n)\})$.

Funkcja $\Psi : (\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}) \rightarrow (\mathcal{P}(\mathbb{N}) - \{\emptyset\})$ jest zaś określona wzorem $\Psi(f) = \text{Rg}(f)$.

(a) Czy funkcja Φ jest różnowartościowa?

(b) Czy Φ jest na $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$?

(c) Jakiej mocy jest zbiór $\Phi^{-1}(\{f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \mid \text{Rg}(f) = \mathbb{N}\})$?

(d) Czy $\Psi \circ \Phi$ jest funkcją identycznościową?

(e) Czy $\Phi \circ \Psi$ jest funkcją identycznościową?

^R344. Niech \mathcal{R} oznacza rodzinę wszystkich relacji równoważności w \mathbb{N} . Określamy funkcję $f : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$ tak: $f(r) = \{x \in \mathbb{N} \mid \forall y. xry \rightarrow x \leq y\}$.

(a) Czy funkcja f jest różnowartościowa? Czy jest na $\mathcal{P}(\mathbb{N})$? Znaleźć zbiór $\text{Rg}(f)$.

(b) Dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ podać przykład takiego zbioru $A_n \subseteq \mathbb{N}$, że $f^{-1}(\{A_n\})$ ma dokładnie n elementów.

(c) Dla $A, B \subseteq \mathbb{N}$ przyjmijmy, że $A \simeq B$ wtedy i tylko wtedy, gdy zbiory $f^{-1}(\{A\})$ i $f^{-1}(\{B\})$ są równoliczne. Jakiej mocy jest zbiór ilorazowy $\mathcal{P}(\mathbb{N}) / \simeq$?

345. Niech A, B, P będą pewnymi zbiorami i niech $\xi_1 : P \rightarrow A$ oraz $\xi_2 : P \rightarrow B$. Przypuśćmy, że dla dowolnego zbioru C i dowolnych dwóch funkcji $\alpha : C \rightarrow A$ i $\beta : C \rightarrow B$ istnieje dokładnie jedna taka funkcja $\gamma : C \rightarrow P$, że $\xi_1 \circ \gamma = \alpha$ i $\xi_2 \circ \gamma = \beta$ (por. zadanie 95). Udowodnić, że zbiory P i $A \times B$ są równoliczne. Sformułować analogiczne twierdzenia dla produktu uogólnionego i dla sumy prostej (por. zadanie 97).

346. Znaleźć moc zbioru wszystkich porządków liniowych w zbiorze \mathbb{R} wszystkich liczb rzeczywistych.
347. Znaleźć moc zbioru wszystkich dobrych porządków w zbiorze \mathbb{N} wszystkich liczb naturalnych.
348. Jakiej mocy jest zbiór wszystkich łańcuchów
- w zbiorze $\mathbb{N} - \{0\}$, uporządkowanym przez relację podzielności?
 - w zbiorze słów nad alfabetem $\{a, b\}$, uporządkowanym prefiksowo?
349. Ile jest nieskończonych drzew binarnych?
- ^R350. Niech $\mathbb{I}\mathbb{Q} = \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ i niech $\phi : \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}) - \{\emptyset\}$ będzie taka, że $\phi(f) = \vec{f}(\mathbb{I}\mathbb{Q})$. Z badać, czy funkcja ϕ jest różnowartościowa i czy jest na $\mathcal{P}(\mathbb{R}) - \{\emptyset\}$.
351. Funkcja $F : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ jest określona tak:
- $$F(f, g)(n) = \min(f(n), g(n)),$$
- dla dowolnych $f, g \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ i dowolnego $n \in \mathbb{N}$.
- (a) Czy funkcja F jest „na”?
 - (b) Czy jest to funkcja różnowartościowa?
 - (c) Jakiej mocy jest zbiór wszystkich klas abstrakcji jądra¹¹ funkcji F ?
 - (d) Jakiej mocy są klasy abstrakcji tej relacji?
- ^R352. Relacja równoważności r w $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ jest określona następująco: $\langle f, g \rangle \in r$ zachodzi, gdy istnieje taka bijekcja $\pi : \mathbb{N} \xrightarrow[\text{na}]{1-1} \mathbb{N}$, że $f = g \circ \pi$. Udowodnić, że $\langle f, g \rangle \in r$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $X \subseteq \mathbb{N}$ przeciwobrazy $g^{-1}(X)$ i $f^{-1}(X)$ są równoliczne.
- ^R353. Jakiej mocy jest zbiór klas abstrakcji relacji r określonej w zadaniu 352?
- ^R354.* Niech r będzie relacją z zadania 352. Znaleźć wszystkie liczby kardynalne \mathfrak{m} , dla których istnieje klasa abstrakcji relacji r o mocy \mathfrak{m} .
355. Niech $\varphi : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ będzie taką funkcją, że dla dowolnego $Z \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$:
- $$\varphi(Z) = \{\langle X, Y \rangle \mid Z \subseteq X \cap Y\}.$$
- (a) Czy φ jest funkcją różnowartościową?
 - (b) Czy φ jest funkcją na $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N}))$?
 - (c) Niech R będzie zbiorem wszystkich relacji równoważności w $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ a C zbiorem wszystkich częściowych relacji równoważności w $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. Znajdź $\varphi^{-1}(R)$ i $\varphi^{-1}(C)$.
 - (d) Ile elementów mają klasy abstrakcji jądra¹¹ funkcji φ ?
 - (e) Czy któraś z poniższych równości zachodzi dla dowolnych $Z_1, Z_2 \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$?
 - $\varphi(Z_1 \cap Z_2) = \varphi(Z_1) \cap \varphi(Z_2)$;
 - $\varphi(Z_1 \cup Z_2) = \varphi(Z_1) \cup \varphi(Z_2)$.
- ^R356. Niech $\langle K, \leq \rangle$ będzie kratą zupełną i niech S będzie zbiorem wszystkich punktów stałych funkcji ciągłej $f : K \rightarrow K$. Załóżmy, że $P \subseteq S$ i niech a będzie kresem górnym zbioru P w kracie K .
- (a) Udowodnić, że zbiór $\{b \in S \mid b \geq a\}$ ma element najmniejszy.
 - (b) Czy ten element najmniejszy to musi być a ?

¹¹ Jądro przekształcenia $f : A \rightarrow B$ to relacja równoważności $\ker(f) = \{\langle x, y \rangle : A \times A \mid f(x) = f(y)\}$.

- (c) Czy zbiór uporządkowany $\langle S, \leq \rangle$ jest kratą zupełną?
- ^R357. Czy następujące stwierdzenia są prawdziwe? Jeśli nie, co należy wpisać zamiast wielokropka?
- Przeciwwobraz obrazu zbioru a przy ... przekształceniu f pokrywa się ze zbiorem a .
 - Jeśli d jest relacją równoważności w a oraz $b, c \in a$... to $[b]_d \cap [c]_d = \emptyset$.
 - W każdym drzewie nieskończonym ... istnieje gałąź nieskończona.
 - Produkt uogólniony dowolnej ... rodziny zbiorów skończonych jest zawsze skończony lub nieprzeliczalny
 - Każde ciągle ... przekształcenie kraty zupełnej w siebie ma najmniejszy punkt stały.
 - Jeśli $\overline{A} = \mathfrak{C}$ i B jest ... zbiorem przeliczalnym, to $\overline{\overline{A}^B} = \mathfrak{C}$.
 - Jeśli A jest ... zbiorem przeliczalnym, to $\overline{\overline{A}^A} = \mathfrak{C}$.
 - Każdy przedział ... w zbiorze liczb rzeczywistych można dobrze uporządkować.
- ^R358. Jaka jest moc zbioru wszystkich dobrze ufundowanych częściowych porządków w \mathbb{N} ?
- ^R359. Rozpatrzmy następujące częściowe uporządkowanie zbioru $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$:
- $$f \leq g \Leftrightarrow \forall x (f(x) \leq g(x)).$$
- Czy ten porządek jest liniowy?
 - Czy ten porządek jest dobrym ufundowaniem?
 - Czy ten porządek jest kratą zupełną?
 - Czy istnieje w tym porządku łańcuch nieskończony?
 - Czy istnieje w tym porządku antyłańcuch nieskończony?
 - * Czy istnieje w tym porządku antyłańcuch nieprzeliczalny?
 - * Czy istnieje łańcuch nieprzeliczalny w zbiorze $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ uporządkowanym w analogiczny sposób, tj. przez relację:
- $$f \leq g \Leftrightarrow \forall x (f(x) \leq g(x))?$$
- ^R360.* Ile jest łańcuchów w zbiorze $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ uporządkowanym przez inkluzję?
361. Dana jest następująca relacja równoważności $r \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})^2$:
- $$P r Q \quad \text{wtedy i tylko wtedy, gdy} \quad \begin{array}{l} P = Q = \emptyset \quad \text{lub} \\ P, Q \neq \emptyset \quad \text{i} \quad \min P = \min Q. \end{array}$$
- Jakiej mocy jest zbiór ilorazowy $\mathcal{P}(\mathbb{N})/r$? Jakie są moce poszczególnych klas abstrakcji?
362. Jakiej mocy jest zbiór tych wszystkich funkcji $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, że każdy ze zbiorów $f^{-1}(\{n\})$ jest innej mocy?
- ^R363. Powiemy, że zbiór funkcji $F \subseteq 2^X$ rozróżnia elementy zbioru $A \subseteq X$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych różnych $x, y \in A$ istnieje taka funkcja $f \in F$, że $f(x) \neq f(y)$.
- Czy istnieje minimalny (ze względu na inkluzję) zbiór $F \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ rozróżniający elementy zbioru \mathbb{N} ?
 - Czy istnieje maksymalny (ze względu na inkluzję) zbiór $F \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ nie rozróżniający elementów zbioru \mathbb{N} ?
 - Jakiej mocy jest rodzina wszystkich tych podzbiorów zbioru $2^{\mathbb{N}}$, które rozróżniają elementy zbioru \mathbb{N} ?

(d) Czy dla każdego $F \subseteq 2^X$ istnieje maksymalny (ze względu na inkluzję) zbiór $A \subseteq X$, którego elementy rozróżnia zbiór F ?

364. Niech $\mathbb{Q}^+ = \{q \in \mathbb{Q} \mid q > 0\}$ i niech $f : \mathbb{N} \xrightarrow[\text{na}]{1-1} \mathbb{Q}$ i $g : \mathbb{N} \xrightarrow[\text{na}]{1-1} \mathbb{Q}^+$. Definiujemy przez indukcję dwa ciągi liczb $k_m, \ell_m \in \mathbb{N}$, przyjmując dla parzystych m :

- $k_m = \min\{k \in \mathbb{N} \mid \forall i(i < m \rightarrow f(k) \neq f(k_i))\}$;
- $\ell_m = \min\{\ell \in \mathbb{N} \mid \forall i(i < m \rightarrow (g(\ell_i) \leq g(\ell) \leftrightarrow f(k_i) \leq f(k_m))\}$,

a dla nieparzystych m :

- $\ell_m = \min\{\ell \in \mathbb{N} \mid \forall i(i < m \rightarrow f(\ell) \neq f(\ell_i))\}$;
- $k_m = \min\{k \in \mathbb{N} \mid \forall i(i < m \rightarrow (f(k_i) \leq f(k) \leftrightarrow g(\ell_i) \leq g(\ell_m))\}$.

Teraz niech $h : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}^+$ będzie określona warunkiem $h(f(k_n)) = g(\ell_n)$, dla $n \in \mathbb{N}$. Pokazać, że funkcja h jest izomorfizmem porządków $\langle \mathbb{Q}, \leq \rangle$ i $\langle \mathbb{Q}^+, \leq \rangle$.

365. Uogólnić zadanie 364 na dowolne dwa przeliczalne gęste porządki liniowe bez końców.

^R366. Niech $\langle Er, \leq \rangle$ będzie zbiorem liniowo uporządkowanym i niech $Ku \subseteq Er$ będzie podzbiorem zbioru Er o mocy \aleph_0 . Załóżmy, że

- Każdy niepusty podzbiór zbioru Er ograniczony z góry ma kres górny.
- Jeśli $x, y \in Er$ i $x < y$ to istnieje takie $ku \in Ku$, że $x < ku < y$.
- W zbiorze Er nie ma elementu pierwszego ani ostatniego.

Udowodnić, że zbiór Er jest mocy continuum.

^R367. Nie powołując się na twierdzenie Cantora, proszę udowodnić następujący wariant tego twierdzenia: *Dla żadnego zbioru A nie istnieje surjekcja z A na 2^A .*

^R368. Dla wszystkich $k \in \mathbb{N}$ określamy funkcje $f_k : \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \rightarrow \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ jak niżej:

$$f_k(a)(n) = \begin{cases} a(n) + a(n+1) - a(n)a(n+1), & \text{dla } n = k, \\ a(n)a(n+1), & \text{dla } n = k+1, \\ a(n), & \text{w przeciwnym razie.} \end{cases}$$

Każdą z takich funkcji nazywamy *wesołą transformacją*. Wyznacz moc zbioru G wszystkich tych ciągów należących do $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, które za pomocą skończonej liczby wesołych transformacji można przekształcić w jakiś element zbioru

$$B = \{a \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \mid \exists n \in \mathbb{N} (\forall i < n (a(i) = 1) \wedge \forall i \geq n (a(i) = 0))\}.$$

^R369. Rozpatrzmy następującą relację \sim w $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$:

$$f \sim g \quad \text{wtw, gdy} \quad (\forall k \exists \ell f(k) \leq g(\ell)) \wedge (\forall k \exists \ell g(k) \leq f(\ell)).$$

- Udowodnić, że \sim jest relacją równoważności w $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$.
- Znaleźć moc ilorazu $(\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N})/\sim$.
- Znaleźć wszystkie liczby kardynalne, które są mocami klas abstrakcji $[f]_{\sim}$.
- Zbiór $F \subseteq \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ jest *niezależny*, gdy żadne dwa elementy F nie są w relacji \sim . Czy istnieje maksymalny (ze względu na inkluzję) zbiór niezależny?

^R370. Niech \sim będzie relacją z zadania 369. Rozpatrzmy następującą definicję porządku częściowego \preceq w $(\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N})/\sim$:

$$[f]_{\sim} \preceq [g]_{\sim} \quad \text{wtw, gdy} \quad \forall k \exists \ell f(k) \leq g(\ell).$$

- (a) Uzasadnić, że ta definicja jest poprawna i że relacja \preceq jest porządkiem częściowym. Wskazać elementy największe, najmniejsze, maksymalne i minimalne przy tym uporządkowaniu.
- (b) Czy \preceq jest porządkiem liniowym?
- (c) Czy \preceq jest dobrym ufundowaniem?
- (d) Czy każdy podzbiór $(\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N})/\sim$ ma kres dolny (górny) ze względu na porządek \preceq ?
- ^R371. Rozpatrzmy następującą relację \sim w $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$:
- $$f \sim g \text{ wtw, gdy } \forall k \exists \ell (\ell \geq k \wedge f(k) \leq g(\ell)) \wedge \forall k \exists \ell (\ell \geq k \wedge g(k) \leq f(\ell)).$$
- (a) Udowodnić, że \sim jest relacją równoważności w $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$.
- (b) Znaleźć moc ilorazu $(\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N})/\sim$.
- (c) Znaleźć wszystkie liczby kardynalne, które są mocami klas abstrakcji $[f]_{\sim}$.
372. Niech \sim będzie relacją z zadania 371 i niech
- $$[f]_{\sim} \preceq [g]_{\sim} \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } \forall k \exists \ell (\ell \geq k \wedge f(k) \leq g(\ell)).$$
- (a) Uzasadnić, że ta definicja jest poprawna i że relacja \preceq jest porządkiem częściowym. Wskazać elementy największe, najmniejsze, maksymalne i minimalne przy tym uporządkowaniu.
- (b) Czy \preceq jest porządkiem liniowym?
- (c) Czy \preceq jest dobrym ufundowaniem?
- (d) Czy $(\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}/\sim, \preceq)$ jest kratą zupełną?
- ^R373. Dane są trzy zwrotne i symetryczne relacje w $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$:
- $\langle f, g \rangle \in r_1$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy dla pewnego n zbiory $f^{-1}(\{n\})$ i $g^{-1}(\{n\})$ są równoliczne.
 - $\langle f, g \rangle \in r_2$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje takie n_0 , że dla każdego $n > n_0$ zbiory $f^{-1}(\{n\})$ i $g^{-1}(\{n\})$ są równoliczne.
 - $\langle f, g \rangle \in r_3$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $n : \mathbb{N}$ zbiory $f^{-1}(\{n\})$ i $g^{-1}(\{n\})$ są równoliczne.
- (a) Które z relacji r_1, r_2 i r_3 są relacjami równoważności?
- (b) Jakie funkcje wyznaczają skończone klasy abstrakcji (dotyczy tych relacji spośród r_1, r_2 i r_3 , które są relacjami równoważności)?
- ^R374. Formuły α i β są *współspełnialne*, gdy $\alpha \wedge \beta$ jest spełnialna. Zbiór formuł Z jest *parami spełnialny*, gdy każde dwa jego elementy są współspełnialne. Udowodnić, że dla dowolnego parami spełnialnego zbioru formuł A istnieje taki parami spełnialny zbiór Z , zawierający A , że dla dowolnej formuły $\alpha \notin Z$ istnieje taka $\beta \in Z$, że koniunkcja $\alpha \wedge \beta$ nie jest spełnialna.
- ^R375. Podzbiór B zbioru częściowo uporządkowanego A nazwiemy *parterowym*, gdy wszystkie łańcuchy zawarte w B są co najwyżej dwuelementowe.
- (a) Udowodnić, że każdy częściowy porządek ma maksymalny podzbiór parterowy.
- (b) Znaleźć moc rodziny wszystkich parterowych podzbiorów zbioru $P(\mathbb{N})$ uporządkowanego przez inkluzję. *Wskazówka: Czy istnieje parterowy podzbiór o mocy \mathfrak{C} ?*

R376. Niech \mathcal{P} będzie rodziną wszystkich podziałów w zbiorze \mathbb{N} . Wiadomo, że jest to rodzina mocy continuum. Dla $P \in \mathcal{P}$ niech:

$$f(P) = \{\min(X) \mid X \in P\},$$

gdzie $\min(X)$ oznacza najmniejszy element niepustego zbioru X .

- (a) Zbadać, czy funkcja f jest różnowartościowa i czy jest na zbiór $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.
- (b) Znaleźć moc ilorazu $\mathcal{P}/_{\ker(f)}$ oraz zbioru $\text{Rg}(f)$.
- (c) Znaleźć wszystkie możliwe moce klas abstrakcji relacji $\ker(f)$.

R377. Niech $\Phi : \mathcal{P}(\{0, 1\}^*) \rightarrow \{0, 1\}^*$, będzie taką funkcją, że dla dowolnego A , słowo $\Phi(A)$ jest najmniejszym elementem A w porządku leksykograficznym, a jeśli w A nie ma elementu najmniejszego, to $\Phi(A) = \varepsilon$.

- (a) Czy Φ jest różnowartościowa, czy Φ jest „na”?
- (b) Jaka jest moc zbioru klas abstrakcji i jakich mocy są klasy abstrakcji relacji $\ker(\Phi)$?
- (c) Czy istnieje taki zbiór A , że $\inf(A)$ jest określone i $\Phi(A) = \varepsilon \neq \inf(A)$?
- (d) Znaleźć moc zbioru $\Phi(\{A \in \mathcal{P}(\{0, 1\}^*) \mid \forall w \in A. w \preceq 11111011010\})$, gdzie \preceq oznacza porządek leksykograficzny.

R378. Funkcja $F : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}})$ dana jest wzorem:

$$F(A) = \{\langle f, g \rangle \mid \forall a \in \mathbb{N} ((a \in A \rightarrow f(a) \leq g(a)) \wedge (a \notin A \rightarrow g(a) \leq f(a)))\}.$$

- (a) Udowodnić, że dla każdego A relacja $F(A)$ jest częściowym porządkiem.
- (b) Znaleźć $F^{-1}(L)$, gdzie L to zbiór wszystkich porządków liniowych w $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.
- (c) Znaleźć $F^{-1}(M)$, gdzie M to zbiór tych porządków, które mają element minimalny.
- (d) Znaleźć $F^{-1}(D)$, gdzie D to zbiór wszystkich dobrych ufundowań zbioru $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

R379. Funkcja $G : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$ jest określona tak: $G(f) = \{n \in \mathbb{N} \mid f(n) \leq f(n+1)\}$.

- (a) Czy funkcja G jest na $\mathcal{P}(\mathbb{N})$?
- (b) Czy jest to funkcja różnowartościowa?
- (c) Jakiej mocy jest zbiór wszystkich klas abstrakcji jądra funkcji G ?
- (d) Jakiej mocy są klasy abstrakcji tej relacji?

R380. Jakiej mocy jest zbiór tych wszystkich funkcji $f : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$, że:

- (a) każda rodzina zbiorów $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$ spełnia równość $f(\bigcup \mathcal{A}) = \bigcup \{f(Z) \mid Z \in \mathcal{A}\}$?
- (b)* dowolne dwa zbiory A i B spełniają równość $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$?

Rozwiązania i wskazówki do niektórych zadań

10a: W przeciwieństwie do schematu zdaniowego $(p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p)$, nasza formuła nie jest tautologią. Na przykład w dziedzinie liczb naturalnych symbol p może oznaczać własność podzielności przez 3, a symbol q własność podzielności przez 7.

10b: Tak (przy założeniu niepustości dziedziny). Jeśli bowiem wszystkie elementy y danej dziedziny spełniają $P(y)$, to warunek oczywiście jest spełniony. A jeśli znajdzie się takie a , że $P(a)$ nie zachodzi, to implikacja $P(a) \rightarrow \forall y P(y)$ jest spełniona „walkowerem”.

10c: Nie. Wskazówka: wybór v zależy nie tylko od u ale także od x , a nawet od y .

13: Przyczyną błędu jest dwuznaczna konstrukcja „dla każdego x i pewnego y ”, która spowodowała pomieszanie kolejności kwantyfikatorów. W przypadku pierwszym zakładamy w istocie, że zachodzi warunek $\exists y \forall x. x \leq y$. Zaprzeczeniem tego warunku jest $\forall y \exists x. x > y$, a w przypadku drugim założono silniejszą własność $\exists x \forall y. x > y$.

16a: Jeśli w zbiorze \mathbb{N} przyjmiemy, że $R(n)$ zachodzi dla $n > 0$, a warunek S określimy jako zawsze fałszywy, to przesłanka naszej formuły $\forall x R(x) \rightarrow \exists y S(y)$ będzie spełniona „walkowerem”. Ale konkluzja $\forall x \exists y (R(x) \rightarrow S(y))$ nie będzie spełniona. Dla $x = 5$ nie znajdziemy takiego n , aby ze spełnionego warunku $5 > 0$ wynikał niemożliwy warunek $S(n)$. A więc formuła (a) nie jest tautologią.

16b: Ta formuła jest tautologią, bo przesłanka i konkluzja są w istocie równoważne. Aby się o tym przekonać przekształcimy konkluzję $\exists x (R(x) \rightarrow S(x))$ najpierw do postaci $\exists x (\neg R(x) \vee S(x))$, potem do postaci $\exists x \neg R(x) \vee \exists x S(x)$, a następnie do $\neg \forall x R(x) \vee \exists x S(x)$. W końcu dostajemy formułę $\forall x R(x) \rightarrow \exists x S(x)$, różniącą się od $\forall x R(x) \rightarrow \exists y S(y)$ tylko nazwą jednej zmiennej związanej.

17: Formuła φ o zmiennych p_1, \dots, p_n wyznacza funkcję $\lambda \varphi$, typu $(\{p_1, \dots, p_n\} \rightarrow \{0, 1\}) \rightarrow \{0, 1\}$. Takich funkcji jest dokładnie 2^{2^n} , czyli skończenie wiele. W nieskończonym zbiorze formuł nad p_1, \dots, p_n muszą więc być dwie wyznaczające taką samą funkcję. Takie formuły są równoważne (mają to samo znaczenie przy każdym wartościowaniu).

20a: Załóżmy, że $A - B = B - A$ i przypuśćmy, że $x \in A$. Gdyby $x \notin B$ to $x \in A - B$, ale skoro $A - B = B - A$, to $x \notin A$, sprzeczność. Zatem $x \in B$. Udowodniliśmy więc, że $A \subseteq B$. Dowód inkluzji odwrotnej jest podobny.

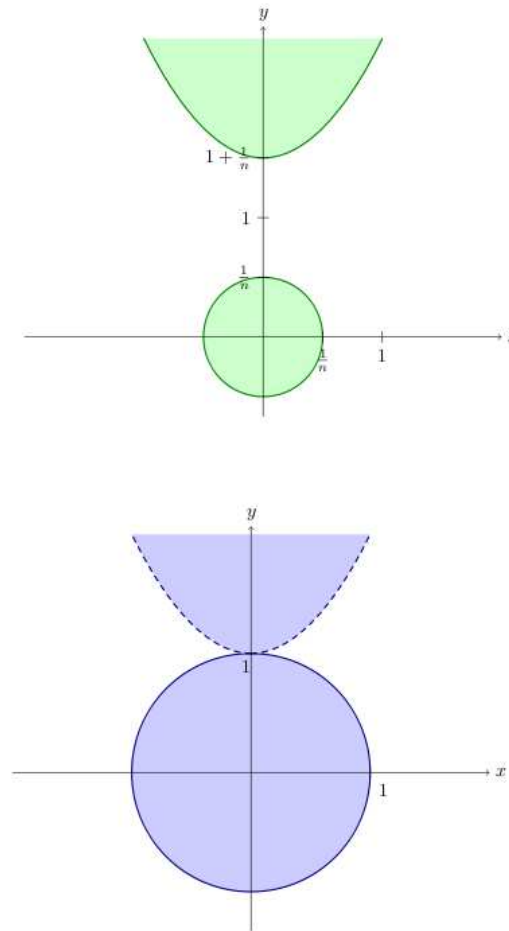
22a: Tak. Załóżmy, że $P(Y) \subseteq X$. Pokażemy, że wtedy $Y \subseteq \bigcup X$. Weźmy dowolne $y \in Y$. Zauważmy, że wtedy $\{y\} \in P(Y)$. Z założenia $P(Y) \subseteq X$ wynika, że $\{y\} \in X$. Mamy zatem $y \in \{y\}$ i $\{y\} \in X$. Na mocy definicji $\bigcup X$ wynika stąd, że $y \in \bigcup X$.

22b: Nie. Jeśli $X = \{\{1, 2\}\}$ i $Y = \{1\}$, to $Y \subseteq \bigcup X = \{1, 2\}$, ale $P(Y) = \{\emptyset, \{1\}\} \not\subseteq X$.

31: Do zbioru A_n należą te pary $\langle x, y \rangle$, które spełniają warunek $x^2 + y^2 > \frac{1}{n^2} \rightarrow n(y - x^2 - 1) \geq 1$. Implikacja jest spełniona wtedy i tylko wtedy, gdy jej poprzednik jest fałszywy lub następnik jest prawdziwy. Szukamy zatem tych par, które spełniają warunek $x^2 + y^2 \leq \frac{1}{n^2}$ (negacja poprzednika) lub $n(y - x^2 - 1) \geq 1$ (następnik). Pierwszy warunek opisuje koło o środku w punkcie $\langle 0, 0 \rangle$ i promieniu $\frac{1}{n}$. Drugi warunek jest równoważny nierówności $y \geq x^2 + 1 + \frac{1}{n}$, która opisuje obszar powyżej paraboli o równaniu $y = x^2 + 1 + \frac{1}{n}$. Ostatecznie, dla ustalonego n , zbiór A_n wygląda tak jak na rysunku 1 (górną część).

Policzmy teraz $\bigcup_{n \in \mathbb{N} - \{0\}} A_n$. Łatwo zauważyć, że koła o środku $\langle 0, 0 \rangle$ i promieniu $\frac{1}{n}$ zawierają się w kole o środku $\langle 0, 0 \rangle$ i promieniu 1. Ponadto jeśli $m > n$, to obszar ograniczony od dołu parabolą o równaniu $y = x^2 + 1 + \frac{1}{m}$ zawiera obszar ograniczony od dołu parabolą o równaniu $y = x^2 + 1 + \frac{1}{n}$ (obszary wyznaczone przez parabole tworzą ciąg wstępujący). Wszystkie A_n są więc zawarte w obszarze widocznym w dolnej części rysunku 1 i to samo dotyczy sumy $\bigcup_{n \in \mathbb{N} - \{0\}} A_n$.

Z drugiej strony, ten obszar także zawiera się w naszej sumie. Istotnie, jeśli n rośnie do nieskończoności, to parabola o równaniu $y = x^2 + 1 + \frac{1}{n}$ znajduje się coraz bliżej paraboli $y = x^2 + 1$. Każdy punkt $\langle x, y \rangle$ znajdujący się powyżej wykresu $y = x^2 + 1$ leży więc, dla dostatecznie dużego n , powyżej paraboli $y = x^2 + 1 + \frac{1}{n}$, a więc należy do sumy. A każdy punkt z koła należy do A_1 . Zatem $\bigcup_{n \in \mathbb{N} - \{0\}} A_n$ wygląda jak na rysunku 1 (dolna część). (Punkty należące do paraboli $y = x^2 + 1$ nie należą do żadnego ze zbiorów A_n , nie należą więc do sumy.)



Rysunek 1: Zadanie 31.

41a: Zaczniemy od tego, że $\bigcap \mathcal{P}(B) = \{x \in B \mid \forall Z. Z \in \mathcal{P}(B) \rightarrow x \in Z\} = \{x \mid x \in \emptyset\} = \emptyset$, dla dowolnego zbioru B . Zatem po prawej stronie pierwszej równości mamy singleton $\{\emptyset\}$ i należy udowodnić, że $\bigcap \{\mathcal{P}(B) \mid B \subseteq A\} = \{\emptyset\}$. Inkluzja „ \supseteq ” wynika stąd, że zawsze $\emptyset \in \mathcal{P}(B)$, przypuśćmy więc, że $Z \in \bigcap \{\mathcal{P}(B) \mid B \subseteq A\}$. Wtedy $Z \in \mathcal{P}(B)$ dla wszystkich $B \subseteq A$ (w tym dla $B = \emptyset$). Jedynym zbiorem o tej własności jest $Z = \emptyset$.

41b: Z zadania 28 wiemy, że $\bigcup \mathcal{P}(B) = B$, dla dowolnego zbioru B , zatem prawa strona równości to $\{B \mid B \subseteq A\} = \mathcal{P}(A)$. Mamy więc pokazać, że $\bigcup \{\mathcal{P}(B) \mid B \subseteq A\} = \mathcal{P}(A)$. Niech najpierw $Z \in \bigcup \{\mathcal{P}(B) \mid B \subseteq A\}$. Wtedy $Z \in \mathcal{P}(B)$, dla pewnego $B \subseteq A$, skąd $Z \subseteq A$, czyli $Z \in \mathcal{P}(A)$. Na odwrót, jeśli $Z \in \mathcal{P}(A)$, to Z należy do zbioru po lewej stronie, bo $Z \in \mathcal{P}(Z)$.

42a: Równość jest zawsze prawdziwa. Udowodnimy najpierw inkluzję „ \subseteq ”. Niech $x \in \bigcap A \cap \bigcap B$. Oznacza to, że $x \in \bigcap A$ oraz $x \in \bigcap B$. A zatem, dla dowolnego $a \in A$ zachodzi $x \in a$, a także dla dowolnego $b \in B$ zachodzi $x \in b$. Należy wykazać, że $x \in c$ dla dowolnego $c \in A \cup B$. Jeśli jednak $c \in A \cup B$, to albo $c \in A$ albo $c \in B$. W każdym przypadku mamy $x \in c$.

Teraz zajmijmy się inkluzją „ \supseteq ”. Załóżmy, że $x \in \bigcap (A \cup B)$. A więc $x \in a$ dla każdego $a \in A \cup B$, w szczególności dla każdego $a \in A$. Stąd $x \in \bigcap A$. Podobnie $x \in \bigcap B$, a zatem $x \in \bigcap A \cap \bigcap B$.

42b: To nie zawsze prawda, na przykład jeśli $A = \{\{0\}, \{1\}\}$, $B = \{\{0\}, \{2\}\}$, to $\bigcap A \cap \bigcap B = \emptyset \cap \emptyset = \emptyset$, ale $\bigcap (A \cap B) = \bigcap \{\{0\}\} = \{0\}$.

43a: Tak. Weźmy dowolną parę $\langle x, y \rangle$; zachodzi wtedy następujący ciąg równoważności:

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle \in \bigcap A \times \bigcap B, & \quad \text{wtedy i tylko wtedy, gdy} & \quad x \in \bigcap A \wedge y \in \bigcap B, \\ & \quad \text{wtedy i tylko wtedy, gdy} & \quad x \in \bigcap A \wedge y \in \bigcap B, \\ & \quad \text{wtedy i tylko wtedy, gdy} & \quad \forall \alpha \in A (x \in \alpha) \wedge \forall \beta \in B (y \in \beta), \\ & \quad \text{wtedy i tylko wtedy, gdy} & \quad \forall \alpha \in A \forall \beta \in B (x \in \alpha \wedge y \in \beta), \\ & \quad \text{wtedy i tylko wtedy, gdy} & \quad \langle x, y \rangle \in \bigcap \{ \alpha \times \beta \mid \alpha \in A \wedge \beta \in B \}. \end{aligned}$$

43b: Tak. Dla dowolnej pary $\langle x, y \rangle$ zachodzą równoważności:

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle \in \bigcup A \times \bigcap B, & \quad \text{wtedy i tylko wtedy, gdy} & \quad x \in \bigcup A \wedge y \in \bigcap B, \\ & \quad \text{wtedy i tylko wtedy, gdy} & \quad \exists \alpha \in A (x \in \alpha) \wedge \exists \beta \in B (y \in \beta), \\ & \quad \text{wtedy i tylko wtedy, gdy} & \quad \exists \alpha \in A \exists \beta \in B (x \in \alpha \wedge y \in \beta), \\ & \quad \text{wtedy i tylko wtedy, gdy} & \quad \exists \alpha \in A \exists \beta \in B \langle x, y \rangle \in \alpha \times \beta, \\ & \quad \text{wtedy i tylko wtedy, gdy} & \quad \langle x, y \rangle \in \bigcup \{ \alpha \times \beta \mid \alpha \in A \wedge \beta \in B \}. \end{aligned}$$

44: Definiujemy przez indukcję ciąg nieskończonych zbiorów $\mathbb{N}_i \subseteq \mathbb{N}$, zaczynając od $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N}$, w ten sposób, że liczby $n_i = \min \mathbb{N}_i$ będą tworzyły ciąg ostro rosnący: $n_0 < n_1 < \dots$. Załóżmy, że \mathbb{N}_i jest już określone i niech $X_i = \{n \in \mathbb{N}_i \mid \{n_i, n\} \in X\}$ oraz $Y_i = \{n \in \mathbb{N}_i \mid \{n_i, n\} \in Y\}$. Jako \mathbb{N}_{i+1} wybieramy ten ze zbiorów X_i, Y_i , który jest nieskończony (jeśli oba są nieskończone, to wybieramy X_i). Oczywiście $\mathbb{N}_j \subseteq \mathbb{N}_i$ dla $i < j$, skąd wynika, że dla każdego i albo wszystkie pary $\{n_i, n_j\}$ dla $i < j$ są w X , albo wszystkie są w Y . Zatem $\mathbb{N} = A_X \cup A_Y$, gdzie $A_X = \{n_i \mid \forall j (i < j \rightarrow \{n_i, n_j\} \in X)\}$ oraz $A_Y = \{n_i \mid \forall j (i < j \rightarrow \{n_i, n_j\} \in Y)\}$. Jeden z tych dwóch zbiorów musi więc być nieskończony. Jest to szukany zbiór A .

55a: Zaczniemy od sprawdzenia, że relacja $r \cdot r^*$ jest przechodnia. Załóżmy, że $\langle x, y \rangle, \langle y, z \rangle \in r \cdot r^*$. Oznacza to, że $\langle x, u \rangle \in r, \langle u, y \rangle \in r^*, \langle y, v \rangle \in r, \langle v, z \rangle \in r^*$, dla pewnych u i v . Ale wtedy mamy $\langle u, z \rangle \in r^* \cdot r \cdot r^* \subseteq r^* \cdot r^* \cdot r^* \subseteq r^*$, bo relacja r^* jest przechodnia i zawiera r . Skoro $\langle x, y \rangle \in r$ oraz $\langle u, z \rangle \in r^*$, to $\langle x, z \rangle \in r \cdot r^*$.

Jeśli s jest relacją przechodnią zawierającą r , to $r \cdot r^* \subseteq s \cdot (s \cup \mathbf{1})$ bo $s \cup \mathbf{1}$ jest przechodnia i zwrotna. Ale $s \cdot (s \cup \mathbf{1}) \subseteq s$ (zadanie 51), więc $r \cdot r^* \subseteq s$. A więc $r \cdot r^*$ jest najmniejszą relacją przechodnią zawierającą r . Dowód równości $r^+ = r^* \cdot r$ jest analogiczny.

55b: Relacja $r^+ \cup \mathbf{1}_A$ jest przechodnia i zwrotna, i stąd wynika inkluzja z lewej do prawej. Druga inkluzja bierze się z tego, że r^* jest przechodnia i zawiera identyfikację.

56: Należy przyjąć $x r y$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\{x, y\} \in \mathcal{A}$.

57a: Nie. Niech $A = \{0, 1\}$ i niech $r_1 = \{\langle 0, 1 \rangle\}, r_2 = \{\langle 1, 0 \rangle\}$. Relacje r_1 i r_2 są przeciwzwrotne, ale ich złożenie $r_1 \cdot r_2 = \{\langle 0, 0 \rangle\}$ nie jest.

57b: Tak. Niech \mathcal{R} będzie niepustą rodziną relacji przeciwzwrotnych. Przypuśćmy, że $\langle a, a \rangle \in \bigcap \mathcal{R}$ dla pewnego a . Z definicji iloczynu uogólnionego wynika, że dla każdego $r \in \mathcal{R}$ zachodzi $a r a$. Ponieważ rodzina \mathcal{R} jest niepusta, więc $a r a$ dla co najmniej jednej relacji $r \in \mathcal{R}$. Ta relacja jest przeciwzwrotna, więc mamy sprzeczność.

57c: Tak. Niech \mathcal{R} będzie rodziną relacji przeciwzwrotnych. Przypuśćmy, że $\langle a, a \rangle \in \bigcap \mathcal{R}$. Wtedy istnieje takie $r \in \mathcal{R}$, że $\langle a, a \rangle \in r$. Zatem r nie jest relacją przeciwzwrotną. Sprzeczność.

58a: Nie. Relacje $r_1 = \{\langle 3, 2 \rangle, \langle 3, 4 \rangle, \langle 1, 6 \rangle\}$ i $r_2 = \{\langle 2, 1 \rangle, \langle 4, 5 \rangle, \langle 6, 5 \rangle\}$ są krzaczaste, ale ich złożenie $r_1 \cdot r_2 = \{\langle 3, 1 \rangle, \langle 3, 5 \rangle, \langle 1, 5 \rangle\}$ nie jest relacją krzaczastą.

58b: Tak. Niech \mathcal{R} będzie dowolną niepustą rodziną relacji krzaczastych i niech $a, b, c \in A$ będą takie, że $\langle a, b \rangle, \langle a, c \rangle \in \bigcap \mathcal{R}$. To oznacza, że dla każdej relacji $r \in \mathcal{R}$ zachodzi $a r b$ i $a r c$. Ponieważ r jest z założenia krzaczasta, to $\neg b r c$ i $\neg c r b$. Zatem $\langle b, c \rangle$ i $\langle c, b \rangle$ nie należą do żadnej relacji $r \in \mathcal{R}$, z czego wynika, że $\langle b, c \rangle, \langle c, b \rangle \notin \bigcap \mathcal{R}$.

58c: Nie. Na przykład relacje $r_1 = \{\langle 3, 1 \rangle, \langle 3, 2 \rangle\}$ i $r_2 = \{\langle 2, 1 \rangle\}$ w zbiorze $\{1, 2, 3\}$ są krzaczaste, ale ich suma $r_1 \cup r_2 = \{\langle 3, 1 \rangle, \langle 3, 2 \rangle, \langle 2, 1 \rangle\}$ nie jest relacją krzaczastą.

58d: Tak. Niech $a, b, c \in A$ będą takie, że $\langle a, b \rangle, \langle a, c \rangle \in \bigcup_{i \in \mathbb{N}} r_i$ i przypuśćmy że $\langle b, c \rangle \in \bigcup_{i \in \mathbb{N}} r_i$. Z definicji sumy uogólnionej istnieją takie $i, j, k \in \mathbb{N}$, że $a r_i b, a r_j c$ i $b r_k c$. Niech $m = \max(i, j, k)$.

Ponieważ relacje r_i dla $i \in \mathbb{N}$ tworzą ciąg wstępujący, to $ar_m b$, $ar_m c$ i $br_m c$. Zatem r_m nie jest relacją krzaczastą – sprzeczność. Podobnie wyprowadzimy sprzeczność z założenia $\langle c, b \rangle \in \bigcup_{i \in \mathbb{N}} r_i$.

69: Niech $A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ i niech $A \neq B$, np. $m \in A - B$. Istnieje dokładnie jedna taka para $\langle n, i \rangle$, że $m = \alpha(n, i)$. Wtedy $i \in g(A)(n)$ oraz $i \notin g(B)(n)$. Zatem $g(A)(n) \neq g(B)(n)$, a stąd $g(A) \neq g(B)$. Funkcja g jest więc różnowartościowa.

Funkcja g jest też „na” $\mathbb{N} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Jeśli bowiem $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$, to dla $A = \{\alpha(n, i) \mid i \in \varphi(n)\}$ mamy $g(A)(n) = \{i \in \mathbb{N} \mid \alpha(n, i) \in A\} = \{i \in \mathbb{N} \mid i \in \varphi(n)\} = \varphi(n)$. A więc $g(A) = \varphi$.

70: Załóżmy przeciwnie, że dla każdego n istnieje taki zbiór $C_n \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$, że $C_n \neq f(n)$ dla wszystkich n i wszystkich $f \in \mathcal{F}_n$. Jeśli $f = \lambda n. C_n$ to $f \in \mathcal{F}_m$ dla pewnego m . Wtedy $C_m = f(m)$, sprzeczność.

71: Sprawdzimy, że podane warunki są spełnione przez funkcje:

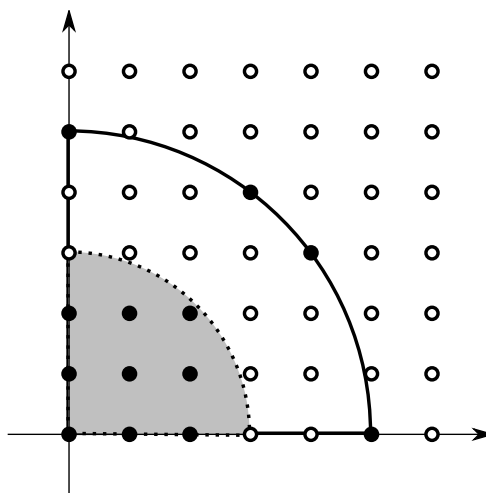
$$f(n) = \begin{cases} k & \text{dla } n \text{ postaci } 2k \\ k & \text{dla } n \text{ postaci } 2k+1 \end{cases} \quad g(n) = \begin{cases} 2k+1 & \text{dla } n \text{ postaci } 2k \\ 2k & \text{dla } n \text{ postaci } 2k+1 \end{cases}$$

(a) Liczby x i $g(x)$ mają zawsze inną parzystość, zatem $g(x) \neq x$. (b) Dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$ mamy $g(g(2k)) = g(2k+1) = 2k$, i $g(g(2k+1)) = g(2k) = 2k+1$. A więc zawsze $g(g(x)) = x$. (c) Dla $k \in \mathbb{N}$ zachodzą równości $f(g(2k)) = f(2k+1) = k = f(2k)$ oraz $f(g(2k+1)) = f(2k) = k = f(2k+1)$. Zatem $f \circ g = f$. (d) Dla każdego $n \in \mathbb{N}$ mamy $f(2n) = n$, więc f jest na \mathbb{N} . (e) Obraz zbioru wszystkich liczb parzystych w odwzorowaniu g to zbiór $\{g(n) \mid n \text{ parzyste}\}$. Aby wykazać, że jest to zbiór liczb nieparzystych, zauważmy, że (i) jeśli $n = 2k$ to $g(n) = 2k+1$ jest nieparzyste; (ii) jeśli $m = 2k+1$ jest nieparzyste, to $g(2k) = m$.

72a: Obrazem jest odcinek $B = [2, 5]$. Najpierw pokażemy, że $f(A) \subseteq B$. Jeśli $\langle x, y \rangle \in A$, to $2 \leq x \leq 4$ oraz $-1 \leq y \leq 3$, zatem $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} \geq \sqrt{4 + 0} = 2$ i $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} \leq \sqrt{16 + 9} = 5$. Stąd wartość funkcji $f(x, y)$ dla $\langle x, y \rangle \in A$ jest zawsze elementem $[2, 5]$.

Teraz pokażemy, że $B \subseteq f(A)$, tj. dla każdego $z \in B$ istnieje takie $\langle x, y \rangle \in A$, że $f(x, y) = z$. Dla $z \leq 4$ bierzemy $x = z$, $y = 0$. Dla $z > 4$ bierzemy $x = 4$, $y = \sqrt{z^2 - 16}$. Łatwo sprawdzić, że w obu przypadkach $\langle x, y \rangle$ istotnie jest elementem zbioru A .

72b: Szukamy par $\langle x, y \rangle \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, dla których $f(x, y) \in (-3, 3) \cup \{5\}$. Kwadrat jest zawsze nieujemny, więc $f^{-1}((-3, 3) \cup \{5\}) = \{\langle x, y \rangle \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid (x^2 + y^2 < 9) \vee (x^2 + y^2 = 25)\}$, co w przecięciu z $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ daje zbiór $\{0, 1, 2\}^2 \cup \{\langle 3, 4 \rangle, \langle 4, 3 \rangle, \langle 0, 5 \rangle, \langle 5, 0 \rangle\}$ o 13 elementach. Rozwiązanie ilustruje rysunek 2. Jak wiadomo ze szkolnej geometrii, $f(x, y)$ to odległość punktu $\langle x, y \rangle$ od początku układu. Zatem interesują nas punkty (zaznaczone czarnymi kropkami), których odległość od $\langle 0, 0 \rangle$ jest mniejsza od 3 albo równa 5.



Rysunek 2: Zadanie 72b.

73a: Nie. Na przykład $f(\emptyset) = f(\{\langle 0, 0 \rangle\}) = \emptyset$.

73b: Tak. Dla $X \subseteq \mathbb{N}$ określimy taką relację r_X , że $f(r_X) = X$. Dla każdego $i \in X$ do relacji r_X należą pary $\langle 0, p_i \rangle, \langle p_i, p_i^2 \rangle, \dots, \langle p_i^i, p_i^{i+1} \rangle$, gdzie p_i to i -ta liczba pierwsza. Wtedy $\langle 0, p_i^{i+1} \rangle \in r^i$ oraz dla żadnego n nie zachodzi ani $\langle n, 0 \rangle \in r$ ani $\langle p_i^{i+1}, n \rangle$. Zatem $i \in X$ wtedy i tylko wtedy, gdy $i \in f(r_X)$.

73a: Tak. Relacja $r = \{\langle 0, 1 \rangle, \langle 0, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 3, 3 \rangle\}$ nie jest przechodnia (bo $\langle 0, 3 \rangle \notin r$) oraz $f(r) = \{0\}$

74: Niech $h(x) = c(f^{-1}(\{g(x)\}))$, dla $x \in A$. Wtedy $h(x) \in f^{-1}(\{g(x)\})$, czyli $f(h(x)) \in \{g(x)\}$, dla każdego x . A więc $f \circ h = g$.

115: Funkcja F jest na $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, bo każdy podzbiór $A \subseteq \mathbb{N}$ jest postaci $F(x)$, gdzie x jest ciągiem stałe równym A . Ale nie jest różnowartościowa, bo np. $F(x) = F(y)$ dla ciągu stałego $x(i) = \mathbb{N}$ i ciągu

$$y(i) = \begin{cases} \mathbb{N}, & \text{jeśli } i \text{ jest parzyste;} \\ \emptyset, & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Dla $A = \emptyset$, jedyny ciąg x spełniający warunek $F(x) = \emptyset$ to ciąg stały $x(i) = \emptyset$. Zatem $F^{-1}(\{\emptyset\})$ jest jednoelementowy. Natomiast jeśli $A \neq \emptyset$ to $F^{-1}(\{A\})$ musi być nieskończony. Do tego przeciwobrazu należą bowiem wszystkie funkcje y_k postaci

$$y_k(i) = \begin{cases} A, & \text{jeśli } i = k; \\ \emptyset, & \text{jeśli } i \neq k, \end{cases}$$

gdzie k jest dowolną liczbą naturalną. A więc nie istnieje taki zbiór $A \subseteq \mathbb{N}$, że $F^{-1}(\{A\})$ ma dokładnie cztery elementy.

116a: Przykładem funkcji $f: \mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$, która dla żadnego T nie jest postaci $\Phi(T)$, jest

$$f(A) = \begin{cases} \mathbb{N}, & \text{jeśli } A = \emptyset; \\ \emptyset, & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

116b: Jeśli $T = \{\{\{x\}, x\} \mid x \in \mathbb{N}\}$, to $\Phi(T) = \text{id}_{\mathcal{P}(\mathbb{N})}$, bo wtedy

$$\Phi(T)(a) = \{x \in \mathbb{N} \mid \{x\} \subseteq a\} = \{x \in \mathbb{N} \mid x \in a\} = a.$$

Aby uzyskać funkcję stałą musimy przyjąć $T = \{\{\emptyset, x\} \mid x \in A\}$, dla wybranego A . Wtedy

$$\Phi(T)(a) = \{x \in \mathbb{N} \mid x \in A\} = A.$$

116c: Przypuśćmy, że $\Phi(T) = \Phi(S)$ i przy tym $T \neq S$, na przykład $\langle a, x \rangle \in T - S$. Skoro x należy do $\Phi(T)(a) = \Phi(S)(a)$, to $\langle b, x \rangle \in S$ dla pewnego $b \subseteq a$. Stąd $x \in \Phi(S)(b) = \Phi(T)(b)$, więc jest takie $c \subseteq b$, że $\langle c, x \rangle \in T$. Wtedy $c \subseteq a$, więc $c = a$. Zatem $\langle a, x \rangle = \langle c, x \rangle \in S$ i mamy sprzeczność.

117: Niech $f(0) = 0$ oraz $f(n) = n - 1$, gdy $n > 0$. Jeśli teraz $X = \{0\}$, to mamy $g(i) = f^{-i}(\{0\}) = \{n \mid f^i(n) = 0\} = \{0, \dots, i\}$. A zatem $g(i) \neq g(j)$, dla $i \neq j$.

119: Funkcja ϕ nie jest różnowartościowa. Jeśli np. $f(x) = x + 1$ dla $x \in \mathbb{R}$, to $\phi(\text{id}_{\mathbb{R}}) = \phi(f) = \mathbb{I}\mathbb{Q}$. Ale $\phi: \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \xrightarrow{\text{na}} \mathcal{P}(\mathbb{R})$, bo dla dowolnego $B \subseteq \mathbb{R}$ zachodzi $B = \phi(f)$, gdzie

$$f(x) = \begin{cases} \pi, & \text{jeśli } x \in B, \\ 0, & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

120a: Jeśli $n = 0$ to relacja $\varphi(n) = \{\langle 0, n \rangle \mid n \in \mathbb{N}\}$ jest przechodnia, bo przypadek $\langle x, y \rangle, \langle y, z \rangle \in \varphi(n)$ zachodzi tylko wtedy, gdy $x = y = 0$. Jeśli jednak $n \neq 0$, to mamy $\langle 0, n \rangle, \langle n, n + 1 \rangle \in \varphi(n)$, ale $\langle 0, n + 1 \rangle \notin \varphi(n)$, więc $\varphi(n)$ nie jest przechodnia. Zatem $\varphi^{-1}(T) = \{n \mid \varphi(n) \text{ jest przechodnia}\} = \{0\}$.

120b: Tak, bo $\bigcup \varphi(\mathbb{N})$ to relacja zwykłego porządku \leq w \mathbb{N} . Istotnie, jeśli $\langle x, y \rangle \in \bigcup \varphi(\mathbb{N})$, to dla pewnego n mamy $\langle x, y \rangle \in \varphi(n)$, a więc albo $x \leq y = n$ albo $x = n \leq y$. Na odwrót, jeśli $x \leq y$, to $\langle x, y \rangle \in \varphi(y) \in \varphi(\mathbb{N})$, więc $\langle x, y \rangle \in \bigcup \varphi(\mathbb{N})$.

121a: Dla dowolnego n , przypadek $\langle x, y \rangle, \langle y, z \rangle \in \varphi(n)$ zachodzi w jednej z trzech sytuacji:

1. $x = n, y = n, n \leq z \leq 2n$;
2. $n \leq x \leq 2n, y = 2n, z = 2n$;
3. $x = n, n \leq y \leq 2n$ i $z = 2n$.

W dwóch pierwszych przypadkach to, że $\langle x, z \rangle \in \varphi(n)$ jest oczywiste, w trzecim również, ponieważ $\langle n, 2n \rangle \in \varphi(n)$. A więc relacja $\varphi(n)$ jest przechodnia. Zatem przeciwobraz T to \mathbb{N} .

121b: Nie, bo $\langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle \in \bigcup \varphi(\mathbb{N})$ (ponieważ $\langle 1, 2 \rangle \in \varphi(1)$ i $\langle 2, 3 \rangle \in \varphi(2)$), ale $\langle 1, 3 \rangle \notin \bigcup \varphi(\mathbb{N})$. Istotnie, gdyby tak było, to $\langle 1, 3 \rangle \in \varphi(n)$, dla pewnego n . Wtedy albo $n = 1$ i $3 \leq 2$, albo $3 = 2n$, a tak jedno jak i drugie jest niemożliwe.

122a: Nie, bo obraz niepustego zbioru \mathcal{P} musi być niepusty, więc $\emptyset \notin \text{Rg}(\varphi)$.

122b: Nie, bo $f(\mathcal{P}) = g(\mathcal{P}) = \mathcal{P}$, gdy $f = \text{id}_{\mathbb{N}}$ oraz $g = \lambda n$. if $n \in \mathcal{P}$ then n else 0.

122c: Na początek zauważmy, że $f \in C$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\varphi(f) = f(\mathcal{P}) \in \mathcal{P}(\mathcal{P})$, czyli gdy dla wszystkich $p \in \mathcal{P}$ zachodzi $f(p) \in \mathcal{P}$. Niech teraz $h \in C \bullet C$. Wtedy $h = f \circ g$ dla pewnych $f, g \in C$ i dla każdego $p \in \mathcal{P}$ mamy $g(p) \in \mathcal{P}$, a więc też $h(p) = f(g(p)) \in \mathcal{P}$. Stąd $h \in C$. Na odwrót, jeśli $h \in C$, to $h = h \circ \text{id}_{\mathbb{N}} \in C \bullet C$, bo oczywiście $\text{id}_{\mathbb{N}} \in C$.

146a: Tak. Jeśli $Z \neq Y$, na przykład $Z \not\subseteq Y$, to istnieje element $z \in Z$, który nie należy do Y . Wtedy $\{z\}R_Z \emptyset$, ale $\{\{z\}, \emptyset\} \notin R_Y$. Zatem $R_Z \neq R_Y$.

146b: Nie. Zauważmy bowiem, że klasa abstrakcji $[Z]_{R_Z}$ to zawsze zbiór $\mathcal{P}(Z)$. Mamy bowiem $\langle X, Z \rangle \in R_Z$ wtedy i tylko wtedy, gdy $X \cup Z = Z$, czyli gdy $X \subseteq Z$. Rozpatrzmy teraz podział zbioru $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ na dwie składowe: jedna z nich to zbiór $\{\emptyset, \{0\}, \{1\}\}$ a do drugiej należą wszystkie pozostałe podzbiory \mathbb{N} . Relacja równoważności wyznaczona przez ten podział nie jest postaci R_Z (a więc nie jest wartością funkcji f), bo żaden ze zbiorów naszego podziału nie jest postaci $\mathcal{P}(Z)$. Pierwszy dlatego, że ma 3 elementy, drugi dlatego, że nie należy do niego zbiór pusty.

151a: Symetria: Oczywiście. Zwrotność: Jeśli x jest parzyste to $x - x = 0$, a zero jest podzielne przez k . Jeśli zaś x jest nieparzyste, to $x \cdot x \geq 0$, przy czym nierówność jest ostra bo $x \neq 0$.

Przechodność: Niech $\langle x, y \rangle, \langle y, z \rangle \in \rho_k$. Wtedy x i z muszą być tej samej parzystości co y . Zatem wszystkie trzy liczby są parzyste albo wszystkie trzy są nieparzyste. W pierwszym przypadku mamy $x - z = (x - y) + (y - z)$. Suma liczb podzielnych przez k jest podzielna przez k , więc $\langle x, z \rangle \in \rho_k$. W drugim przypadku $x \cdot z = (x \cdot y) \cdot (y \cdot z) \cdot \frac{1}{y^2} > 0$ i też dobrze.

151b: Wszystkie klasy abstrakcji naszej relacji są nieskończone. Jeśli a jest liczbą nieparzystą, to $[a]_{\rho_k} = \{b \in \mathbb{Z} \mid b > 0\}$ albo $[a]_{\rho_k} = \{b \in \mathbb{Z} \mid b < 0\}$. A jeśli a jest parzyste, to wtedy mamy $[a]_{\rho_k} = \{a + nk \mid n \in \mathbb{Z} \text{ i } nk \text{ jest parzyste}\}$. A więc nie ma klasy k -elementowej.

151c: Jeśli $k = 4$ to mamy 4 klasy abstrakcji:

- Klasę liczb nieparzystych dodatnich;
- Klasę liczb nieparzystych ujemnych;
- Klasę liczb podzielnych przez 4;
- Klasę liczb parzystych niepodzielnych przez 4.

W przypadku $k = 3$ jest pięć klas:

- Klasa liczb nieparzystych dodatnich;
- Klasa liczb nieparzystych ujemnych;
- Klasa liczb parzystych podzielnych przez 3;
- Klasa liczb parzystych dających resztę 1 z dzielenia przez 3;
- Klasa liczb parzystych dających resztę 2 z dzielenia przez 3.

152: Żadna z tych relacji nie jest relacją równoważności, bo żadna nie jest zwrotna. Z zadania 119 wynika, że $\phi(f) = \emptyset$ dla pewnej funkcji f . Wtedy oczywiście $\langle f, f \rangle \notin r$. Mamy też $\phi(f) \times \phi(f) = \emptyset$, a skoro zbiór pusty nie jest relacją równoważności w \mathbb{R} , to $\langle f, f \rangle \notin s$.

153a: Nie. Jeśli $\text{id}_{\mathbb{N}} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ jest funkcją identycznościową to zawsze $\Phi(\text{id}_{\mathbb{N}})(A) = A$. Ale dla funkcji następnika s mamy także $\Phi(s)(A) = A$, dla dowolnego A . Istotnie,

$$\begin{aligned} \Phi(s)(A) &= f^{-1}(\{s(n) \mid n \in A\}) = \{m \in \mathbb{N} \mid \exists n \in A (s(m) = s(n))\} = \\ &= \{m \in \mathbb{N} \mid \exists n \in A (m = n)\} = A. \end{aligned}$$

A więc $\Phi(\text{id}_{\mathbb{N}}) = \Phi(s)$, chociaż $\text{id}_{\mathbb{N}} \neq s$.

153b: Nie. Nietrudno zauważyć, że jeśli $A \neq \emptyset$, to także $f^{-1}(f(A)) \neq \emptyset$. Zatem na przykład funkcja stała $F : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$, określona warunkiem $F(A) = \emptyset$, nie jest wartością funkcji Φ .

153c: Zauważmy, że $\Phi^{-1}(\{\text{id}_{\mathcal{P}(\mathbb{N})}\}) = \{f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \mid \forall A \subseteq \mathbb{N} (f^{-1}(f(A)) = A)\}$. Natomiast warunek $\forall A \subseteq \mathbb{N} (f^{-1}(f(A)) = A)$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy f jest funkcją różnowartościową. Mamy bowiem $f^{-1}(f(A)) = \{m \in \mathbb{N} \mid \exists n \in A (f(n) = f(m))\}$. Dla różnowartościowej funkcji f , równość $f(n) = f(m)$ zachodzi tylko dla $n = m$ i mamy

$$f^{-1}(f(A)) = \{m \in \mathbb{N} \mid \exists n \in A (n = m)\} = A.$$

W przeciwnym razie $f(n) = f(m)$ dla pewnych $n \neq m$, więc $\{n\} \subsetneq \{n, m\} \subseteq f^{-1}(f(\{n\}))$. A zatem $\Phi^{-1}(\{\text{id}_{\mathbb{P}(\mathbb{N})}\})$ to zbiór wszystkich funkcji różnowartościowych z \mathbb{N} do \mathbb{N} .

153d: Na początek zauważmy, że $n \in \Phi(f)(A)$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $f(n) \in f(A)$, czyli gdy $f(n) = f(m)$ dla pewnego $m \in A$. Przyjmując więc $r = \{\langle x, y \rangle \mid f(x) = f(y)\}$, łatwo otrzymujemy równoważność $n \in \Phi(f)(A) \Leftrightarrow \exists m \in A (n \in [m]_r)$, z której natychmiast wynika teza.

155a: Aby wykazać, że F jest różnowartościowa, załóżmy, że $F(R) = F(S)$ dla pewnych relacji R i S , i przypuśćmy, że mRn . Wtedy $F(R)(m, n) = |m - m| = 0$, bo zachodzi $mRm \wedge mRn$. A zatem $F(S)(m, n) = 0$, co oznacza, że istnieją takie x, y , że $|x - y| = 0$ oraz $mSx \wedge ySn$. Wtedy $x = y$, a zatem mSn z przechodniości. Pokazaliśmy więc, że $R \subseteq S$. Podobnie $S \subseteq R$, co oznacza, że $R = S$. Funkcja F nie jest surjekcją, ponieważ dla dowolnego $R \in \mathcal{R}$ i dowolnego $n \in \mathbb{N}$ mamy zawsze $F(R)(n, n) = 0$. Zatem np. funkcja stale równa 7 nie należy do $\text{Rg}(F)$.

155(b)i: Przeciwobraz zbioru wszystkich funkcji stałych jest niepusty, bo $F(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$ jest funkcją stale równą zero.

155(b)ii: Przeciwobraz zbioru wszystkich funkcji różnowartościowych jest pusty. Żadna funkcja $F(R)$ nie jest różnowartościowa, bo zawsze $F(R)(2, 3) = F(R)(3, 2)$.

155(b)iii: Przeciwobraz zbioru wszystkich surjekcji jest niepusty, bo jeśli $\Delta_{\mathbb{N}}$ jest relacją identycznościową to $F(\Delta_{\mathbb{N}})(m, 0) = |m - 0| = m$, dla dowolnego $m \in \mathbb{N}$, a więc $F(\Delta_{\mathbb{N}})$ jest na \mathbb{N} .

156a: Relacja r jest jądrem przekształcenia $\lambda f. f(\mathbb{N})$.

156b: Funkcja stale równa 1 to jedyna funkcja, której zbiorem wartości jest $\{1\}$. Zatem $[\lambda x 1]_r = \{\lambda x 1\}$. Natomiast $\text{id}_{\mathbb{N}}(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$, więc $[\text{id}_{\mathbb{N}}]_r$ to zbiór wszystkich funkcji na \mathbb{N} .

156c: Nie, bo np. funkcja $\lambda n 2n$ jest różnowartościowa a nie jest w relacji z $\text{id}_{\mathbb{N}}$.

156d: Przypuśćmy, że $[f]_r = \{f, g\}$ dla pewnych $f \neq g$. Wtedy $f(n) \neq g(n)$, dla pewnego n , przypuśćmy więc, że $f(n) = a$ i $g(n) = b$, przy tym $a \neq b$. Dla pewnego m mamy też $f(m) = b$. Weźmy teraz takie k , że $k \neq m, n$, na przykład $k = m + n + 1$. Określmy nową funkcję $h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$. Jeżeli $f(k) = a$, to niech $h(m) = a$, $h(k) = b$. Jeżeli $f(k) = b$, to niech $h(m) = b$, $h(k) = a$. Jeżeli natomiast $f(k) \neq a, b$ to przyjmijmy $h(m) = f(k)$ i $h(k) = b$. Dla pozostałych $x \in \mathbb{N}$ niech $h(x) = f(x)$. Wtedy $h(\mathbb{N}) = f(\mathbb{N})$ oraz w każdym przypadku $h(y) \neq f(y)$ dla przynajmniej jednego y . Na dodatek $h(n) \neq g(n)$, więc $h \neq f, g$ i $h \in [f]_r$. A zatem nasza klasa ma trzeci element.

156e: Oczywiście nie, bo jest nieskończenie wiele podzbiorów \mathbb{N} .

157a: Relacja r jest jądrem przekształcenia $\lambda f. f^{-1}(\text{Parz})$.

157b: Ponieważ $(\lambda x 2)^{-1}(\text{Parz}) = \{y : \mathbb{N} \mid 2 \in \text{Parz}\} = \mathbb{N}$, więc klasa $[\lambda x 2]_r$ składa się ze wszystkich tych funkcji g , które przyjmują wyłącznie wartości parzyste:

$$[\lambda x 2]_r = \{g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \mid g^{-1}(\text{Parz}) = \mathbb{N}\} = \{g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \mid \forall n : \mathbb{N}. g(n) \in \text{Parz}\}.$$

Ponieważ $\text{id}_{\mathbb{N}}^{-1}(\text{Parz}) = \{n : \mathbb{N} \mid n \in \text{Parz}\} = \text{Parz}$, więc klasa $[\text{id}_{\mathbb{N}}]_r$ składa się ze wszystkich funkcji, które przyjmują wartości parzyste dla parzystych argumentów i nieparzyste dla nieparzystych:

$$[\text{id}_{\mathbb{N}}]_r = \{g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \mid g^{-1}(\text{Parz}) = \text{Parz}\} = \{g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \mid \forall n : \mathbb{N} (n \in \text{Parz} \iff g(n) \in \text{Parz})\}.$$

157c: Nie, bo funkcja f , która każdej liczbie parzystej x przypisuje $x + 1$, a każdej nieparzystej y przypisuje $y - 1$, jest „na”, ale nie jest w relacji z $\text{id}_{\mathbb{N}}$. Istotnie, $f^{-1}(\text{Parz}) = \mathbb{N} - \text{Parz}$ i $\text{id}_{\mathbb{N}}^{-1}(\text{Parz}) = \text{Parz}$.

157d: Niech $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ będzie dowolną funkcją i niech $f' : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ będzie takie, że $f'(0) = f(0) + 2$ oraz $f'(x) = f(x)$ dla $x \neq 0$. Wtedy $f \neq f'$ ale przeciwobrazy zbioru Parz przy f i przy f' są takie same, czyli $f r f'$. A więc każda klasa ma co najmniej dwa elementy.

158a: Zwrotność i symetria wynikają wprost z definicji, zatem wystarczy pokazać, że r jest przechodnia. Zauważmy, że dla dowolnych n, m zachodzi równość

$$f^n \circ g^m = g^m \circ f^n. \quad (1)$$

Załóżmy, że $\langle x, y \rangle \in r$ i $\langle y, z \rangle \in r$. Wtedy istnieją takie n_1, m_1, n_2 i m_2 , że:

$$f^{n_1}(g^{m_1}(x)) = f^{n_1}(g^{m_1}(y)) \quad (2)$$

$$f^{n_2}(g^{m_2}(y)) = f^{n_2}(g^{m_2}(z)). \quad (3)$$

Mamy więc następujące równości:

$$\begin{aligned}
& f^{n_1+n_2}(g^{m_1+m_2}(x)) \\
= & f^{n_2}(g^{m_2}(f^{n_1}(g^{m_1}(x)))) \quad (1) \\
= & f^{n_2}(g^{m_2}(f^{n_1}(g^{m_1}(y)))) \quad (2) \\
= & f^{n_1}(g^{m_1}(f^{n_2}(g^{m_2}(y)))) \quad (1) \\
= & f^{n_1}(g^{m_1}(f^{n_2}(g^{m_2}(z)))) \quad (3) \\
= & f^{n_1+n_2}(g^{m_1+m_2}(z)) \quad (1)
\end{aligned}$$

Wynika stąd, że $\langle x, z \rangle \in r$. Zatem r jest przechodnia.

158b: Załóżmy, że $r = \mathbf{1}_A$. Pokażemy, że f i g są różnowartościowe. Dla dowolnych $x, y \in A$, jeśli $f(x) = f(y)$, to $\langle x, y \rangle \in r$ i musi zachodzić $x = y$, bo $r = \mathbf{1}_A$. Zatem f jest różnowartościowa. Analogicznie g jest również różnowartościowa.

Dla dowodu w przeciwną stronę założmy, że f i g są różnowartościowe. Zauważmy, że wtedy wszystkie złożenia postaci $f^n \circ g^m$ też są różnowartościowe. Pokażemy, że $r = \mathbf{1}_A$. Niech $\langle x, y \rangle \in r$. Istnieją wtedy takie n i m , że $f^n(g^m(x)) = f^n(g^m(y))$. Wynika stąd, że $x = y$. Dowodzi to, że jeśli $\langle x, y \rangle \in r$, to $x = y$. Zatem $r = \mathbf{1}_A$.

158c: Niech $g = \text{id}_{\mathbb{N}}$ i niech f będzie określona następująco:

$$f(n) = \begin{cases} p, & \text{jeśli } n = p^k, \text{ gdzie } p \text{ jest liczbą pierwszą i } k \in \mathbb{N} - \{0\}; \\ n, & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Oczywiście $f \circ g = g \circ f$. Zauważmy, że jeśli p jest liczbą pierwszą i $k_1, k_2 \in \mathbb{N} - \{0\}$, to $\langle p^{k_1}, p^{k_2} \rangle \in r$. Wynika stąd, że klasa abstrakcji $[p]_r$ dla liczby pierwszej p jest nieskończona.

Jeśli p_1 i p_2 są różnymi liczbami pierwszymi, to $\langle p_1, p_2 \rangle \notin r$, czyli $[p_1]_r \neq [p_2]_r$. Ponieważ istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych, więc r ma nieskończenie wiele nieskończonych klas abstrakcji.

159a: Zwrotność wynika wprost z definicji a symetria wynika z symetryczności relacji s . Pozostaje udowodnić przechodność. Z założenia

$$\forall x y z [x r y \wedge x r z \Rightarrow y r z], \quad (1)$$

wynika, że relacja r ma takie własności:

$$x r y \Rightarrow y r y \quad (\text{stosujemy (1) dla } z = y) \quad (2)$$

$$x_0 r x_1 r x_2 \Rightarrow x_2 r x_1 \quad (\text{stosujemy (1) do } r(x_1, x_2) \text{ i } r(x_1, x_1)) \quad (3)$$

$$x_0 r x_1 r x_2 r x_3 \Rightarrow x_1 r x_3 \quad (\text{stosujemy (1) do } r(x_2, x_1) \text{ i } r(x_2, x_3)). \quad (4)$$

Aby wykazać przechodność relacji $\mathbf{1}_A \cup (s \cdot s \cdot s)$ udowodnimy, że $s \cdot s \cdot s \cdot s \subseteq s \cdot s \cdot s$. Zapiszmy $x r y$ jako $x \longrightarrow y$, a $x r^{-1} y$ jako $x \longleftarrow y$. Niech $x_0 s x_1 s x_2 s x_3 s x_4$. Wtedy x_0 jest połączony z x_4 ciągiem czterech strzałek. Z (3) wynika, że jeśli w tym ciągu są trzy kolejne strzałki w tę samą stronę, to $\langle x_0, x_4 \rangle \in s \cdot s \cdot s$. W przeciwnym przypadku, jeśli we wspomnianym ciągu jest zmiana kierunku strzałek postaci $\longleftarrow \longrightarrow$, to z (1) wynika, że $\langle x_0, x_4 \rangle \in s \cdot s \cdot s$. Zostaje jeden przypadek nierozpatrzony postaci $\longrightarrow \longrightarrow \longleftarrow \longleftarrow$. Ale wtedy drugą strzałkę można odwrócić przy użyciu (2).

159b: Załóżmy, że r jest przechodnia. Wtedy r^{-1} jest również przechodnia. Zauważmy, że jeśli $x r y r z$ lub $x r^{-1} y r^{-1} z$ lub $x r^{-1} y r z$ to $x s z$. Z tego łatwo wynika, że $s \cdot s \cdot s \subseteq s \cdot s$. Zatem $\mathbf{1}_A \cup (s \cdot s)$ jest przechodnia. Zwrotność i symetria jak w zadaniu 159a.

159c: Załóżmy, że r jest symetryczna. Jeśli $x s y s z$, to $x r y r z$ i zatem $x r z$ (1). Wynika stąd, że relacja $\mathbf{1}_A \cup s$ jest przechodnia. Zwrotność i symetria jak w zadaniu 159a.

160a: Udowodnimy tezę przez indukcję ze względu na m . Inaczej mówiąc udowodnimy, że każde $m \in \mathbb{N}$ ma własność $\forall k, l: \mathbb{N}. m + (k + l) = (m + k) + l$.

Po pierwsze, $0 + (k + l) = (k + l) = (0 + k) + l$, po drugie z warunku $m + (k + l) = (m + k) + l$ wynika $s(m) + (k + l) = s(m + (k + l)) = s((m + k) + l) = s(m + k) + l = (s(m) + k) + l$.

160b: Indukcja ze względu na m . Po pierwsze $0 + k = k$, a więc warunek $0 + k = 0$ oznacza, że $k = 0$. Po drugie równość $s(m) + k = s(m)$ implikuje $s(m + k) = s(m)$ (bo $s(m) + k = s(m + k)$). Zatem $m + k = m$, a więc $k = 0$ z założenia indukcyjnego.

160c: Gdyby $k + l = 0$ i $k \neq 0$, to $k = s(k')$, dla pewnego k' . Zatem $0 = k + l = s(k') + l = s(k' + l) \neq 0$, sprzeczność.

160d: Indukcja ze względu na m . Po pierwsze $0 + 0 = 0$ z definicji, po drugie $s(m) + 0 = s(m + 0) = s(m)$, wprost z założenia indukcyjnego.

160e: Indukcja ze względu na m . Po pierwsze $s(0) + k = s(0 + k) = s(k) = 0 + s(k)$. Po drugie, z równości $s(m) + k = m + s(k)$ wynika $s(s(m)) + k = s(s(m) + k) = s(m + s(k)) = s(m) + s(k)$.

160f: Indukcja ze względu na m . Dla $m = 0$ wynika natychmiast z części (d). Krok indukcyjny wynika z części (e): $s(m) + k = s(m + k) = s(k + m) = s(k) + m = k + s(m)$.

173: Skoro $A \sim B$, to istnieje bijekcja $f: A \xrightarrow[\text{na}]{1-1} B$. Zdefiniujemy $\varphi: P(A) \times P(B) \xrightarrow[\text{na}]{1-1} \{0, 1, 2, 3\}^A$:

$$\varphi(\langle X, Y \rangle)(a) = \begin{cases} 0 & \text{jeśli } a \notin X \text{ i } f(a) \notin Y, \\ 1 & \text{jeśli } a \in X \text{ i } f(a) \notin Y, \\ 2 & \text{jeśli } a \notin X \text{ i } f(a) \in Y, \\ 3 & \text{jeśli } a \in X \text{ i } f(a) \in Y. \end{cases}$$

Funkcja φ jest różnowartościowa, bo jeśli $\langle X, Y \rangle \neq \langle X', Y' \rangle$, to $X \neq X'$ lub $Y \neq Y'$. Przypuśćmy na przykład, że $X \neq X'$. Wtedy istnieje element a , który odróżnia X i X' , tzn. $a \in X - X'$ lub $a \in X' - X$. Przypuśćmy, że zachodzi $a \in X - X'$. Wtedy $\varphi(\langle X, Y \rangle)(a) \in \{1, 3\}$ i $\varphi(\langle X', Y' \rangle)(a) \in \{0, 2\}$, czyli $\varphi(\langle X, Y \rangle) \neq \varphi(\langle X', Y' \rangle)$. Pozostałe trzy przypadki są analogiczne.

Aby pokazać, że φ jest „na”, należy dla $h: A \rightarrow \{0, 1, 2, 3\}$ wskazać takie X, Y , że $\varphi(\langle X, Y \rangle) = h$. Pokażemy, że $X = h^{-1}(\{1, 3\})$, $Y = f(h^{-1}(\{2, 3\}))$ są dobre.

Weźmy $a \in A$. Przypuśćmy, że $h(a) = 0$. Wtedy oczywiście $h(a) \neq 1, 3$ oraz $h(a) \neq 2, 3$, więc $a \notin h^{-1}(\{1, 3\}) = X$ oraz $f(a) \notin f(h^{-1}(\{2, 3\})) = Y$. Zatem z definicji, $\varphi(\langle X, Y \rangle)(a) = 0$. Podobnie, jeśli $h(a) = 1$, to $a \in h^{-1}(\{1, 3\}) = X$ i $f(a) \notin f(h^{-1}(\{2, 3\})) = Y$, zatem $\varphi(\langle X, Y \rangle)(a) = 1$. Pozostałe dwa przypadki są analogiczne.

195: Niech \mathcal{C} oznacza zbiór wszystkich funkcji ciągłych z \mathbb{R} do \mathbb{R} . Rozpatrzmy przekształcenie $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{Q}}$ dane przez $F(f) = f|_{\mathbb{Q}}$. To przekształcenie jest różnowartościowe, bo każda liczba rzeczywista r jest granicą pewnego ciągu liczb wymiernych $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Jeśli więc funkcje f i g są ciągłe i $f_{\mathbb{Q}} = g_{\mathbb{Q}}$ to z równości $f(q_n) = g(q_n)$ dla $n \in \mathbb{N}$ wynika $f(r) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(q_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} g(q_n) = g(r)$. Ponieważ mocą zbioru $\mathbb{R}^{\mathbb{Q}}$ jest $\mathfrak{C}^{\aleph_0} = \mathfrak{C}$, więc $\overline{\mathcal{C}} \leq \mathfrak{C}$. Nierówność w przeciwną stronę jest oczywista (wystarczy ograniczyć się do funkcji stałych), więc $\overline{\mathcal{C}} = \mathfrak{C}$.

207: Każdemu wielomianowi f można przypisać funkcję $\alpha: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, która liczbie n przypisuje współczynnik wielomianu f przy x^n . A więc zbiór wszystkich wielomianów jest mocy co najwyżej takiej jak zbiór $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, czyli $\mathfrak{C}^{\aleph_0} = \mathfrak{C}$. Ponieważ zbiór wszystkich wielomianów stałych jest mocy \mathfrak{C} , więc zbiór wszystkich wielomianów jest też mocy \mathfrak{C} . Stąd od razu wynika, że każda klasa abstrakcji relacji r i zbiór wszystkich klas są mocy co najwyżej \mathfrak{C} .

Niech $f = a_n x^n + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$. Do klasy $[f]_r$ należą wszystkie wielomiany mające postać $f = a_n x^n + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + b$, gdzie b jest dowolną liczbą rzeczywistą. Zatem klasa $[f]_r$ jest co najmniej (a więc dokładnie) mocy \mathfrak{C} .

Dla $a \neq b$ wielomiany ax^3 i bx^3 nie są w relacji, bo ich różnica jest stopnia 3. Zatem zbiór klas abstrakcji też jest mocy \mathfrak{C} .

215: Tak, bo $2^4 = 4^2$.

217: Wskazówka: Koło otwarte plus dowolny podzbiór okręgu dają w sumie zbiór wypukły.

220: Ponieważ $(P(\mathbb{N}) \rightarrow \{\{0\}, \{1\}\}) \subseteq \mathcal{F}$, a zbiór $P(\mathbb{N}) \rightarrow \{\{0\}, \{1\}\}$ jest mocy $2^{\mathfrak{C}}$, więc $2^{\mathfrak{C}} \leq \overline{\overline{\mathcal{F}}}$. Nierówność w przeciwną stronę wynika z inkluzji $\mathcal{F} \subseteq (P(\mathbb{N}) \rightarrow P(\mathbb{N}))$, a zatem $\overline{\overline{\mathcal{F}}} = 2^{\mathfrak{C}}$.

221: Niech \mathcal{F} będzie rodziną wszystkich funkcji okresowych z \mathbb{Z} w $\{0, 1\}$. Rozważmy funkcje:

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{jeśli } x = kn \text{ dla pewnego } k \in \mathbb{Z}, \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku,} \end{cases}$$

Ewidentnie funkcje f_n , dla $n \in \mathbb{N}$, są parami różne, zatem rodzina \mathcal{F} jest nieskończona. Aby wykazać, że \mathcal{F} jest przeliczalna, określimy injekcję $\varphi: \mathcal{F} \xrightarrow{1-1} \{0, 1\}^*$, przyjmując $\varphi(f) = f(0)f(1)\dots f(k-1)$, gdzie k jest najmniejszą niezerową liczbą naturalną taką że $f(x) = f(x+k)$ dla wszystkich $x \in \mathbb{Z}$. Przypuśćmy, że $\varphi(f) = \varphi(g) = x_0 x_1 \dots x_{k-1}$. Wtedy $f(i) = x_i = g(i)$ dla $i \in \{0, 1, \dots, k-1\}$. Na mocy okresowości, dla $i \in \{0, 1, \dots, k-1\}$ i dowolnego $j \in \mathbb{Z}$ zachodzi

$$f(i+jk) = f(i+(j-1)k) = \dots = f(i) = g(i) = g(i+k) = g(i+2k) = \dots = g(i+jk).$$

Stąd, funkcje f i g przyjmują takie same wartości na liczbach całkowitych postaci $i+jk$ dla dowolnych

$i \in \{0, 1, \dots, k-1\}$, oraz $j \in \mathbb{Z}$. Pozostaje zauważyć, że każda liczba całkowita jest tej postaci, zatem funkcje f i g są w istocie równe.

222: Wskazówka: rozpatrzmy sumę $\bigcup\{\{A \in \mathcal{R} : \min A = k\} : k \in \mathbb{N}\}$.

223a: (a) Tak. (b) Wskazówka: gałęzie nieskończonego pełnego drzewa binarnego mają skończone części wspólne.

224: Wskazówka: Rozwiązać najpierw zadania 181 i 195.

226: Z zadania 69 wynika, że zbiór wszystkich funkcji z \mathbb{N} do $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ jest mocy continuum. Zatem zbiór \mathcal{R} funkcji różnowartościowych z \mathbb{N} do $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ jest mocy co najwyżej continuum.

Niech $F : (\mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}) \rightarrow \mathcal{R}$ będzie określona tak: $F(\alpha)(n) = \{\alpha(n), n+2\}$, dla $\alpha : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}$. Funkcja F jest dobrze określona, bo dla $m \neq n$ mamy $m+2 \notin F(\alpha)(n)$ a więc funkcje $F(\alpha)$ są różnowartościowe. Niech teraz $\alpha, \beta : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}$ i niech $\alpha \neq \beta$, tj. $\alpha(n) \neq \beta(n)$ dla pewnego n . Wtedy $\alpha(n) \in \{\alpha(n), n+2\}$, ale $\alpha(n) \notin \{\beta(n), n+2\}$, bo $\alpha(n) \neq \beta(n)$ oraz $\alpha(n) < n+2$. Zatem funkcja F jest różnowartościowa, a stąd moc zbioru \mathcal{R} jest co najmniej continuum. Z tw. Cantora-Bernsteina wnioskujemy, że $\overline{\mathcal{R}} = \mathfrak{C}$. Natomiast moc zbioru surjekcji z \mathbb{N} na $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ jest zero. Zbiór ten jest pusty, bo $\overline{\mathbb{N}} = \aleph_0 < \mathfrak{C} = \overline{\mathcal{P}(\mathbb{N})}$.

232: Wskazówka: zastosować metodę przekątniową.

234: Wskazówka: Przypuśćmy, że jest funkcja $f : A \cup B \xrightarrow{\text{na}} \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Jest takie x , że dla dowolnego y , punkt (x, y) nie należy do $f(A)$. Podobnie dla drugiej współrzędnej. Ostatecznie jest $(x, y) \notin f(A \cup B)$.

235: Wskazówka 1: Zauważyć, że $A \times B = \bigcup_{b \in B} A \times \{b\}$ i uogólnić zadanie 234.

Wskazówka 2: Jeśli $f : A \times B \xrightarrow{\text{na}} \mathbb{R}^B$, to $\mathbb{R} - \{f(a, b)(b) \mid a \in A\} \neq \emptyset$, dla dowolnego $b \in B$. Funkcja wyboru dla rodziny tych zbiorów nie należy do $\text{Rg}(f)$.

238: Zbiór F jest mocy $2^{\mathfrak{C}}$. Nierówność $\overline{F} \leq 2^{\mathfrak{C}}$ wynika stąd, że $F \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, a ten ostatni zbiór ma moc $\mathfrak{C}^{\mathfrak{C}} = 2^{\mathfrak{C}}$. Aby wykazać, że $\overline{F} \geq 2^{\mathfrak{C}}$, zauważmy najpierw, że zbiór $\mathbb{Q}^{\mathbb{R}-\mathbb{N}}$ jest także mocy $2^{\mathfrak{C}}$, bo $\overline{\mathbb{R} - \mathbb{N}} = \mathfrak{C}$. Funkcja $\xi : \mathbb{Q}^{\mathbb{R}-\mathbb{N}} \xrightarrow{1-1} F$ może zaś być określona warunkiem

$$\xi(f)(x) = \begin{cases} \pi, & \text{jeśli } x \in \mathbb{N}, \\ f(x), & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

239: Funkcja przypisująca każdej liczbie n jej klasę abstrakcji $[n]_r$ jest na $\mathbb{N} - \{0\}/r$, więc zbiór ilorazowy jest mocy co najwyżej \aleph_0 . Wystarczy więc sprawdzić, że nasz zbiór jest mocy co najmniej \aleph_0 , czyli że istnieje nieskończenie wiele klas abstrakcji. Tak jest, bo każda liczba pierwsza wyznacza inną klasę abstrakcji, więc zbiór klas abstrakcji relacji r jest mocy \aleph_0 .

240: Oczywiście $\overline{U} \leq \mathfrak{C}$ bo zbiór wszystkich funkcji z \mathbb{N} do \mathbb{N} jest mocy \mathfrak{C} . Zdefiniujemy teraz funkcję $F : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \rightarrow U$. Poniżej, $w_3(n)$ oznacza największe takie r , że n dzieli się przez 3^r .

$$F(f)(n) = \begin{cases} f(k), & \text{jeśli } n = 2k; \\ w_3(n), & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Funkcja F jest dobrze określona, tj. $F(f) \in U$ dla $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, bo dla dowolnego r istnieje nieskończenie wiele liczb nieparzystych, które w rozkładzie na czynniki pierwsze dają r trójek. Funkcja F jest też różnowartościowa, bo dla $f(k) \neq g(k)$ zachodzi $F(f)(2k) \neq F(g)(2k)$. A więc moc U jest co najmniej taka jak moc zbioru $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, z czego ostatecznie wynika $\overline{F} = \mathfrak{C}$.

241: Ponieważ $\mathbb{R} \sim (\mathbb{N} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N}))$, na mocy zadania 69, więc wystarczy udowodnić, że jeśli $\mathbb{N} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$ jest sumą postaci $\bigcup\{\mathcal{F}_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ to co najmniej jeden ze zbiorów \mathcal{F}_n jest mocy continuum. Wynika to natychmiast z zadania 70.

242: Zbiór A jest mocy 1, bo jeśli jednym ze składników podziału \mathbb{N} jest $\mathbb{N} - \{7\}$ to pozostałe składniki tworzą podział zbioru $\{7\}$. Oczywiście można to zrobić tylko na jeden sposób (bo składniki muszą być niepuste). Zbiór $\{7, 49\}$ można podzielić na dwa sposoby (jedna lub dwie składowe), zatem B jest mocy dwa. Natomiast zbiór C jest pusty (mocy 0), bo zawsze $0 \in [0]_r$.

243: Moc zbioru wszystkich funkcji z \mathbb{N} do \mathbb{N} jest równa $\aleph_0^{\aleph_0} = \mathfrak{C}$, zatem moc zbioru \mathcal{F} jest co najwyżej \mathfrak{C} . Aby stwierdzić, że jest też co najmniej \mathfrak{C} , wystarczy zauważyć, że \mathcal{F} zawiera zbiór ciągów zerojedynkowych, który jest mocy $2^{\aleph_0} = \mathfrak{C}$. Skoro $\mathfrak{C} \leq \overline{\mathcal{F}} \leq \mathfrak{C}$, więc $\overline{\mathcal{F}} = \mathfrak{C}$.

244: Moc $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ jest równa $\aleph_0^{\aleph_0} = \mathfrak{C}$, zatem moc zbioru zygzaków jest co najwyżej \mathfrak{C} . Pokażemy, że jest ona też co najmniej \mathfrak{C} , czyli że jest równa \mathfrak{C} . W tym celu określimy injekcję $F : 2^{\mathbb{N}} \xrightarrow{1-1} Z$, gdzie Z oznacza zbiór wszystkich zygzaków. Dla dowolnego ciągu $\alpha \in 2^{\mathbb{N}}$, funkcję $F(\alpha)$ definiujemy przez indukcję, przyjmując $F(\alpha)(0) = 0$, $F(\alpha)(2n+2) = F(\alpha)(2n+1) - 1$ oraz:

$$F(\alpha)(2n+1) = \begin{cases} \alpha(2n) + 1, & \text{jeśli } \alpha(n) = 0; \\ \alpha(2n) + 2, & \text{jeśli } \alpha(n) = 1 \end{cases}$$

Każde zero w ciągu α odpowiada w $F(\alpha)$ zwiększeniu wartości o jeden i zmniejszeniu o jeden. Każda jedynka odpowiada przyrostowi o 2 i spadkowi o jeden. Wartość funkcji $F(\alpha)$ dla nieparzystych argumentów jest zawsze dodatnia, a więc F jest dobrze określona. Jeśli teraz $\alpha \neq \beta$ i n jest najmniejszą liczbą taką, że $\alpha(n) \neq \beta(n)$, to funkcje $F(\alpha)$ i $F(\beta)$ różnią się w punkcie $2n+1$.

245: Dla $\alpha : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}$ niech $F(\alpha) : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ będzie funkcją określoną tak:

$$F(\alpha)(2n) = n, \text{ oraz } F(\alpha)(2n+1) = \alpha(n), \text{ dla dowolnego } n \in \mathbb{N}.$$

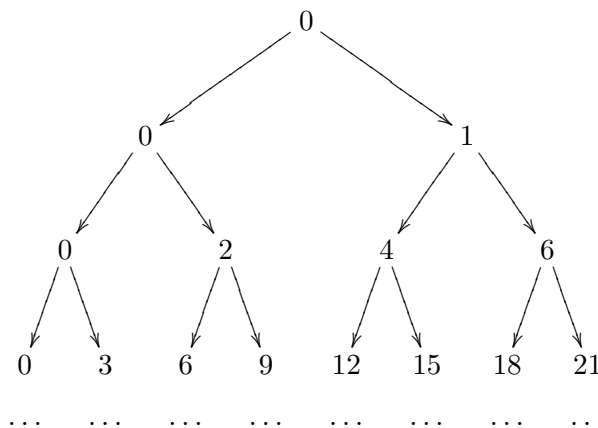
Ponieważ zawsze $n \leq 2n$ oraz $\alpha(n) \leq 1 \leq 2n+1$ więc mamy $F(\alpha)(k) \leq k$, dla każdego $k \in \mathbb{N}$. Inaczej mówiąc $F(\alpha) \in A$. Co więcej, w istocie mamy $F(\alpha) \in B$, bo funkcja $F(\alpha)$ przyjmuje wszystkie wartości w \mathbb{N} . Określone w ten sposób przekształcenie $F : (\mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}) \rightarrow B$ jest różnowartościowe. Jeśli bowiem $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$ oraz $\alpha \neq \beta$, powiedzmy $\alpha(n) \neq \beta(n)$, to wtedy $F(\alpha)(2n+1) \neq F(\beta)(2n+1)$, skąd $F(\alpha) \neq F(\beta)$. Wynika stąd, że zbiór B (a tym bardziej zbiór A) jest mocy co najmniej takiej jak moc $\mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}$ czyli \mathfrak{C} . Z drugiej strony $B \subseteq A \subseteq \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, a ponieważ $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ też jest mocy \mathfrak{C} , więc mamy $\overline{B} \leq \overline{A} \leq \mathfrak{C}$. Z twierdzenia Cantora-Bernsteina otrzymujemy $\overline{A} = \overline{B} = \mathfrak{C}$.

Moc zbioru C jest równa 1. Pokażemy przez indukcję, że jeśli $f \in C$, to $f(n) = n$. Istotnie, przypuśćmy, że dla $i < n$ mamy $f(i) = i$ i rozpatrzmy wartość $f(n)$. Gdyby $f(n) < n$, to z założenia indukcyjnego $f(n) = f(f(n))$ i funkcja f nie byłaby różnowartościowa. Ponieważ $f(n) \leq n$, więc pozostaje tylko $f(n) = n$. W zbiorze C jest więc tylko funkcja identycznościowa.

247: Ponieważ $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ jest mocy continuum, więc wystarczy udowodnić, że zbiór klas abstrakcji jest mocy co najmniej continuum. W tym celu, dla dowolnego $b : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}$ określimy ciąg $f_b : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ wzorem

$$f_b(n) = n \cdot \sum_{k=0}^{n-1} b(k) \cdot 2^{n-1-k}$$

Ciągi f_b to ciągi etykiet wierzchołków leżących na nieskończonych gałęziach drzewa na rysunku 3. Jeśli ciągi b i c są różne, to niech n będzie najmniejszą taką liczbą, że $b(n) \neq c(n)$, na przykład niech



Rysunek 3: Zadanie 247.

$b(n) < c(n)$. Dla $m \geq n$ mamy wtedy $f_c(m) - f_b(m) \geq m$. Mamy więc rodzinę funkcji f_b , która jest mocy continuum, i której każdy element wyznacza inną klasę abstrakcji.

248: Funkcja f może przyjąć co najwyżej \aleph_0 różnych wartości, bo taka jest moc jej przeciwdziedziny \mathbb{N} . Zatem \aleph_0 jest ograniczeniem górnym mocy A . Ponadto f jest „na” \mathbb{N} , bo $f(\{n\}) = n$ dla każdego n ,

więc poszukiwana moc jest także z dołu ograniczona przez moc \mathbb{N} . A więc $\overline{A} = \aleph_0$.

249: Liczba \mathfrak{C} jest ograniczeniem górnym mocy B , gdyż $\overline{\mathbb{N}^{\mathbb{N}}} = \mathfrak{C}$. Pokażemy, że \mathfrak{C} jest również ograniczeniem dolnym mocy tego zbioru. W tym celu skonstruujemy injekcję $F: 2^{\mathbb{N}} \xrightarrow{1-1} B$:

$$F(g)(n) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } n = 0; \\ n - g(n-1), & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Wpierw pokażemy, że definicja jest poprawna, czyli że $F(g)$ rzeczywiście należy do B , gdy $g \in 2^{\mathbb{N}}$. Wtedy $F(g)(0) = 0 \leq 0$. Gdy zaś $n \geq 1$, to $g(n-1) \geq 0$, a zatem $F(g)(n) = n - g(n-1) \leq n$. Ponadto dla dowolnego $m \in \mathbb{N}$ istnieje $n \in \mathbb{N}$, które czyni zadość nierówności $m < F(g)(n)$. Wystarczy przyjąć $n = m + 2$, aby otrzymać $m < m + 2 - g(m+2) = F(g)(n)$.

Widzimy, że definicja F jest poprawna, sprawdźmy jeszcze, czy funkcja ta jest różnowartościowa. Niech $g, h \in 2^{\mathbb{N}}$ i $g \neq h$. Zatem istnieje takie $n \in \mathbb{N}$, że $g(n) \neq h(n)$. Wtedy $F(g)(n+1) \neq F(h)(n+1)$, a więc pokazaliśmy, że F jest różnowartościowa. Skoro ograniczyliśmy moc zbioru B zarówno z dołu jak i z góry przez \mathfrak{C} , to $\overline{B} = \mathfrak{C}$ na mocy twierdzenia Cantora-Bernsteina.

250: Oczywiście moc ilorazu $\mathbb{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N})/R$ jest co najwyżej równa mocy zbioru $\mathbb{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$, czyli continuum. Pokażemy, że moc tego zbioru jest też większa lub równa continuum. Określimy pomocniczą funkcję $p: \mathbb{P}(\mathbb{N} - \{0\}) \rightarrow \mathbb{P}(\mathbb{P}(\mathbb{N}))$, która każdemu podzbiorkowi $A \subseteq \mathbb{N} - \{0\}$ przyporządkowuje pewien podział \mathbb{N} . Zrobimy to tak, żeby dla dowolnego $m \neq 0$ zachodziła równoważność

$$m \in A \quad \text{wtedy i tylko wtedy, gdy} \quad \text{w } p(A) \text{ jest zbiór } m\text{-elementowy.}$$

Na przykład, dla $A = \{2, 3, 6\}$ możemy przyjąć $p(A) = \{\{0, 1\}, \{2, 3, 4\}, \{5, 6, 7, 8, 9, 10\}, \{11, 12, \dots\}\}$, a jeśli A jest zbiorem wszystkich liczb nieparzystych, to $p(A) = \{\{0\}, \{1, 2, 3\}, \{4, 5, 6, 7, 8\}, \dots\}$.

Konkretna definicja funkcji p może być taka: Jeśli A jest nieskończony i $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$, gdzie $a_1 < a_2 < a_3 < \dots$, to $p(A)$ jest następującym podziałem \mathbb{N} :

$$p(A) = \{\{0, 1, \dots, a_1 - 1\}, \{a_1, a_1 + 1, \dots, a_1 + a_2 - 1\}, \dots\}.$$

Jeśli $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$ jest zbiorem skończonym, gdzie $a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_n$, to

$$p(A) = \{\{0, 1, \dots, a_1 - 1\}, \{a_1, a_1 + 1, \dots, a_1 + a_2 - 1\}, \dots, \\ \{\sum_{k=1}^{n-1} a_k, \dots, (\sum_{k \in A} a_k) - 1\}, \{\sum_{k \in A} a_k, (\sum_{k \in A} a_k) + 1, \dots\}\}.$$

Oznaczmy przez $F(A)$ relację równoważności wyznaczoną przez podział $p(A)$. Z powyższego wynika, że $m \in A$ wtedy i tylko wtedy, gdy relacja równoważności $F(A)$ wyznaczona przez podział $p(A)$ ma m -elementową klasę abstrakcji. Pokażemy teraz, że jeśli $A \neq B$, to $\langle F(A), F(B) \rangle \notin R$. Niech $A \neq B$. Wtedy istnieje takie m , że $m \in A$ i $m \notin B$ (lub odwrotnie), a więc relacja $F(A)$ ma klasę abstrakcji mocy m , a relacja $F(B)$ takiej klasy nie ma. Jeśli $\pi: \mathbb{N} \xrightarrow[na]{1-1} \mathbb{N}$ jest taką bijekcją, że

$$\langle a, b \rangle \in F(A) \leftrightarrow \langle \pi(a), \pi(b) \rangle \in F(B),$$

to obrazem klasy abstrakcji mocy m jest również klasa abstrakcji mocy m . Zatem taka bijekcja nie istnieje. Wnioskujemy stąd, że $\langle F(B), F(A) \rangle \notin R$, czyli $[F(A)]_R \neq [F(B)]_R$. Mamy więc różnowartościową funkcję $G: \mathbb{P}(\mathbb{N} - \{0\}) \rightarrow \mathbb{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N})/R$ daną wzorem $G(A) = [F(A)]_R$. Zatem moc ilorazu jest co najwyżej \mathfrak{C} i z twierdzenia Cantora-Bernsteina otrzymujemy wniosek, że $\overline{\mathbb{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N})/R} = \mathfrak{C}$.

251a: Relacja jest zwrotna, bo $A \dot{-} A = \emptyset$, a zbiór pusty jest zawarty w każdym kole. Symetria jest oczywista z definicji. Przechodność wynika natychmiast z zawierania $(A \dot{-} C) \subseteq (A \dot{-} B) \cup (B \dot{-} C)$ i z tego, że dwa dowolne koła zmieszczą się zawsze w jednym większym.

251b: Weźmy dowolny zbiór $A \subseteq \mathbb{R}^2$ i dowolne koło K . Jeśli teraz $L \subseteq K$, to zbiór $(A - K) \cup L$ jest w relacji z A , bo $A \dot{-} ((A - K) \cup L) \subseteq K$. Co więcej, każdy ze zbiorów $(A - K) \cup L$ jest inny, czyli mamy różnowartościową funkcję z $\mathbb{P}(K)$ do $[A]_r$. Zatem moc klasy $[A]_r$ jest co najmniej taka jak moc $\mathbb{P}(K)$, czyli $2^{\mathfrak{C}}$. Ponieważ $[A]_r \subseteq \mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$, a zbiór $\mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$ też jest mocy $2^{\mathfrak{C}}$, więc moc $[A]_r$ jest równa $2^{\mathfrak{C}}$.

251c: Ponieważ funkcja $\lambda X. [X]_r: \mathbb{P}(\mathbb{R}^2) \rightarrow \mathbb{P}(\mathbb{R}^2)/_r$ jest „na”, więc moc zbioru $\mathbb{P}(\mathbb{R}^2)/_r$ jest mniejsza lub równa $2^{\mathfrak{C}}$. Aby pokazać równość, określimy $\Xi: \mathbb{P}(\mathbb{R}) \xrightarrow{1-1} \mathbb{P}(\mathbb{R}^2)/_r$ wzorem $\Xi(X) = [X \times \mathbb{R}]_r$.

Funkcja Ξ jest różnowartościowa, bo jeśli $X_1 \neq X_2$, np. $d \in X_1 \setminus X_2$, to zbiór $(X_1 \times \mathbb{R}) \setminus (X_2 \times \mathbb{R})$ zawiera całą prostą o równaniu $x = d$ i nie zmieści się w żadnym kole. A więc $\Xi(X_1) \neq \Xi(X_2)$.

252a: Niech A oznacza zbiór wszystkich funkcji o własności (a) i niech $f \in A$ oraz $f(1) = k$. Przez indukcję udowodnimy, że wtedy $f(n) = kn$ dla wszystkich n . Najpierw zauważmy, że równość $1 = 0 + 1$ implikuje $k = f(1) = f(0 + 1) = f(0) + f(1) = f(0) + k$, skąd $f(0) = 0 = k \cdot 0$. W kroku indukcyjnym $f(n + 1) = f(n) + f(1) = nk + k = (n + 1)k$. A więc jeśli $f, g \in A$ oraz $f(1) = g(1)$, to $f = g$. Zatem funkcja $\lambda f. f(1) : A \rightarrow \mathbb{N}$ jest różnowartościowa, czyli A jest zbiorem przeliczalnym. Ponieważ A jest oczywiście nieskończony (wszystkie funkcje $\lambda n. kn$ należą do A) więc jest mocy \aleph_0 .

252b: Zbiór B wszystkich funkcji o własności (b) jest zawarty w $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, a więc $\overline{B} \leq \mathfrak{C}$. Nierówność przeciwną udowodnimy, definiując injekcję $\zeta : (\mathcal{P} \rightarrow \mathbb{N}) \xrightarrow{1-1} B$, gdzie Π jest zbiorem wszystkich liczb pierwszych. Dla dowolnej funkcji $f : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{N}$ przyjmujemy, że $\zeta(f)(0) = 0$ oraz $\zeta(f)(1) = 1$. Każdą liczbę $n > 1$ przedstawiamy jednoznacznie jako iloczyn liczb pierwszych $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_r^{k_r}$ i definiujemy $\zeta(f)(n) = f(p_1)^{k_1} f(p_2)^{k_2} \dots f(p_r)^{k_r}$. Nietrudno sprawdzić, że $\zeta(f) \in B$, czyli funkcja ζ jest dobrze określona. Co więcej, $\zeta(f)(p) = f(p)$ dla $p \in \mathcal{P}$, więc jeśli $f \neq g$, to także $\zeta(f) \neq \zeta(g)$. Zatem ζ jest różnowartościowa, a ponieważ zbiór $\mathcal{P} \rightarrow \mathbb{N}$ jest mocy \mathfrak{C} , więc $\overline{B} \geq \mathfrak{C}$. Ostatecznie $\overline{B} = \mathfrak{C}$.

252c: Przypuśćmy, że f spełnia warunek (c). Wtedy $f(1) = f(1^1) = f(1)^{f(1)}$. Jedyną liczbą d o własności $d^d = d$ jest 1, więc $f(1) = 1$. Przypuśćmy teraz, że $f(k) = d \neq 1$ dla pewnego k . Wtedy dla dowolnych a, b mamy $d^{f(a \cdot b)} = f(k^{a \cdot b}) = f((k^a)^b) = (d^{f(a)})^{f(b)} = d^{f(a) \cdot f(b)}$, skąd $f(a \cdot b) = f(a) \cdot f(b)$, czyli f spełnia też warunek (b). Dalej $f(a + b) = f(a) + f(b)$, bo

$$d^{f(a+b)} = f(k^{a+b}) = f(k^a \cdot k^b) = d^{f(a)} \cdot d^{f(b)} = d^{f(a)+f(b)},$$

czyli zachodzi też (a). Ale jedyną funkcją o własności (a), taką że $f(1) = 1$ jest identyczność. Mamy więc tylko dwie funkcje o własności (c): identycznościową i stale równą 1.

257: Zauważmy, że $\langle \mathcal{R}, \preceq_X \rangle$ jest porządkiem częściowym wtedy i tylko wtedy, gdy:

- $0 \in X$;
- $\forall x : \mathbb{R} (x \in X \wedge -x \in X \rightarrow x = 0)$;
- $\forall x, y : \mathbb{R} (x \in X \wedge y \in X \rightarrow x + y \in X)$.

Istotnie, pierwszy warunek jest równoważny zwrotności, drugi antysymetrii, a trzeci przechodniości. Zatem nie są porządne zbiory z punktów (b), (d) i (f), ze względu na brak odpowiednio zwrotności, antysymetrii i przechodniości. Pozostałe zbiory spełniają wszystkie warunki, więc są porządne.

258a: Tak. Załóżmy, że x jest elementem największym w $\langle \mathbb{R}, \preceq_X \rangle$. Wówczas $x - 1 \preceq_X x$, więc $1 \in X$, a w konsekwencji $x \preceq_X x + 1$, co jest sprzeczne z naszym założeniem.

258b: Nie. W porządku $\langle \mathcal{R}, \preceq_{\{0\}} \rangle$ wszystkie elementy są minimalne.

258c: Tak. Zauważmy, że dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$ zachodzi równość $(y+1) - (x+1) = y - x$. Oznacza to, że $x \preceq_X y$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x+1 \preceq_X y+1$. Zatem c jest ograniczeniem górnym zbioru B wtedy i tylko wtedy, gdy $c+1$ jest ograniczeniem górnym zbioru $B' = \{b+1 \mid b \in B\}$. W szczególności, jeśli $a = \sup B$, to $a+1$ jest ograniczeniem górnym B' . Jest to najmniejsze ograniczenie, bo jeśli $B' \preceq_X c$, to $B \preceq_X c-1$, skąd $a \preceq_X c-1$ i wreszcie $a+1 \preceq_X c$. A więc $a+1 = \sup B'$. Podobnie dowodzimy implikacji odwrotnej.

258d: Nie. W porządku $\langle \mathbb{R}, \preceq_X \rangle$ dla X z punktu 1(e) zbiór $\{1, -\pi, 1 - \pi\}$ jest skierowany (bo $1 \preceq_X 1 - \pi$ i $-\pi \preceq_X 1 - \pi$), ale nie jest łańcuchem (bo 1 i $-\pi$ są nieporównywalne).

258e: Tak. Implikacja w prawą stronę jest oczywista. Żeby pokazać implikację w lewą stronę, załóżmy, że w pewnym porządku $\langle \mathbb{R}, \preceq_X \rangle$ przedział (a, b) jest łańcuchem, i rozpatrzmy dowolne $x, y \in \mathbb{R}$. Niech n będzie dostatecznie dużą liczbą naturalną, żeby $|\frac{y-x}{n}| < b - a$. Wówczas dla pewnych $a', b' \in (a, b)$ zachodzi $b' - a' = \frac{y-x}{n}$, co oznacza, że $\frac{y-x}{n} \in X$ lub $\frac{x-y}{n} \in X$. Przypuśćmy, że $\frac{y-x}{n} \in X$. Wiemy już, że suma liczb ze zbioru X musi należeć do X , skąd przez łatwą indukcję wynika $y - x = n \cdot \frac{y-x}{n} \in X$. A więc $x \preceq_X y$. W drugim przypadku analogicznie otrzymujemy $y \preceq_X x$. Ponieważ liczby x i y były wybrane dowolnie, porządek $\langle \mathbb{R}, \preceq_X \rangle$ jest liniowy.

261: ((a) \Rightarrow (b)) Oczywiście $f(a) \leq f(a)$, więc z warunku (a) wynika $a \leq g(f(a))$. Podobnie z $g(b) \leq g(b)$ otrzymamy $f(g(b)) \leq b$.

((b) \Rightarrow (a)) Przypuśćmy, że $a \leq g(b)$. Z monotoniczności mamy $f(a) \leq f(g(b))$, a z warunku (b) także $f(g(b)) \leq b$. Stąd $f(a) \leq b$. Implikacja odwrotna ma analogiczne uzasadnienie.

271: Niech \mathcal{X} będzie skierowanym podzbiorem zbioru $\mathbf{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$. Ponieważ w $\mathbf{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$ kresem górnym dowolnej rodziny zbiorów jest jej suma, więc należy udowodnić równość $\bigcup\{s \cdot s \mid s \in \mathcal{X}\} = \bigcup \mathcal{X} \cdot \bigcup \mathcal{X}$. Aby wykazać inkluzję z lewej do prawej, przypuśćmy, że $\langle a, b \rangle \in \bigcup\{s \cdot s \mid s \in \mathcal{X}\}$. Wtedy istnieje takie $s \in \mathcal{X}$, i takie $c \in \mathbb{N}$, że $\langle a, c \rangle, \langle c, b \rangle \in s$. Ponieważ $s \subseteq \bigcup \mathcal{X}$, więc $\langle a, b \rangle \in \bigcup \mathcal{X} \cdot \bigcup \mathcal{X}$.

Założmy teraz, że $\langle a, b \rangle \in \bigcup \mathcal{X} \cdot \bigcup \mathcal{X}$. Istnieje takie $c \in \mathbb{N}$, że $\langle a, c \rangle, \langle c, b \rangle \in \bigcup \mathcal{X}$. A więc $\langle a, c \rangle \in s$ oraz $\langle c, b \rangle \in s'$, dla pewnych relacji $s, s' \in \mathcal{X}$. Ponieważ zbiór \mathcal{X} jest skierowany, więc istnieje relacja $s'' \in \mathcal{X}$ zawierająca zarówno s jak s' . Zatem $\langle a, c \rangle, \langle c, b \rangle \in s''$ czyli $\langle a, b \rangle \in (s'' \cdot s'')$. Stąd mamy $\langle a, b \rangle \in \bigcup\{(s \cdot s) \mid s \in \mathcal{X}\}$, co kończy dowód inkluzji z prawej do lewej.

281: Inkluzja $\bigcup f(S) \subseteq f(\bigcup S)$ wynika wprost z monotoniczności, bo dla $B \in S$ mamy $B \subseteq \bigcup S$. Niech więc $x \in f(\bigcup S)$. Z założenia istnieje skończony zbiór $B = \{b_1, \dots, b_k\} \subseteq \bigcup S$, taki że $x \in f(B)$. Skoro $B \subseteq \bigcup S$, to każdy z elementów b_k należy do pewnego składnika $D_k \in S$. Ale ponieważ S jest skierowany, to w S musi istnieć zbiór E zawierający wszystkie D_k . Wtedy także $B \subseteq E$, skąd $x \in f(B) \subseteq f(E) \subseteq \bigcup f(S)$.

284: Ponieważ zbiór pusty jest łańcuchem, więc istnieje $\inf \emptyset$, czyli największy element zbioru A . Oznaczmy go przez \top . Dalej zauważmy, że funkcja f jest monotoniczna. Jeśli bowiem $a \leq b$ to zbiór $\{a, b\}$ tworzy łańcuch o kresie dolnym a . Zatem $f(a)$ jest kresem dolnym dla $\{f(a), f(b)\}$, czyli $f(a) \leq f(b)$.

Niech $a_k = f^k(\top)$. Z monotoniczności funkcji f wynika, że ciąg a_k jest zstępujący: $a_0 \geq a_1 \geq a_2 \dots$. Zbiór $\{a_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ jest więc łańcuchem i ma kres dolny a_ω . Z założenia o f mamy teraz $f(a_\omega) = \inf\{f^{k+1}(\top) \mid k \in \mathbb{N}\} = \inf\{f^k(a_k) \mid k \in \mathbb{N}\} = a_\omega$. A więc a_ω jest punktem stałym f . Jeśli b jest innym punktem stałym, to oczywiście $b \leq \top$. Przez indukcję łatwo udowodnić, że $b = f^k(b) \leq f^k(\top) = a_k$ skąd b jest ograniczeniem dolnym zbioru $\{a_k \mid k \in \mathbb{N}\}$. A zatem $b \leq a_\omega$, bo a_ω jest kresem dolnym tego zbioru.

285: Każdy zbiór jest sumą rodziny swoich skończonych podzbiorów i na dodatek ta rodzina jest skierowana i niepusta. Zatem natychmiast z ciągłości wynika warunek

$$f(a) = \bigcup\{f(e) \mid e \text{ skończony oraz } e \subseteq a\}.$$

Dla dowodu implikacji odwrotnej założmy, że S jest skierowanym podzbiorem $\mathbf{P}(\mathbb{N})$. Kresem górnym w $\mathbf{P}(\mathbb{N})$ jest oczywiście suma, więc równość $\sup f(S) = f(\sup S)$ sprowadza się do równości

$$\bigcup\{f(s) \mid s \in S\} = \bigcup\{f(e) \mid e \text{ skończony oraz } e \subseteq \bigcup S\}.$$

Oznaczmy lewą i prawą stronę tej równości przez LS i PS. Przypuśćmy, że $x \in LS$. Wtedy $x \in f(s)$ dla pewnego $s \in S$, ale $f(s) = \bigcup\{f(e) \mid e \text{ skończony oraz } e \subseteq s\}$, więc $x \in f(e)$, gdzie e jest skończony i $e \subseteq s \subseteq \bigcup S$. Zatem $x \in PS$. Na odwrót, jeśli $x \in PS$, to $x \in f(e)$, gdzie $e = \{y_1, \dots, y_k\}$ jest skończonym podzbiorem $\bigcup S$. Istnieją takie $s_1, \dots, s_k \in S$, że $y_1 \in s_1, \dots, y_k \in s_k$. Zbiór S jest skierowany, więc istnieje też takie $s \in S$, że $s_1, \dots, s_k \subseteq s$. Mamy więc $e \subseteq s$. Ponieważ $f(s) = \bigcup\{f(e) \mid e \text{ skończony oraz } e \subseteq s\}$, więc $f(e) \subseteq f(s)$ i ostatecznie $x \in f(s)$.

286: Ten porządek nie jest liniowy, bo np. zbiory $\{0, 1\}$ i $\{0, 2\}$ nie są porównywalne. Nie jest też dobrze ufundowany, bo zbiory $A_n = \mathbb{N} - \{i \in \mathbb{N} \mid 0 < i \leq n\}$ tworzą nieskończony ciąg malejący. Elementem najmniejszym (a więc jedynym minimalnym) jest $\{0\}$, natomiast elementów maksymalnych (tym bardziej największych) nie ma. Jeśli bowiem $\min A = n$, to w naszym porządku $A < \{n + 1\}$. Brak elementu największego implikuje, że nasz zbiór nie jest kratą zupełną.

287a: Niech podstawa B będzie minimalna i niech $x, y \in B$. Jeśli $x \leq y$ to $B - \{y\}$ jest podstawą – sprzeczność. Zatem minimalna podstawa jest antyłańcuchem. Na odwrót, jeśli podstawa B jest antyłańcuchem, to jest minimalna. Istotnie, jeśli $C \subsetneq B$, np. $c \in B - C$, to C nie jest podstawą, bo nie istnieje takie $b \in B$, że $b \leq c$. Oczywiście nie każdy antyłańcuch jest podstawą, np. zbiór pusty nie jest podstawą zbioru \mathbb{N} .

287b: Nie, na przykład zbiór liczb całkowitych \mathbb{Z} nie ma minimalnej podstawy. Każdy antyłańcuch w \mathbb{Z} jest jednoelementowy, a jeśli podstawa jest jednoelementowa to ten element jest minimalny.

288a: Nie. Niech na przykład $S = \{\{0, 1\}, \{0, 2\}\}$. Wtedy $\{0, 1\} \preceq_S \{0, 2\}$ i $\{0, 2\} \preceq_S \{0, 1\}$, więc relacja nie jest antysymetryczna.

288b: Tak. Przypuśćmy, że \preceq_S jest częściowym porządkiem i niech $f : \mathcal{S} \rightarrow (\mathbb{N} \cup \{\aleph_0\}) \times \mathbb{N}$ będzie taka, że $f(A) = (\overline{A}, \min A)$. Zauważmy, że $f(A) = f(B)$ implikuje $A \preceq_S B$ i $B \preceq_S A$, a więc $A = B$ z antysymetrii. Funkcja f jest więc różnowartościowa. Ponieważ zbiór $(\mathbb{N} \cup \{\aleph_0\}) \times \mathbb{N}$ jest przeliczalny, więc i \mathcal{S} jest przeliczalny.

288c: Tak. Zwrotność i przechodniość relacji \preceq_S jest oczywista. Udowodnimy antysymetrię. Jeśli dla $A, B \in \mathcal{S}$ zachodzi $A \preceq_S B$ i $B \preceq_S A$, to A i B mają ten sam element najmniejszy, a więc $A \cap B \neq \emptyset$. Ponieważ rodzina \mathbb{N}/r jest podziałem, więc z $A \cap B \neq \emptyset$ wynika $A = B$.

288d: Tak. Relacja \preceq_S zawsze jest spójna, więc jeśli jest częściowym porządkiem, to jest to porządek liniowy. Niech $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{S}$ będzie niepusty i niech $\alpha \in \mathbb{N} \cup \{\aleph_0\}$ będzie najmniejszą taką liczbą, że $\alpha = \overline{A}$ dla pewnego $A \in \mathcal{V}$. Dalej, niech $m = \min\{\min A \mid A \in \mathcal{V} \wedge \overline{A} = \alpha\}$. Najmniejszym elementem \mathcal{V} jest taki zbiór $A \in \mathcal{V}$, że $\overline{A} = \alpha$ i $\min A = m$.

289: Niech L będzie łańcuchem zbiorów rzadkich. Aby pokazać, że suma $\bigcup L$ jest rzadka, przypuśćmy, że $x, y \in \bigcup L$. Wtedy $x \in A \in L$ oraz $y \in B \in L$, dla pewnych A i B , a ponieważ L jest łańcuchem, to albo $A \subseteq B$ albo $B \subseteq A$. Wtedy albo $x, y \in A$ albo $x, y \in B$ i w obu przypadkach mamy $\rho(x, y) \geq 1$. Rozpatrzmy rodzinę Z wszystkich rzadkich podzbiorów \mathbb{R}^n uporządkowaną przez inkluzję. Skoro suma dowolnego łańcucha L w $\langle Z, \subseteq \rangle$ należy do Z , oraz każdy zbiór $A \in L$ jest zawarty w $\bigcup L$, więc $\bigcup L$ jest ograniczeniem górnym L w zbiorze Z . Pokazaliśmy w ten sposób, że zbiór uporządkowany $\langle Z, \subseteq \rangle$ spełnia założenia lematu Kuratowskiego-Zorna, ma więc element maksymalny. Jest to zbiór rzadki a jednocześnie wszędobylski.

Powyższe rozwiązanie działa dla dowolnego n . Uwaga: dla $n > 3$ zbiór punktów o współrzędnych całkowitych nie jest wszędobylski.

290: Rozpatrzmy rodzinę \mathcal{S} wszystkich skierowanych podzbiorów zbioru częściowo uporządkowanego $\langle A, \leq \rangle$. Mamy udowodnić, że zbiór \mathcal{S} (uporządkowany przez inkluzję) ma element maksymalny. Należy w tym celu pokazać, że suma każdego łańcucha L zbiorów skierowanych jest zbiorem skierowanym. Wówczas bowiem suma łańcucha L jest jego ograniczeniem górnym w \mathcal{S} i można zastosować lemat Kuratowskiego-Zorna.

Przypuśćmy więc, że $a, b \in \bigcup L$. Wtedy $a \in A, b \in B$, dla pewnych $A, B \in L$. Jeden z tych zbiorów jest zawarty w drugim, bo L jest łańcuchem. Jeśli na przykład $A \subseteq B$ to $a, b \in B$ i musi istnieć takie $c \in B$, że $a, b \leq c$. Oczywiście $c \in \bigcup L$, więc pokazaliśmy, że a i b mają wspólne ograniczenie w $\bigcup L$. A więc $\bigcup L$ faktycznie jest zbiorem skierowanym.

306: Takim podzbiorem jest selektor rodziny przeciwobrazów $\{f^{-1}(\{x\}) \mid x \in B\}$. Lemat Kuratowskiego-Zorna jest tu niepotrzebny.

308: Należy udowodnić, że rodzina $Z = \{B \subseteq A \mid \text{żadne trzy punkty w } B \text{ nie są współliniowe}\}$ ma element maksymalny. W tym celu rozpatrzmy dowolny łańcuch L w Z . Suma tego łańcucha należy do Z . Jeśli bowiem $a, b, c \in \bigcup L$ to każdy z tych punktów należy do pewnego zbioru z łańcucha L . Jeden z tych trzech zbiorów zawiera pozostałe (bo przecież L jest łańcuchem) więc punkty a, b, c nie mogą być współliniowe.

Skoro $\bigcup L \in Z$ to $\bigcup L$ jest ograniczeniem górnym łańcucha L . A więc pokazaliśmy, że dowolny łańcuch w Z ma ograniczenie górne. Z lematu Kuratowskiego-Zorna wynika istnienie elementu maksymalnego. Jest to zbiór spełniający warunki zadania.

309: Zbiór jest jednocześnie D -łatwy i D -trudny, wtedy i tylko wtedy, gdy jest maksymalnym zbiorem D -łatwym (tj. elementem maksymalnym rodziny wszystkich zbiorów D -łatwych, uporządkowanej przez inkluzję). Rodzina ta spełnia założenia lematu Kuratowskiego-Zorna, jeśli bowiem L jest łańcuchem zbiorów D -łatwych, to $\bigcup L$ też jest zbiorem D -łatwym, (a jako taki, stanowi ograniczenie górne łańcucha). Istotnie, jeśli $x, y \in \bigcup L$, to istnieją takie $V_1, V_2 \in L$, że $x \in V_1$ i $y \in V_2$. Ponieważ L jest łańcuchem, więc $V_{2-i} \subseteq V_i$ dla $i = 1$ lub $i = 2$. Wtedy $x, y \in V_i$, skąd wynika pożądana własność $(x + y)^3 - 2xy \in D$.

Z powyższego wynika, że dla każdego D , do rodziny wszystkich zbiorów D -łatwych stosuje się lemat Kuratowskiego-Zorna, a więc maksymalny zbiór D -łatwy istnieje zawsze.

310: Tak. Są to selektory zbioru klas abstrakcji relacji współmierności.

311: Rozpatrzmy rodzinę \mathcal{T} złożoną ze wszystkich takich podzbiorów T zbioru B , że

$$|x - y| \geq \frac{1}{2}(|x - A| + |y - A|),$$

dla dowolnych różnych $x, y \in T$. Rodzina \mathcal{T} , uporządkowana przez inkluzję, jest niepusta (bo każdy jednoelementowy podzbiór B należy do \mathcal{T}) i spełnia założenia lematu Kuratowskiego-Zorna. Niech bowiem L będzie łańcuchem w \mathcal{T} i niech $U = \bigcup L$. Jeśli $x, y \in U$, to istnieją takie $T, T' \in \mathcal{T}$, że $x \in T$ i $y \in T'$. Skoro L jest łańcuchem, to albo $T \subseteq T'$ albo $T' \subseteq T$. W obu przypadkach liczby x, y należą do tego samego zbioru z rodziny \mathcal{T} , więc ich różnica spełnia warunek powyżej.

Pokazaliśmy więc, że suma dowolnego łańcucha w \mathcal{T} należy do \mathcal{T} . A zatem każdy łańcuch w \mathcal{T} jest ograniczony z góry. Z lematu Kuratowskiego-Zorna wnioskujemy, że istnieje maksymalny element T rodziny \mathcal{T} . Zbiór T spełnia pierwszy warunek wymieniony w zadaniu, bo należy do \mathcal{T} . Spełnia też drugi warunek, bo jest maksymalny: jeśli $x \in B - T$, to zbiór $T \cup \{x\}$ nie należy już do \mathcal{T} .

312: Udowodnimy, że szukana rodzina \mathcal{R} jest elementem maksymalnym w pewnym częściowym porządku. Rozważmy rodzinę $\mathcal{A} = \{S \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{N}) \mid (K \subseteq S) \wedge \forall A, B \in S (A \cap B \neq \emptyset)\}$. Pokażemy, że $\langle \mathcal{A}, \subseteq \rangle$ spełnia założenie lematu Kuratowskiego-Zorna:

Każdy łańcuch w $\langle \mathcal{A}, \subseteq \rangle$ ma ograniczenie górne.

Weźmy dowolny łańcuch \mathcal{L} w $\langle \mathcal{A}, \subseteq \rangle$. Jeśli \mathcal{L} jest pusty, to jego ograniczeniem jest dowolny element rodziny \mathcal{A} . Wystarczy więc zauważyć, że \mathcal{A} jest niepusty, bo rodzina wszystkich zbiorów skończonych jest elementem \mathcal{A} . Jeżeli \mathcal{L} jest niepusty, to jego ograniczeniem górnym w $\langle \mathcal{A}, \subseteq \rangle$ jest $\bigcup \mathcal{L}$:

- Jeśli $S \in \mathcal{L}$, to oczywiście $S \subseteq \bigcup \mathcal{L}$.
- Pokażemy, że $\bigcup \mathcal{L} \in \mathcal{A}$. Łańcuch \mathcal{L} jest niepusty, więc istnieje $S \in \mathcal{L}$. Do zbioru S należą wszystkie zbiory skończone, zatem należą także do zbioru $\bigcup \mathcal{L}$. Aby pokazać drugi warunek, weźmy dowolne zbiory $A, B \in \bigcup \mathcal{L}$. Wówczas istnieją takie $S_1, S_2 \in \mathcal{L}$, że $A \in S_1$ i $B \in S_2$. Jednak \mathcal{L} jest łańcuchem, więc $S_1 \subseteq S_2$ lub $S_2 \subseteq S_1$. Załóżmy, że $S_1 \subseteq S_2$ (w drugim przypadku dowód jest analogiczny). Wtedy $A, B \in S_2$. Jednak $S_2 \in \mathcal{A}$, zatem A i B są styczne. Zbiór $\bigcup \mathcal{L}$ spełnia oba warunki wymienione w definicji \mathcal{A} , czyli $\bigcup \mathcal{L} \in \mathcal{A}$.

Na mocy lematu Kuratowskiego-Zorna w $\langle \mathcal{A}, \subseteq \rangle$ istnieje element maksymalny R . Pokażemy, że R spełnia warunki zadania. Wiemy, że $R \in \mathcal{A}$, zatem do R należą wszystkie zbiory skończone oraz każde dwa zbiory należące do R są styczne. Pokażemy nie wprost, że R spełnia także trzeci warunek. Jeśli tak nie jest, to znaczy, że istnieje zbiór $A \notin R$ taki, że dla każdego $B \in R$ zbiory A i B są styczne. Wówczas jednak $R \cup \{A\} \in \mathcal{A}$ oraz $R \subseteq R \cup \{A\}$, czyli R nie jest elementem maksymalnym. Otrzymana sprzeczność dowodzi, że każdy element maksymalny w $\langle \mathcal{A}, \subseteq \rangle$ spełnia warunki zadania.

313: Rozpatrywany porządek¹² jest liniowy, gdyż relacja \preceq jest porządkiem liniowym. Niech teraz $w_k(x) = 17x^2 + 42x - k$, dla $k \in \mathbb{N}$. Funkcje w_k tworzą ciąg malejący, więc nasz porządek nie jest dobrze ufundowany. Nie jest on też kratą zupełną, bo nie istnieje element najmniejszy ani nawet minimalny: wielomian $w - 1$ jest zawsze mniejszy od w . Analogicznie, $w + 1$ jest zawsze większe od w , więc nie ma też elementów największych ani maksymalnych.

Gdyby w definicji zbioru X zastąpić funkcje kwadratowe dowolnymi wielomianami, to relacja przestaje być antysymetryczna i pytania tracą sens. Zbiór X jest mocy \aleph_0 , więc gęsty porządek w X można określić przyjmując $x_1 \leq x_2 \Leftrightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$, gdzie $f : X \xrightarrow[\text{na}]{1-1} \mathbb{Q}$.

314a: Tak. Jest to zbiór elementów minimalnych w A , który oczywiście jest antyłańcuchem. Pozostaje pokazać, że jest on też podstawą. Element $x \in A$ nazwiemy *brzydkim*, gdy nie istnieje element minimalny mniejszy lub równy x . Element brzydkie x sam nie może być minimalny, więc istnieje mniejszy od niego $x' \in A$; co więcej każde $x' < x$ musi być brzydkie. A zatem jeśli istnieje jeden brzydkie element, to istnieje nieskończony ciąg malejący brzydkich elementów, skąd A nie może być dobrze ufundowane.

314b: Nie, na przykład przedział domknięty $[0, 1]$ ma minimalną bazę $\{0\}$.

316: Gdy wszystkie elementy A są nieporównywalne.

¹²Relacja \leq jest częściowym porządkiem. Zwrotność i przechodniość są oczywiste. Antysymetria wynika stąd, że wartości trójmianu kwadratowego w trzech różnych punktach wyznaczają go jednoznacznie.

320a: Nie. Niech np. $f(2k) = 2k + 1$ i $f(2k + 1) = 2k$ dla wszystkich k . Ponieważ porządek \sqsubseteq ma być liniowy, to albo $0 \sqsubseteq 1$ albo $1 \sqsubseteq 0$. W pierwszym przypadku otrzymamy wtedy $1 \sqsubseteq 0$, w drugim przypadku $0 \sqsubseteq 1$. Tak, czy owak, $0 \sqsubseteq 1 \sqsubseteq 0$, skąd wynika sprzeczność: $0 = 1$.

320b: Nie. Weźmy np. $f(2k) = 0$ i $f(2k + 1) = 1$, dla wszystkich k . Wtedy $0 \leq 1 \leq 2$ implikuje $0 \sqsubseteq 1 \sqsubseteq 0$ i znowu mamy $0 = 1$.

320c: Tak. Przyjmijmy, że $m \sqsubseteq n$ wtedy i tylko wtedy, gdy $(f(m) < f(n)) \vee (f(m) = f(n) \wedge m \leq n)$.

339: Załóżmy, że dla dowolnych $i < j$ zachodzi $a_i \not\leq a_j$. Oznacza to, że albo $a_i > a_j$ albo a_i, a_j są nieporównywalne. Wtedy istnieje taki wyraz ciągu a_{n_0} , który jest nieporównywalny ze wszystkimi a_m dla $m > n$. Istotnie, w przeciwnym razie mielibyśmy ciąg malejący $a_{k_0} > a_{k_1} > a_{k_2} \dots$. Stosując to samo rozumowanie do ciągu $(a_m)_{m > n_0}$ otrzymamy wyraz a_m , nieporównywalny z a_n i ze wszystkimi dalszymi wyrazami. W ten sposób skonstruujemy nieskończony antylańcuch.

340: Powiemy, że element a_i w ciągu jest *końcowy*, gdy $\forall j (j > i \Rightarrow a_j \not\leq a_i)$. Jeśli takich elementów jest nieskończenie wiele, to one tworzą nieskończony ciąg b_i , w którym $i < j$ implikuje $b_i \not\leq b_j$, a więc nie spełniający warunku bardzo dobrego ufundowania. Jest więc ostatni element końcowy a_n . Poczynając od a_{n+1} można teraz zbudować nieskończony ciąg wstępujący.

341: Dziedzina Φ ma moc $|\mathbb{N}|^{|\mathbb{R}|} = \aleph_0^{\mathfrak{c}} = 2^{\mathfrak{c}}$. Zbiór $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{R}))$ jest mocy $2^{2^{\mathfrak{c}}} > 2^{\mathfrak{c}}$, więc Φ nie może być „na”. Funkcja Φ nie jest też różnowartościowa. Na przykład $\Phi(\lambda f. 1) = \Phi(\lambda f. 2) = \{\mathbb{R}\}$.

Na koniec pokażemy, że moc zbioru wartości Φ jest równa $2^{\mathfrak{c}}$. Z pewnością zbiór $\text{Rg}(\Phi)$ jest co najwyżej takiej mocy jak dziedzina. Wystarczy pokazać więc $2^{\mathfrak{c}}$ różnych elementów tego zbioru. Dla $A \subseteq \mathbb{R}$ niech χ_A oznacza funkcję charakterystyczną zbioru A , tj. taką funkcję, że $f_A(x) = 1$ dla $x \in A$ oraz $f_A(x) = 0$, gdy $x \notin A$. Oczywiście $\Phi(f_A) = \{A, \mathbb{R} - A\}$. Niech $X = \{A \mid 42 \in A\}$. Jeśli $A, B \in X$ i $A \neq B$ to $\Phi(f_A) \neq \Phi(f_B)$, bo A i B nie są swoimi dopełnieniami. Zatem rodzina $\{\Phi(f_A) \mid A \in X\}$ jest mocy $2^{\mathfrak{c}}$.

342a: Ponieważ $R \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$, oraz $\overline{\overline{\mathbb{P}(\mathbb{N})}} = \mathfrak{C}$, więc $\overline{R} \leq \mathfrak{C}$. Aby pokazać, że także $\overline{R} \geq \mathfrak{C}$, rozpatrzmy funkcję $F : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$ określoną tak: $F(X) = \{2k \mid k \in X\} \cup \{2k + 1 \mid k \notin X\}$. Dla dowolnego $X \subseteq \mathbb{N}$ i dowolnego $k \in \mathbb{N}$, zbiór $F(X)$ spełnia warunki

$$2k \in F(X) \leftrightarrow 2k + 1 \notin F(X) \quad \text{oraz} \quad 2k + 1 \in F(X) \leftrightarrow 2k \notin F(X),$$

a więc dla każdego x mamy $x \in F(X) \leftrightarrow g(x) \notin F(X)$. Zatem $F(X) \in R$. Ponadto funkcja F jest różnowartościowa: jeśli $k \in (X - Y) \cup (Y - X)$, to $2k \in (F(X) - F(Y)) \cup (F(Y) - F(X))$. Oznacza to, że $F : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \xrightarrow{1-1} R$, skąd $\overline{R} \geq \overline{\overline{\mathcal{P}(\mathbb{N})}} = \mathfrak{C}$. Ostatecznie otrzymujemy $\overline{R} = \mathfrak{C}$.

342b: Skoro $\{0, 1, 2\} \cup g(\{0, 1, 2\}) = \{0, 1, 2, 3\}$, to $[\{0, 1, 2\}]_r = \{A \mid A \cup g(A) = \{0, 1, 2, 3\}\}$. Na to, aby $A \cup g(A) = \{0, 1, 2, 3\}$ potrzeba i wystarcza aby $A \subseteq \{0, 1, 2, 3\}$ i aby do zbioru A należała co najmniej jedna z liczb 0 i 1 oraz co najmniej jedna z liczb 2 i 3. Takich zbiorów jest dziewięć: $\{0, 2\}$, $\{1, 2\}$, $\{0, 3\}$, $\{1, 3\}$, $\{0, 1, 2\}$, $\{0, 1, 3\}$, $\{0, 2, 3\}$, $\{1, 2, 3\}$, $\{0, 1, 2, 3\}$.

343a: Tak. Zbiorem wartości funkcji $\Phi(A)$ jest A .¹³ Jeśli więc $A \neq B$ to $\text{Rg}(\Phi(A)) \neq \text{Rg}(\Phi(B))$ i w konsekwencji $\Phi(A) \neq \Phi(B)$.

343b: Nie. Funkcje postaci $\Phi(A)$ są rosnące (gdy A jest zbiorem nieskończonym) lub okresowe (gdy A jest zbiorem skończonym). Funkcja g z zadania 342 nie jest ani rosnąca ani okresowa, więc nie jest wartością funkcji Φ .

343c: Ponieważ $\text{Rg}(f(A)) = A$ dla każdego A , więc z tego, że $A \in \Phi^{-1}(\{f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \mid \text{Rg}(f) = \mathbb{N}\})$, czyli $\Phi(A) \in \{f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \mid \text{Rg}(f) = \mathbb{N}\}$ wynika, że $A = \text{Rg}(\Phi(A)) = \mathbb{N}$. Zatem przeciwobraz $\Phi^{-1}(\{f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \mid \text{Rg}(f) = \mathbb{N}\})$ jest jednoelementowy.

343d: Tak. Mamy $(\Psi \circ \Phi)(A) = \Psi(\Phi(A)) = \text{Rg}(\Phi(A)) = A$, dla każdego A .

343e: Nie. Jeśli na przykład $f = \lambda n. \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, to $\Phi(\Psi(f)) = \Phi(\mathbb{N}) = \lambda n. n$. Tymczasem $1 \neq \lfloor \frac{1}{2} \rfloor = 0$, więc funkcje f i $\Phi(\Psi(f))$ są różne.

¹³W przeciwnym razie niech $a \in A$ będzie najmniejszym elementem A , który nie jest wartością funkcji. Wtedy $a \neq \min A$, bo $\min A = \Phi(A)(0)$, więc są w A liczby mniejsze od a . Jest ich skończenie wiele; niech b będzie największą z nich i niech $b = \Phi(A)(n)$. Wówczas $a = \Phi(A)(n + 1)$.

344a: Zauważmy, że $f(r)$ składa się z najmniejszych elementów wszystkich klas abstrakcji relacji r . Oczywiście zero musi być jednym z tych elementów, jeśli więc $0 \notin A$, na przykład $A = \{3\}$, to nie istnieje taka relacja r , że $f(r) = A$. Funkcja nie jest więc „na”. Zero jest jedyną przeszkodą: jeśli $0 \in A$, to $A = f(r)$, gdzie r wyznaczają podział na zbiory $X_a = \{n \in \mathbb{N} \mid (a \leq n) \wedge \forall b \in A (a < b \rightarrow n < b)\}$. Zatem $\text{Rg}(f) = \{A \subseteq \mathbb{N} \mid 0 \in A\}$.

Funkcja f nie jest różnowartościowa. Na przykład niech relacje r_0 i r_1 wyznaczają odpowiednio podziały $\{\{0\}, \mathbb{N} - \{0\}\}$ i $\{\{1\}, \mathbb{N} - \{1\}\}$. Wtedy $f(r_0) = f(r_1) = \{0, 1\}$.

344b: Już zauważyliśmy, że $f^{-1}(\{\{3\}\})$ jest zbiorem pustym (ma zero elementów), można więc przyjąć $A_0 = \{3\}$. Dla $n > 0$ niech $A_n = \mathbb{N} - \{n\}$. Jeśli $f(r) = A_n$, to klasy abstrakcji r są jednoelementowe, z wyjątkiem jednej klasy – tej, do której należy liczba n . Jest dokładnie n takich relacji, zatem przeciwobraz $f^{-1}(\{A_n\})$ jest n -elementowy.

344c: Z poprzedniej części zadania wynika już, że moc naszego ilorazu jest co najmniej \aleph_0 . Oczywiście przeciwobrazy $f^{-1}(\{A\})$ są mocy co najwyżej continuum, nie wiemy jednak ile jest takich mocy, nie zakładamy bowiem hipotezy continuum. Należy więc zbadać, jakiej mocy mogą być nieskończone zbiory postaci $f^{-1}(\{A\}) = \{r \in \mathcal{R} \mid f(r) = A\}$, dla różnych A . Łatwo zauważyć, że jeśli $f^{-1}(\{A\})$ jest nieskończony, to zbiór A musi mieć co najmniej dwa elementy (w tym zero) i nieskończone dopełnienie. Niech a będzie niezerowym elementem zbioru A i niech $D = \{x \in -A \mid x > a\}$. Weźmy dowolny podzbiór Z zbioru D i relację r_Z wyznaczającą podział złożony ze zbiorów $\{a\} \cup Z$, $\{0\} \cup (-A \cap -Z)$ i singletonów $\{x\}$, dla liczb $x \in A - \{0, a\}$. Wtedy $r_Z \in f^{-1}(\{A\})$. Ponieważ takich relacji r_Z jest continuum (tyle ile podzbiorów ma D) więc nieskończony zbiór postaci $f^{-1}(\{A\})$ musi mieć moc continuum. Nasz iloraz jest więc równoliczny ze zbiorem $\mathbb{N} \oplus \mathcal{C}$, czyli ma moc \aleph_0 .

350: Funkcja ϕ nie jest różnowartościowa, bo na przykład $\phi(\text{id}_{\mathbb{R}}) = \phi(\lambda x. x+1) = \mathbb{I}\mathbb{Q}$. Aby wykazać, że $\phi : \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \xrightarrow{\text{na}} \mathcal{P}(\mathbb{R}) - \{\emptyset\}$, zauważmy, że dla każdego niepustego zbioru $B \subseteq \mathbb{R}$ zachodzi $\overline{B} \leq \mathcal{C}$. Istnieje więc funkcja $f_B : \mathbb{I}\mathbb{Q} \xrightarrow{\text{na}} B$. Wtedy $\phi(f) = B$, gdzie

$$f(x) = \begin{cases} f_B(x), & \text{jeśli } x \in \mathbb{I}\mathbb{Q}, \\ 0, & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

352: (\Rightarrow) Dla dowolnego z mamy równoważność $z \in f^{-1}(X) \leftrightarrow \pi(z) \in g^{-1}(X)$. Zatem funkcja π obcięta do zbioru $f^{-1}(X)$ ustala równoliczność $f^{-1}(X) \sim g^{-1}(X)$. (\Leftarrow) Z założenia wynika, że dla dowolnego $y \in \mathbb{N}$ istnieje bijekcja $\pi_y : f^{-1}(\{y\}) \xrightarrow{\text{na}} g^{-1}(\{y\})$. Funkcję $\pi : \mathbb{N} \xrightarrow{\text{na}} \mathbb{N}$, określamy wzorem $\pi(x) = \pi_{f(x)}(x)$. Definicja jest poprawna, bo $x \in f^{-1}(\{y\})$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $y = f(x)$.

353: Zbiór ilorazowy jest mocy co najwyżej \mathcal{C} bo mamy surjekcję $\kappa : (\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}) \xrightarrow{\text{na}} (\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N})/r$, określoną przez $\kappa(f) = [f]_r$. Jest on też mocy co najmniej \mathcal{C} , a to dlatego, że każdy niepusty podzbiór A zbioru \mathbb{N} , jako zbiór przeliczalny, jest zbiorem wartości pewnej funkcji $f_A : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$. Jeśli przyjmiemy $F(A) = [f_A]_r$, to funkcja $F : \mathcal{P}(\mathbb{N}) - \{\emptyset\} \rightarrow (\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N})/r$, jest różnowartościowa, bo funkcje o różnych zbiorach wartości nie mogą pozostawać w relacji r . Rzeczywiście, jeśli np. $x \in \text{Rg}(f) - \text{Rg}(g)$ to $f^{-1}(\{x\}) \neq \emptyset = g^{-1}(\{x\})$.

354: Są tylko trzy możliwości: 1, \aleph_0 i \mathcal{C} . Dowolna funkcja stała, np. funkcja $f = \lambda x. 1$, jest w relacji r tylko sama ze sobą, bo $f^{-1}(\{n\}) = \emptyset$, dla $n \neq 1$. Nie ma innej takiej funkcji, więc klasa $[f]_r$ ma jeden element. Dalej zakładamy, że funkcja f nie jest stała.

Niech $S = \{A \subseteq \mathbb{N} \mid \text{zbiory } A \text{ i } -A \text{ są nieskończone}\}$. Wiadomo, że zbiór S jest mocy \mathcal{C} . Przypuśćmy najpierw, że dla pewnego $X \subseteq \mathbb{N}$ zbiór $A = f^{-1}(X)$ należy do S . Jeśli $B \in S$ to istnieje taka bijekcja $\pi_B : \mathbb{N} \xrightarrow{\text{na}} \mathbb{N}$, że $\pi_B(B) = A$. Funkcja $f \circ \pi_B$ jest wtedy elementem $[f]_r$, co więcej, przyporządkowanie, które każdemu zbiorowi $B \in S$ przypisuje funkcję $f \circ \pi_B$ jest różnowartościowe. (Istotnie, jeśli np. $x \in B - C$ to $f(\pi_B(x)) \in X$ ale $f(\pi_C(x)) \notin X$.) Zatem klasa $[f]_r$ jest co najmniej mocy continuum. Ponieważ cały zbiór $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ jest mocy continuum więc klasa $[f]_r$ też ma moc \mathcal{C} .

Jeśli żaden ze zbiorów $f^{-1}(X)$ nie należy do S to istnieje takie $x \in \mathbb{N}$, że zbiór $A = f^{-1}(x)$ ma skończone dopełnienie, powiedzmy n -elementowe. Jeśli teraz $g \in [f]_r$ to funkcja g jest wyznaczona przez swoje wartości na n -elementowym zbiorze $f^{-1}(\mathbb{N} - \{x\})$. Takich funkcji jest zatem nie więcej niż elementów przeliczalnego zbioru $\{\rho : \mathbb{N} \dashrightarrow \mathbb{N} \mid \text{Dom}(\rho) \text{ ma } n \text{ elementów}\}$. W tym przypadku klasa $[f]_r$

ma moc \aleph_0 .

356a: Funkcja f jest monotoniczna (bo jest ciągła), więc $f(a) \geq f(p) = p$, dla dowolnego $p \in P$. Zatem $f(a)$ jest ograniczeniem górnym zbioru P i mamy $a \leq f(a)$. Dalej przez indukcję wynika, że elementy $f^n(a)$, gdzie $n \in \mathbb{N}$, tworzą ciąg wstępujący. Niech b będzie kresem górnym tego ciągu (w kracie K). Wówczas

$$f(b) = f(\sup\{f^n(a) \mid n \in \mathbb{N}\}) = \sup\{f^{n+1}(a) \mid n \in \mathbb{N}\} = \sup\{f^n(a) \mid n \in \mathbb{N}\} = b,$$

a więc b jest punktem stałym. Przy tym b jest najmniejszym punktem stałym większym lub równym a . Jeśli bowiem $c \geq a$ jest punktem stałym, to łatwo pokazać przez indukcję, że $c \geq f^n(a)$ dla dowolnego n , i w konsekwencji $c \geq b$.

356b: Nie. Na przykład weźmy taką funkcję $f : P(\mathbb{N}) \rightarrow P(\mathbb{N})$:

$$f(X) = \begin{cases} X, & \text{jeśli } \overline{X} \leq 1; \\ X \cup \{7\}, & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Wtedy każdy zbiór jednoelementowy jest punktem stałym funkcji f . Jeśli teraz $P = \{\{2\}, \{3\}\}$, to kresem zbioru P w kracie $P(\mathbb{N})$ jest zbiór $\{2, 3\}$, który nie jest punktem stałym.

356c: Tak. W zadaniu 356a mowa o tym, że każdy podzbiór P zbioru S ma kres górny w S .

357a: Nieprawda. Trzeba wstawić „różnowartościowym”.

357b: Nieprawda. Trzeba wstawić „i nie są w relacji d ”.

357c: Nieprawda. Trzeba wstawić „o skończonym rozgałęzieniu”.

357d: Prawda. Jeśli wszystkie zbiory są niepuste, i nieskończenie wiele z nich ma przynajmniej dwa elementy to produkt musi być nieprzeliczalny.

357e: Prawda. W kracie zupełnej wystarczy aby przekształcenie było monotoniczne.

357f: Nieprawda. Trzeba wstawić „niepustym”.

357g: Nieprawda. Trzeba wstawić „nieskończonym”.

357h: Prawda. Nie tylko przedział w \mathbb{R} , ale w ogóle każdy zbiór można dobrze uporządkować.

358: Niech Z oznacza zbiór wszystkich dobrze ufundowanych częściowych porządków w \mathbb{N} . Oczywiście $\overline{Z} \leq \mathfrak{C}$, bo $Z \subseteq P(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$. Aby udowodnić nierówność $\mathfrak{C} \leq \overline{Z}$ określimy funkcję $F : P(\mathbb{N} - \{0\}) \xrightarrow{1-1} Z$. Dla dowolnego $A \subseteq \mathbb{N} - \{0\}$ przyjmujemy

$$F(A) = \{\langle a, 0 \rangle \mid a \in A\} \cup \{\langle n, n \rangle \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Relacja $F(A)$ jest dobrym ufundowaniem zbioru \mathbb{N} (łańcuchy są co najwyżej dwuelementowe). Ponadto jeśli $A \neq B$, np. jeśli $a \in A - B$, to $\langle a, 0 \rangle \in F(A) - F(B)$, więc funkcja faktycznie jest różnowartościowa. Z nierówności $\overline{Z} \leq \mathfrak{C}$ i $\mathfrak{C} \leq \overline{Z}$ i z twierdzenia Cantora-Bernsteina wynika równość.

359a: Nie. Na przykład funkcje g_0 i g_1 (zob. część 359e) nie są porównywalne.

359b: Nie. Na przykład takie funkcje f_n tworzą ciąg malejący:

$$f_n(m) = \begin{cases} 0, & \text{jeśli } m \leq n; \\ 1, & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

359c: Tak. Jest izomorficzny z $\langle P(\mathbb{N}), \subseteq \rangle$.

359d: Tak. Ciąg malejący (część 359b) jest oczywiście nieskończonym łańcuchem.

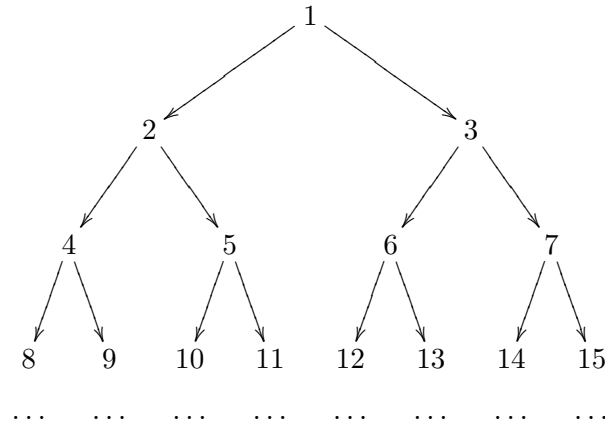
359e: Tak, na przykład zbiór $\{g_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, gdzie

$$g_n(m) = \begin{cases} 1, & \text{jeśli } m = n; \\ 0, & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

359f: Tak. Wystarczy oczywiście wskazać nieprzeliczalny antyłańcuch w $\langle P(\mathbb{N}), \subseteq \rangle$ (por. część 359c). Dla dowolnego ciągu $\alpha : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}$ skonstruujemy przez indukcję ściśle rosnącą funkcję $f_\alpha : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$. Przyjmujemy $f_\alpha(0) = 1$, oraz

$$f_\alpha(n+1) = \begin{cases} 2f_\alpha(n), & \text{jeśli } \alpha(n) = 0; \\ 2f_\alpha(n) + 1, & \text{jeśli } \alpha(n) = 1. \end{cases}$$

Jeśli teraz $A_\alpha = \text{Rg}(f_\alpha)$, to zbiory A_α tworzą antyłańcuch. Istotnie, przypuśćmy, że $\alpha \neq \beta$ i niech $m = \min\{k \in \mathbb{N} \mid \alpha(k) \neq \beta(k)\}$. Wtedy mamy $f_\alpha(m+1) \in A_\alpha - A_\beta$ oraz $f_\beta(m+1) \in A_\beta - A_\alpha$.



Rysunek 4: Zadania 359f i 375b.

Zbiory A_α odpowiadają nieskończonym krawędziom drzewa na rysunku 4.

359g: Funkcje f_α z części 359f tworzą nieprzeliczalny łańcuch w $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

360: Wskazówka: rozwiązać najpierw zadanie 359g.

363a: Niech dla $n \in \mathbb{N}$ funkcja $f_n : \mathbb{N} \rightarrow 2$ będzie funkcją charakterystyczną zbioru $\{n\}$, tzn. niech $f_n(k) = 1$, gdy $k = n$, a $f_n(k) = 0$, gdy $k \neq n$. Niech $F = \{f_n \mid n \in \mathbb{N}, n > 0\}$. Wtedy F rozróżnia elementy zbioru \mathbb{N} . Weźmy bowiem dowolne dwie różne liczby naturalne i oznaczmy większą przez x , a mniejszą przez y (zatem $x > 0$). Wtedy $f_x(x) = 1$, zaś $f_x(y) = 0$, a zarazem $f_x \in F$. Zbiór F jest także minimalnym zbiorem rozróżniającym \mathbb{N} . Weźmy bowiem dowolny jego podzbiór F_0 rozróżniający \mathbb{N} oraz dowolne naturalne $n > 0$. Wiemy, że istnieje takie naturalne $x > 0$, że $f_x \in F_0$ oraz $f_x(0) \neq f_x(n)$. Ponieważ $f_x(0) = 0$, więc $f_x(n) = 1$, a zatem $x = n$. Dowodzi to, że dla każdego naturalnego $n > 0$ mamy $f_n \in F_0$. A zatem $F_0 = F$.

363b: Niech $F = \{f : \mathbb{N} \rightarrow 2 \mid f(0) = f(1)\}$. Zbiór F nie rozróżnia zbioru \mathbb{N} , ponieważ dla każdego $f \in F$ zachodzi $f(0) = f(1)$. Niech F' będzie dowolnym nadzbiorem F nie rozróżniającym \mathbb{N} i niech g będzie dowolnym jego elementem. Istnieją różne liczby naturalne x, y takie, że dla każdego $f \in F'$ zachodzi $f(x) = f(y)$, gdyż w przeciwnym razie F' rozróżniałby \mathbb{N} . Jeżeli $x > 1$, to $f_x \in F$ oraz $f_x(x) = 1$ jest różne od $f_x(y) = 0$. Podobnie jeśli $y > 1$. A zatem $x = 1$ i $y = 0$ lub $x = 0$ i $y = 1$. Skoro $g \in F'$, to $g(x) = g(y)$, a więc $g(0) = g(1)$. Zatem $g \in F$. Dowodzi to, że $F' = F$.

363c: Zbiór F z części 363a rozróżnia elementy zbioru \mathbb{N} i jest mocy \aleph_0 . Ponieważ dla dowolnej mocy nieskończonej \mathfrak{m} zachodzi $\mathfrak{m} + \aleph_0 = \mathfrak{m}$, więc moc zbioru $2^{\mathbb{N}} - F$ jest równa continuum. Ponieważ każdy zbiór postaci $F \cup G$, gdzie $G \subseteq 2^{\mathbb{N}} - F$, rozróżnia elementy zbioru \mathbb{N} , więc rodzina tych podzbiorów zbioru $2^{\mathbb{N}}$, które rozróżniają całe \mathbb{N} jest mocy co najmniej $2^{\mathfrak{c}}$. Ta rodzina jest więc dokładnie mocy $2^{\mathfrak{c}}$, bo jest zawarta w zbiorze $\mathcal{P}(2^{\mathbb{N}})$, który też jest mocy $2^{\mathfrak{c}}$.

363d: Rozważamy uporządkowany przez inkluzję zbiór Z wszystkich tych $A \subseteq X$, których elementy rozróżnia zbiór F . Zauważmy, że nasz zbiór spełnia założenia lematu Kuratowskiego-Zorna, tj. suma dowolnego łańcucha zbiorów należących do Z sama należy też do Z . (Istotnie, jeśli x, y są elementami sumy łańcucha L to $x \in A, y \in B$, dla pewnych $A, B \in L$. Jeden ze zbiorów A, B zawiera drugi, a zatem oba elementy x, y do niego należą, istnieje więc pożądana funkcja.) Istnienie elementu maksymalnego rodziny Z wynika więc z lematu Kuratowskiego-Zorna.

366: Zbiór Ku jest mocy \aleph_0 , jest gęsty i nie ma elementu pierwszego ani ostatniego, a więc (por. zadanie 365) jest izomorficzny ze zbiorem liczb wymiernych \mathbb{Q} (uporządkowanym tak jak zwykle). Niech $f : Ku \xrightarrow[\text{na}]{1-1} \mathbb{Q}$ będzie izomorfizmem. Dla $er \in Er$ przez $er \downarrow$ oznaczmy zbiór $\{ku \in Ku \mid ku < er\}$.

Rozpatrzmy przekształcenie $F : Er \rightarrow \mathbb{R}$, dane wzorem $F(er) = \sup f(er \downarrow)$. Przekształcenie to jest różnowartościowe, bo jeśli $x < y$ to $x < ku_1 < ku_2 < y$ dla pewnych $ku_1, ku_2 \in Ku$. Wtedy dla

dowolnego $d \in x \downarrow$ mamy $f(d) < f(ku_1)$, skąd $F(x) \leq f(ku_1) < f(ku_2) \leq F(y)$.

Analogicznie, jeśli $G(r) = \sup f^{-1}(\{q \in \mathbb{Q} \mid q < r\})$ dla $r \in \mathbb{R}$, to $G : \mathbb{R} \xrightarrow{1-1} Er$. Dowód jest w zasadzie taki sam. A więc pokazaliśmy, że $\overline{Er} \leq \overline{\mathbb{R}}$ oraz $\overline{\mathbb{R}} \leq \overline{Er}$. Zatem $\overline{Er} = \mathfrak{C}$.

367: Niech $F : A \xrightarrow{\text{na}} 2^A$, i niech

$$f(a) = \begin{cases} 1, & \text{jeśli } F(a)(a) = 0; \\ 0, & \text{jeśli } F(a)(a) = 1. \end{cases}$$

Skoro F jest surjekcją więc $f = F(b)$ dla pewnego b i mamy sprzeczność: $f(b) = 1 \leftrightarrow f(b) = 0$.

368: Zbiór G jest mocy \aleph_0 . Oczywiście $\overline{B} = \aleph_0$, więc $\overline{G} \geq \aleph_0$, bo $B \subseteq G$. Pokażemy, że $\overline{G} \leq \aleph_0$. Niech H będzie zbiorem tych ciągów z $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, w których występuje tylko skończenie wiele jedynek. Jako przeliczalna suma przeliczalnych zbiorów

$$H_k = \{a \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \geq k. a(n) = 0\},$$

zbiór H sam jest zbiorem przeliczalnym. Ponadto $G \subseteq H$. Istotnie, każda wesoła transformacja zmienia ciąg w co najwyżej dwóch miejscach, aby więc w skończonej liczbie kroków otrzymać element zbioru B , trzeba zacząć od ciągu, który od pewnego miejsca ma same zera.

369a: Niech $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$. Jeśli zbiór $\text{Rg}(f)$ ma największy element, to oznaczymy go przez $\max(f)$. W przeciwnym razie przyjmijmy, że $\max(f) = \infty$, gdzie $\infty \notin \mathbb{N}$. Zdefiniowaliśmy więc funkcję $\max : (\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}) \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Oczywiście $f \sim g$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $\max(f) = \max(g)$. A zatem relacja \sim jest jądrem przekształcenia \max , i jako taka jest relacją równoważności.

369b: Funkcja $\text{Max} : (\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N})/\sim \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ określona wzorem $\text{Max}([f]_{\sim}) = \max(f)$ jest bijekcją. Istotnie, dla $f \not\sim g$ mamy $\max(f) \neq \max(g)$, więc Max jest różnowartościowa. Ponadto, dla każdego $x \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ istnieje taka funkcja f_x , że $\max(f_x) = x$. Wystarczy przyjąć $f_{\infty} = \lambda n. n$ oraz $f_x = \lambda n. x$ dla $x \in \mathbb{N}$. Zatem Max jest także „na”. A więc moc $(\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N})/\sim$ jest taka jak moc $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$, czyli \aleph_0 .

369c: Są to liczby 1 i \mathfrak{C} . Klasa $[\lambda n. 0]_{\sim}$ jest jednoelementowa, przypuśćmy więc, że funkcja f nie jest stale równa zeru. Dla $\alpha \in \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}$, rozpatrzmy taką funkcję $F(\alpha) : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, że

$$F(\alpha)(x) = \begin{cases} \alpha(x/2), & \text{jeśli } x \text{ parzyste;} \\ f((x-1)/2), & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

dla dowolnego $x \in \mathbb{N}$. Nieformalnie, w ciągu $F(\alpha)$ na przemian występują wyrazy ciągu α (na miejscach parzystych) i ciągu f (na miejscach nieparzystych). Ponieważ do $\text{Rg}(f)$ należy choć jedna liczba różna od zera, więc mamy $\max F(\alpha) = \max f$, czyli $F(\alpha) \in [f]_{\sim}$. Operacja $F : (\mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}) \rightarrow [f]_{\sim}$ jest różnowartościowa, bo dla $\alpha(k) \neq \beta(k)$ mamy $F(\alpha)(2k) \neq F(\beta)(2k)$. Stąd moc zbioru $[f]_{\sim}$ jest co najmniej \mathfrak{C} . Ale $[f]_{\sim} \subseteq \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, a mocą zbioru $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ też jest \mathfrak{C} , więc z twierdzenia Cantora-Bernsteina ostatecznie wnioskujemy, że $[f]_{\sim} = \mathfrak{C}$.

369d: Tak, selektor ilorazu :)

370a: Elementem największym jest klasa wszystkich funkcji nieograniczonych, najmniejszym jest klasa funkcji stale równej zeru.

370b, 370c, 370d: Funkcja Max z rozwiązania 369b jest izomorfizmem porządków $\langle \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}/\sim, \preceq \rangle$ i $\langle \mathbb{N} \cup \{\infty\}, \leq \rangle$, gdzie $n \leq \infty$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$, a dla liczb naturalnych relacja \leq jest określona jak zwykle. Zatem wszystkie własności porządku $\langle \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}/\sim, \preceq \rangle$ są takie same jak własności porządku $\langle \mathbb{N} \cup \{\infty\}, \leq \rangle$. W szczególności nasz porządek jest dobry (jest liniowy i jest dobrym ufundowaniem). Skoro każdy niepusty podzbiór ma element najmniejszy, to ten element jest jego kresem dolnym. Zbiór pusty też ma kres dolny. Jest nim ∞ . Mamy więc kratę zupełną, w której są też wszystkie kresy górne.

371b: Iloraz $(\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N})/\sim$ jest mocy \aleph_0 , a to z następujących powodów: Po pierwsze, wszystkie funkcje nieograniczone są w tej samej klasie. Po drugie, niech f będzie ograniczona i niech M_f będzie największe w $\text{Rg}(f)$. Natomiast m_f niech będzie największą wartością w $\text{Rg}(f)$, przyjmowaną dla nieskończenie wielu argumentów. Jeśli $M_f \neq m_f$, to niech $f'(M_f)$ będzie największą taką liczbą x , że $f(x) = M_f$ (ostatni argument, dla którego f przyjmuje swoją największą wartość). Dalej, dla $y \in \{m_f + 1, \dots, M_f - 1\}$ niech $f'(y)$ będzie największą taką liczbą, że $f(f'(y)) \geq y$ oraz $f'(y) \geq f'(y + 1)$. Indeksami funkcji f nazwiemy skończony ciąg $\langle m_f, f'(m_f + 1), \dots, f'(M_f) \rangle$. Dwie funkcje o takim samym indeksie muszą być w relacji.

371c: Wszystkie skończone (oprócz zera) i \mathfrak{C} . Jeśli funkcja f nie jest prawie wszędzie równa zeru, to

niech k będzie największą wartością przyjmowaną nieskończenie wiele razy. Wtedy wszystkie funkcje $\lambda x. \text{if } x \text{ nieparzyste then } k \text{ else } \alpha(x/2)$, gdzie $\alpha \in 2^{\mathbb{N}}$, należą do klasy wyznaczonej przez f . Jeśli $f(n) = 0$ prawie wszędzie, to z poprzedniej części zadania wynika, że klasa jest skończona. Klasę o dokładnie $n + 1$ elementach wyznacza funkcja $f(0) = 0, f(1) = n, f(x) = 0$ dla $x > 1$.

373: Relacja r_1 nie jest przechodnia, a więc nie jest relacją równoważności. Istotnie, niech $f(n) = n, g(n) = n + 1$ oraz $h(n) = \lceil \frac{n+1}{2} \rceil$, dla $n \in \mathbb{N}$. Wtedy $\langle f, g \rangle \in r_1$ (bo $f^{-1}(\{1\})$ i $g^{-1}(\{1\})$ są jednoelementowe) oraz $\langle g, h \rangle \in r_1$ (bo $g^{-1}(\{0\}) = h^{-1}(\{0\}) = \emptyset$). Ale $\langle f, h \rangle \notin r_1$, bo przeciwobrazy jednoelementowych zbiorów przy funkcji f są zawsze jednoelementowe, a przy funkcji h są (z wyjątkiem $h^{-1}(\{0\})$) dwuelementowe.

Relacje r_2 i r_3 są przechodnie, a więc są relacjami równoważności, bo wiadomo, że są zwrotne i symetryczne. Aby sprawdzić przechodność relacji r_2 , założymy, że $\langle f, g \rangle, \langle g, h \rangle \in r_2$. Istnieją wtedy takie $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, że $f^{-1}(\{n\}) \sim g^{-1}(\{n\})$ dla wszystkich $n > n_1$ oraz $g^{-1}(\{n\}) \sim h^{-1}(\{n\})$ dla wszystkich $n > n_2$. Dla $n > \max\{n_1, n_2\}$ mamy więc też $f^{-1}(\{n\}) \sim h^{-1}(\{n\})$, czyli $\langle f, g \rangle \in r_2$. Podobnie (ale łatwiej) otrzymamy przechodność dla r_3 .

Funkcje stałe wyznaczają jednoelementowe klasy abstrakcji relacji r_3 i są to jedyne skończone klasy. Przypuśćmy bowiem, że funkcja f nie jest stała. Istnieją wtedy takie $n, a \in \mathbb{N}$, że $f(n) = a$ oraz zbiór $B = \{m \mid f(m) \neq a\}$ jest nieskończony. Dla dowolnego $m \in B$ weźmy taką funkcję g_m , że $g_m(m) = a, g_m(n) = f(m)$ oraz $g_m(x) = f(x)$ dla $x \neq m, n$. Wszystkie funkcje g_m dla $m \in B$ są w klasie $[f]_{r_3}$.

Relacja r_2 nie ma skończonych klas abstrakcji. Jeśli f nie jest stała, to $[f]_{r_3} \subseteq [f]_{r_2}$, bo $r_3 \subseteq r_2$. Skoro klasa $[f]_{r_3}$ jest nieskończona, to tym bardziej klasa $[f]_{r_2}$ jest nieskończona. Zostają więc funkcje stałe. Ale wszystkie funkcje stałe należą do tej samej klasy $[\lambda x. 0]_{r_2}$.

374: Weźmy dowolny łańcuch (ze względu na inkluzję) zbiorów parami spełnialnych zawierających A . Pokażemy, że suma tego łańcucha jest zbiorem parami spełnialnym. W tym celu rozpatrzmy dwie formuły α i β należące do tej sumy. Wówczas muszą istnieć takie zbiory X i Y , należące do łańcucha, że $\alpha \in X$ i $\beta \in Y$. Ale ponieważ to jest łańcuch, to mamy $X \subseteq Y$ lub $Y \subseteq X$, zatem $\alpha, \beta \in X$ lub $\alpha, \beta \in Y$. Ponieważ zarówno X jak Y są parami spełnialne, więc α i β muszą być współspełnialne.

Pokazaliśmy, że suma każdego łańcucha zbiorów parami spełnialnych jest parami spełnialna. Suma zawiera wszystkie elementy łańcucha, jest więc jego ograniczeniem górnym w rodzinie wszystkich zbiorów parami spełnialnych. A więc każdy łańcuch w tej rodzinie ma ograniczenie górne. Z lematu Kuratowskiego-Zorna, zbiór wszystkich zbiorów parami spełnialnych zawierających A ma zatem element maksymalny Z . Niech teraz $\alpha \notin Z$. Jeśli każda koniunkcja $\alpha \wedge \beta$, dla $\beta \in Z$ jest spełnialna, to zbiór $Z \cup \{\alpha\}$ jest parami spełnialny. Jest to sprzeczne z maksymalnością zbioru Z .

375a: Stosujemy lemat Kuratowskiego-Zorna do (uporządkowanej przez inkluzję) rodziny P wszystkich parterowych podzbiorów częściowo uporządkowanego zbioru A . Rozpatrzmy dowolny łańcuch G w $\langle P, \subseteq \rangle$. Jego suma $\bigcup G$ jest parterowym podzbiorem zbioru A . Istotnie, jeśli $L \subseteq \bigcup G$ jest łańcuchem w A i ma trzy różne elementy x, y, z , to każdy z tych elementów należy do pewnego zbioru z łańcucha G , na przykład $x \in X, y \in Y, z \in Z$, gdzie $X, Y, Z \in G$. Jeden ze zbiorów X, Y, Z zawiera pozostałe, niech to będzie na przykład X . Wtedy $x, y, z \in X \in P$ i mamy sprzeczność, bo X jest parterowy.

A zatem $\bigcup G \in P$. Skoro każdy $X \in G$ jest zawarty w $\bigcup G$, więc $\bigcup G$ jest ograniczeniem górnym łańcucha G w $\langle P, \subseteq \rangle$.

Z powyższego wynika, że rodzina $\langle P, \subseteq \rangle$ spełnia założenie lematu Kuratowskiego-Zorna (każdy łańcuch ma ograniczenie górne), a więc istnieje element maksymalny, tj. maksymalny zbiór parterowy.

375b: Każdy antyłańcuch jest parterowy i każdy podzbiór zbioru parterowego jest parterowy. Wystarczy więc wskazać w $P(\mathbb{N})$ antyłańcuch mocy \mathfrak{C} aby wywnioskować, że rodzina parterowych podzbiorów $P(\mathbb{N})$ jest mocy $2^{\mathfrak{C}}$. Taki antyłańcuch wyznaczają nieskończone gałęzie drzewa na rysunku 4.

376a: Funkcja nie jest różnowartościowa, bo podziały $P_1 = \{\{0, 2\}, \mathbb{N} - \{0, 2\}\}$ i $P_2 = \{\{0\}, \mathbb{N} - \{0\}\}$ wyznaczają tę samą wartość funkcji: $f(P_1) = f(P_2) = \{0, 1\}$. Nie jest też „na” bo zero jest najmniejszym elementem swojej klasy podziału, a więc zawsze $0 \in f(P)$. Niemożliwe jest więc np. $f(P) = \{1\}$.

376b: Zauważmy najpierw, że $\text{Rg}(f) = \{X \mid 0 \in X\}$. Istotnie, jeśli $0 \in X$, to można określić podział $P = \{p_i \mid i \in X\}$, gdzie $p_i = \{a \in \mathbb{N} \mid (i \leq a) \wedge (\forall j \in X (i < j \rightarrow a < j))\}$. Wtedy $f(P) = X$. Moc zbioru $\text{Rg}(f)$ jest więc równa mocy zbioru $P(\mathbb{N} - \{0\})$, czyli continuum. Oczywiście zbiory $\mathcal{P}/\ker(f)$ i $\text{Rg}(f)$ są równoliczne – klasy abstrakcji odpowiadają możliwym wartościom funkcji.

376c: Są to wszystkie liczby naturalne większe od zera i continuum. Klasa skończona o n elementach to przeciwobraz $f^{-1}(\{m \mid m \neq n\})$. Istotnie, jeśli P należy do tego przeciwobrazu, to P składa się prawie wyłącznie z singletonów, a jedynym wyjątkiem jest para $\{i, n\}$ dla pewnego $i < n$. Takie i można wybrać na n sposobów, mamy więc klasę n -elementową.

Zauważmy od razu, że jeśli dopełnienie zbioru X jest skończone, to przeciwobraz $f^{-1}(X)$ jest klasą skończoną. Jeśli bowiem $-X \subseteq \{0, \dots, k\}$, to do podziału należą singletony liczb większych od k , a skończony zbiór $-X$ można podzielić tylko na skończenie wiele sposobów.

Jeśli $f(P) = \{0\}$ to $P = \{\mathbb{N}\}$, rozpatrzmy więc przypadek, gdy X ma co najmniej jeden niezerowy element a , oraz $-X$ jest zbiorem nieskończonym. Wtedy klasa $f^{-1}(X)$ ma moc continuum, bo dla każdego podzbioru $Y \subseteq -X \cap (\mathbb{N} - \{0, \dots, a\})$ możemy wyznaczyć podział P_Y , którego składowymi są zbiory $\{a\} \cup Y$ oraz $\{0\} \cup (-X \cap -Y)$ a także singletony $\{i\}$, dla wszystkich $i \in X$ oprócz 0 i a . Podziały P_Y są różne dla różnych Y , ale zawsze $f(P_Y) = X$. A więc moc naszej klasy jest co najmniej taka jak moc zbioru $\mathcal{P}(-X \cap (\mathbb{N} - \{0, \dots, a\}))$. Z drugiej strony, moc ta jest co najwyżej taka, jak moc zbioru wszystkich relacji równoważności w \mathbb{N} .

377a: Funkcja Φ nie jest różnowartościowa, np. $\Phi(\{\varepsilon\}) = \varepsilon = \Phi(\emptyset)$. Ale Φ jest „na”, bo dla dowolnego $w \in \{0, 1\}^*$ mamy $\Phi(\{w\}) = w$.

377b: Z powyższego wynika, że zbiór klas abstrakcji relacji $\ker(\Phi)$ ma moc \aleph_0 . Mocą każdej klasy jest \mathfrak{C} . Istotnie, niech $[B]_{\ker(\Phi)}$ będzie dowolną klasą abstrakcji i niech $w = \Phi(B)$. Określimy funkcję różnowartościową $W_w : \mathcal{P}(\{0, 1\}^*) \rightarrow \mathcal{P}(\{0, 1\}^*)$ w taki sposób, by $\Phi(W_w(A)) = w$, dla każdego A .

$$W_w(A) = \{w\} \cup \{w0v \mid v \in A\}.$$

Zatem każdy ze zbiorów $W_w(A)$ jest w relacji z B , więc $\overline{[B]_{\ker(\Phi)}} \geq \mathfrak{C}$. Ograniczenie górne wynika z tego, że $\overline{\mathcal{P}(\{0, 1\}^*)} = \mathfrak{C}$.

377c: Nie. Zauważmy najpierw, że jeśli A posiada element najmniejszy, to jest on jego kresem dolnym. Zatem A nie posiada elementu najmniejszego. Niech $w = \inf(A)$. Ponieważ $w \notin A$, więc $w0$ będzie większym od w ograniczeniem dolnym A , co jest w sprzeczności z definicją kresu dolnego.

Istotnie, dla dowolnego $v \in A$, skoro $w \preceq v$, to albo v różni się od w na pozycji mniejszej bądź równej $|w|$ albo w jest właściwym prefiksem v . W obu przypadkach $w0 \preceq v$.

377d: Mocą tego zbioru jest \aleph_0 . Wystarczy pokazać, że jest on nieskończony, bo wszystkich słów jest przeliczalnie wiele. Ponieważ $0^n \preceq 11111011010$, dla każdego n , więc każdy ze zbiorów postaci $Z_n = \{0^n, 11111011010\}$ jest ograniczony przez 11111011010 i ponadto $\Phi(Z_n) = 0^n$, zatem obraz ten istotnie jest nieskończony.

378a: Zwrotność relacji $F(A)$ jest oczywista. Aby udowodnić przechodniość, weźmy dowolne funkcje $f, g, h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, takie że $\langle f, g \rangle \in F(A)$ oraz $\langle g, h \rangle \in F(A)$. Wtedy dla $a \in A$ mamy $f(a) \leq g(a) \leq h(a)$, natomiast dla $a \notin A$ mamy $h(a) \leq g(a) \leq f(a)$, czyli $\langle f, h \rangle \in F(A)$. Antysymetria wynika z tego, że $\langle f, g \rangle \in F(A)$ oraz $\langle g, f \rangle \in F(A)$ implikuje $f(a) = g(a)$ zarówno dla $a \in A$, jak $a \notin A$. A więc $f = g$.

378b: Szukamy zbioru $F^{-1}(L) = \{A \subseteq \mathbb{N} \mid F(A) \in L\}$, czyli pytamy dla jakich $A \subseteq \mathbb{N}$ relacja $F(A)$ jest liniowym porządkiem. Otóż nigdy tak nie jest, bo jeden ze zbiorów A i $-A$ ma co najmniej dwa różne elementy a, b . Wtedy funkcje $f = \lambda x. \text{if } x = a \text{ then } 0 \text{ else } 1$ oraz $g = \lambda x. \text{if } x = b \text{ then } 0 \text{ else } 1$ są nieporównywalne. A więc $F^{-1}(L) = \emptyset$.

378c: Tym razem pytamy które $F(A)$ mają element minimalny. Jeśli $A = \mathbb{N}$ to elementem minimalnym ze względu na relację $F(A)$ jest funkcja $\lambda x. 0$. W przeciwnym razie element minimalny nie istnieje. Istotnie, jeśli $a \notin A$, to dla dowolnej funkcji f zachodzi $\langle f', f \rangle \in F(A)$, gdzie f' jest określona tak: $f' = \lambda x. \text{if } x = a \text{ then } f(a) + 1 \text{ else } f(a)$. A zatem $F^{-1}(M) = \{\mathbb{N}\}$.

378d: Pokażemy, że $F(A)$ nigdy nie jest dobrym ufundowaniem (skąd $F^{-1}(D) = \emptyset$) bo zawsze istnieje ciąg malejący ze względu na $F(A)$. Istotnie, jeśli $a \notin A$, to ciąg malejący tworzą funkcje $f_n = \lambda x. \text{if } x = a \text{ then } n \text{ else } 0$. Pozostaje przypadek $A = \mathbb{N}$. Wtedy ciąg malejący tworzą funkcje $g_n = \lambda x. \text{if } x \leq n \text{ then } 0 \text{ else } 1$.

379a: Nie. Na przykład $\emptyset \neq G(f)$ dla każdej funkcji f . Gdyby bowiem $G(f) = \emptyset$, to dla wszystkich liczb $n \in \mathbb{N}$ mielibyśmy $f(n) > f(n+1)$, czyli istniałby nieskończony ciąg malejący w \mathbb{N} .

379b: Nie. Na przykład jeśli $f = \lambda x. x$ i $g = \lambda x. x + 1$, to $G(f) = G(g) = \mathbb{N}$.

379c: Zbiór ilorazowy jądra jest zawsze równoliczny ze zbiorem wartości funkcji, wystarczy więc zbadać moc $\text{Rg}(G)$. Ponieważ $\text{Rg}(G) \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$, więc $\overline{\text{Rg}(G)} \leq \mathfrak{C}$. Z drugiej strony, jeśli A jest dowolnym podzbiorem zbioru liczb parzystych P , to dla funkcji $f = \lambda x. \text{if } (x > 0 \wedge x - 1 \in A) \text{ then } 0 \text{ else } 1$ zachodzi $\mathbb{N} - A = G(f)$. Zatem $\overline{\text{Rg}(G)} \geq \overline{\mathcal{P}(P)} = \mathfrak{C}$ i w końcu $\overline{\text{Rg}(G)} = \mathfrak{C}$.

379d: Niech $G(f) = A$. Dla dowolnego $\alpha : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}$ niech $\bar{\alpha}(n)$ oznacza sumę $\alpha(0) + \dots + \alpha(n)$. Ciąg $\bar{\alpha} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ jest niemalejący i dla $\alpha \neq \beta$ mamy $\bar{\alpha} \neq \bar{\beta}$. Teraz niech $f_\alpha(n) = 2f(n) + \bar{\alpha}(n)$. Zauważmy, że $G(f_\alpha) = A$, czyli $\langle f_\alpha, f \rangle \in \ker(G)$. Istotnie, jeśli $f(n) \leq f(n+1)$, to

$$f_\alpha(n) = 2f(n) + \bar{\alpha}(n) \leq 2f(n+1) + \bar{\alpha}(n+1) = f_\alpha(n+1).$$

Natomiast jeśli $f(n) > f(n+1)$, to $f(n) - f(n+1) \geq 1$ i $\bar{\alpha}(n) - \bar{\alpha}(n+1) \geq -1$, więc $f_\alpha(n) - f_\alpha(n+1) \geq 1$, czyli $f_\alpha(n) > f_\alpha(n+1)$. Udowodniliśmy, że $f_\alpha \in [f]_{\ker(G)}$. Ale jeśli $\alpha \neq \beta$ to także $f_\alpha \neq f_\beta$, co oznacza, że moc klasy $[f]_{\ker(G)}$ jest co najmniej równa mocy zbioru $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, czyli \mathfrak{C} . Ponieważ $[f]_{\ker(G)} \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, więc moc naszej klasy jest równa \mathfrak{C} .

380a: Niech \mathcal{G} oznacza zbiór wszystkich funkcji o własności (a). Zauważmy, że jeśli $f \in \mathcal{G}$ to dla dowolnego A zachodzi równość $f(A) = \bigcup \{f(\{x\}) \mid x \in A\}$. Zatem każda funkcja z \mathcal{G} jest jednoznacznie wyznaczona przez swoje obcięcie do argumentów jednoelementowych. Jeśli więc $\mathcal{P}_1(\mathbb{N}) = \{\{x\} \mid x \in \mathbb{N}\}$, to mamy injekcję $\vartheta : \mathcal{G} \xrightarrow{1-1} (\mathcal{P}_1(\mathbb{N}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ daną przez $\vartheta(f) = f|_{\mathcal{P}_1(\mathbb{N})}$. Zbiór $\mathcal{P}_1(\mathbb{N}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$ jest oczywiście tej samej mocy co zbiór $\mathbb{N} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$, czyli mocy $\mathfrak{C}^{\aleph_0} = \mathfrak{C}$. Zatem $\overline{\mathcal{G}} \leq \mathfrak{C}$. Z drugiej strony mamy też injekcję $\varpi : (\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}) \xrightarrow{1-1} \mathcal{G}$ daną wzorem $\varpi(\alpha) = \lambda X. \bigcup \{\{\alpha(n)\} \mid n \in X\}$, a więc $\overline{\mathcal{G}} \geq \overline{\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}} = \mathfrak{C}$. W konsekwencji, $\overline{\mathcal{G}} = \mathfrak{C}$.

380b: Niech R będzie taką rodziną nieskończonych podzbiorów \mathbb{N} , w której każde dwa różne zbiory mają skończone przecięcie i która jest mocy \mathfrak{C} . (To, że taka rodzina istnieje, wynika z rozwiązania zadania 359f.) Dla dowolnego $Z \subseteq R$ określimy funkcję

$$f_Z = \lambda A. \text{if } (\exists D \in Z. \overline{D \cap A} = \aleph_0) \text{ then } \{0\} \text{ else } \emptyset.$$

Zauważmy, że jeśli $f_Z(A \cup B) = \{0\}$ to zbiór $D \cap (A \cup B) = (D \cap A) \cup (D \cap B)$ jest nieskończony. Ale wtedy jeden ze składników $D \cap A$ i $D \cap B$ musi być nieskończony, więc $f_Z(A) = \{0\}$ lub $f_Z(B) = \{0\}$. Stąd łatwo wynika, że funkcje postaci f_Z spełniają warunek (b). Dalej, jeśli $Z \neq Y$, np. $D \in Z - Y$, to $f_Z(D) = \{0\}$ ale $f_Y(D) = \emptyset$, skąd $f_Z \neq f_Y$. Zatem funkcji o własności (b) jest co najmniej tyle ile podzbiorów R , czyli $2^{\mathfrak{C}}$. Ponieważ wszystkich funkcji z $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ do $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ też jest $2^{\mathfrak{C}}$, więc taka jest szukana moc.