Podstawy matematyki dla informatyków

Wykład 9

1 grudnia 2011

Izomorfizmy porządków

Definicja

Mówimy, że zbiory częściowo uporządkowane $\langle A, \leq \rangle$ i $\langle B, \leq \rangle$ są *izomorficzne*, gdy istnieje taka bijekcja $f : A \xrightarrow[\text{na}]{1-1} B$, że

$$a \leq a' \quad \Leftrightarrow \quad f(a) \leq f(a'),$$

dla dowolnych $a, a' \in A$. Piszemy $\langle A, \leq \rangle \approx \langle B, \leq \rangle$ lub $A \approx B$. Funkcję f nazywamy *izomorfizmem*.

○

Izomorfizmy porządków

Jeśli dwa zbiory częściowo uporządkowane są izomorficzne i jeden z nich

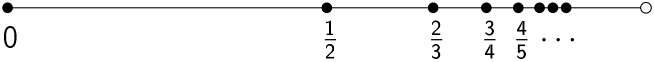
- ma element najmniejszy, największy, maksymalny, minimalny;[1]
- jest liniowo uporządkowany;
- jest cpo, jest kratą zupełną;
- ma jakąś inną własność *porządkową*,

to ten drugi też.

[1] Niepotrzebne skreślić.

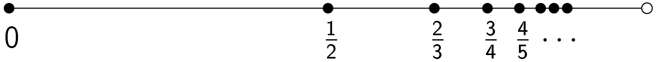
Przykłady

- Zbiór $\mathbb{N}$ jest izomorficzny z $\{1 - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} - \{0\}\}$...

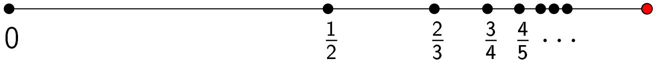


Przykłady

- Zbiór $\mathbb{N}$ jest izomorficzny z $\{1 - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} - \{0\}\}\ldots$

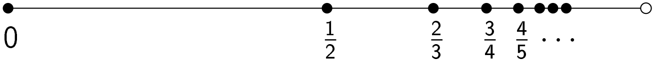


- …ale nie ze zbiorem $\{1 - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} - \{0\}\} \cup \{1\}$, …

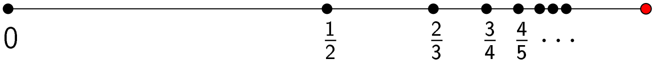


Przykłady

- Zbiór $\mathbb{N}$ jest izomorficzny z $\{1 - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} - \{0\}\}\ldots$



- $\ldots$ale nie ze zbiorem $\{1 - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} - \{0\}\} \cup \{1\}$, $\ldots$



- $\ldots$ani ze zbiorami $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$.

Uporządkowanie gęste

Definicja

Zbiór liniowo uporządkowany A jest *gęsty*, gdy dla dowolnych $a, b \in A$, jeśli $a < b$ to $a < c < b$ dla pewnego c.

Uporządkowanie gęste

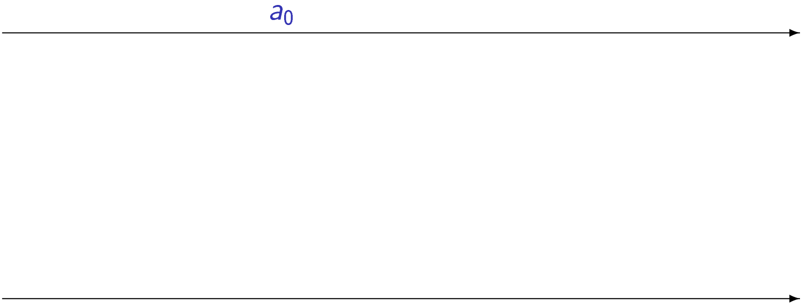
Definicja

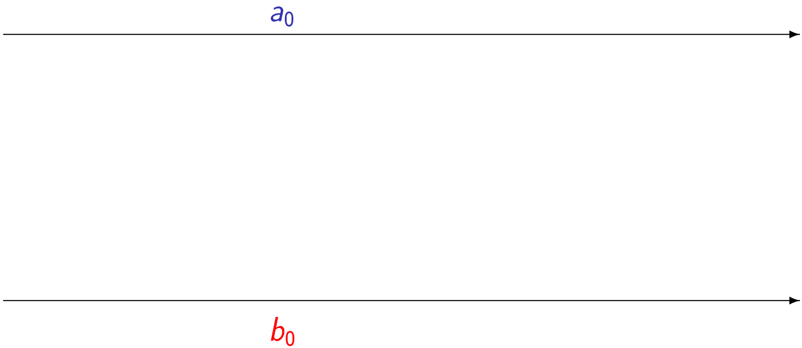
Zbiór liniowo uporządkowany A jest *gęsty*, gdy dla dowolnych $a, b \in A$, jeśli $a < b$ to $a < c < b$ dla pewnego c.

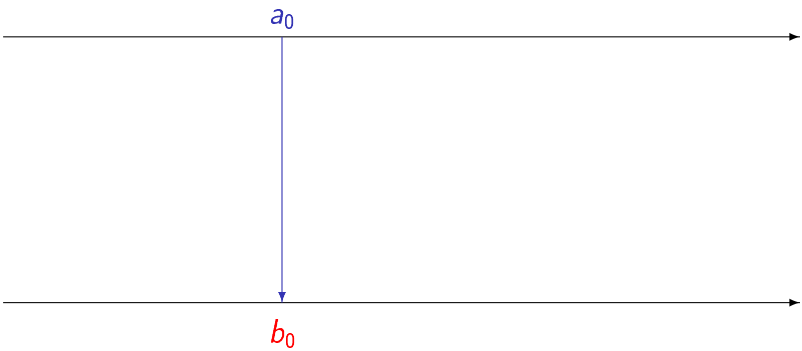
Twierdzenie

1. *Każdy przeliczalny zbiór liniowo uporządkowany jest izomorficzny z pewnym podzbiorem zbioru $\mathbb{Q}$ wszystkich liczb wymiernych.*
2. *Każdy przeliczalny zbiór gęsty bez elementu największego i najmniejszego jest izomorficzny z $\mathbb{Q}$.*

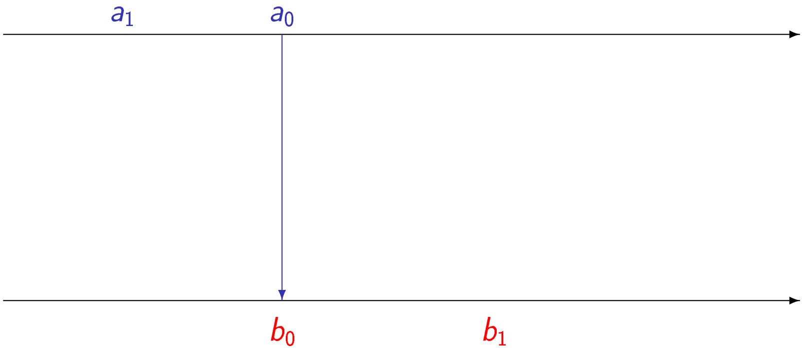
○


a_0

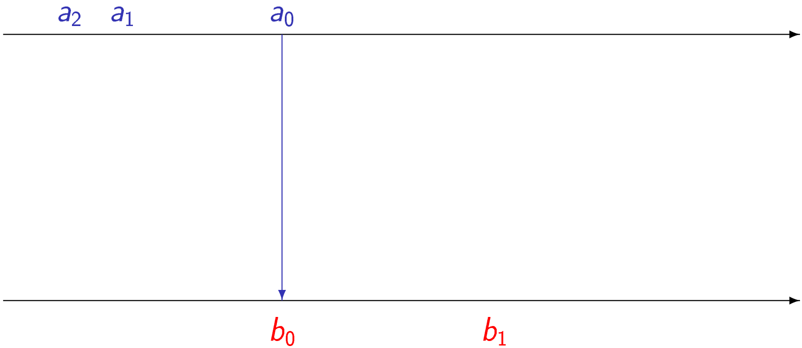

a_0
b_0

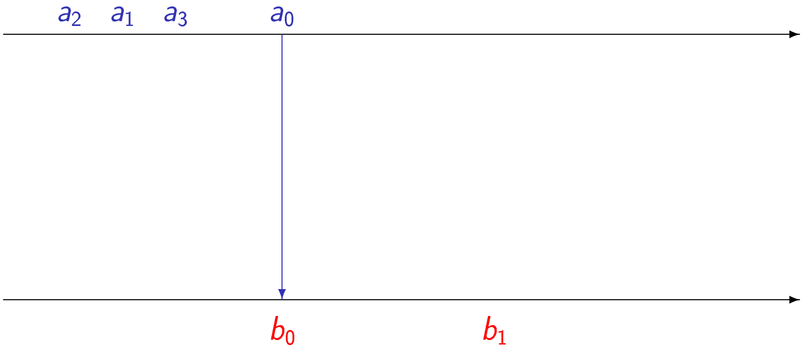


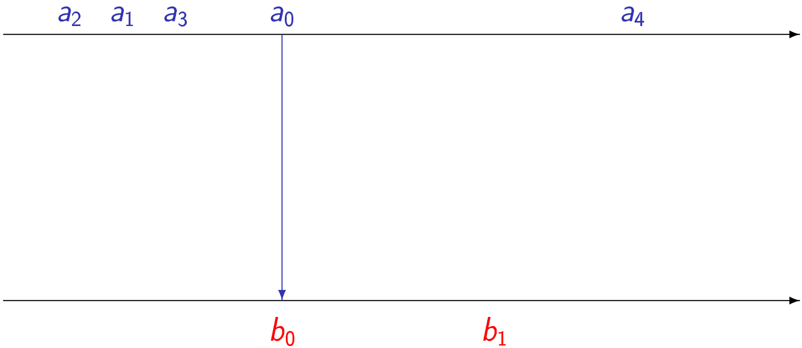
a_0
b_0

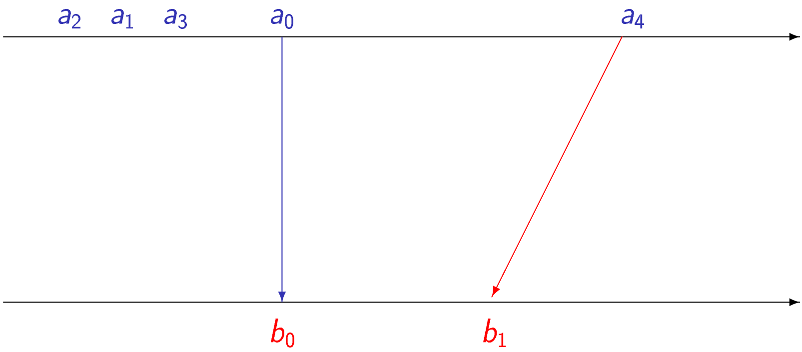


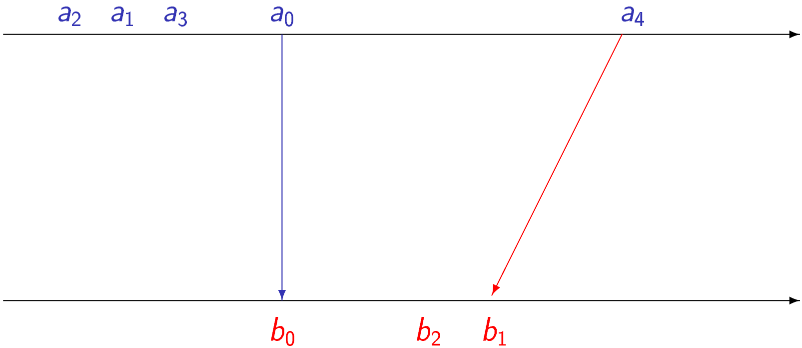
a_1
a_0
b_0
b_1


a_2
a_1
a_0
b_0
b_1

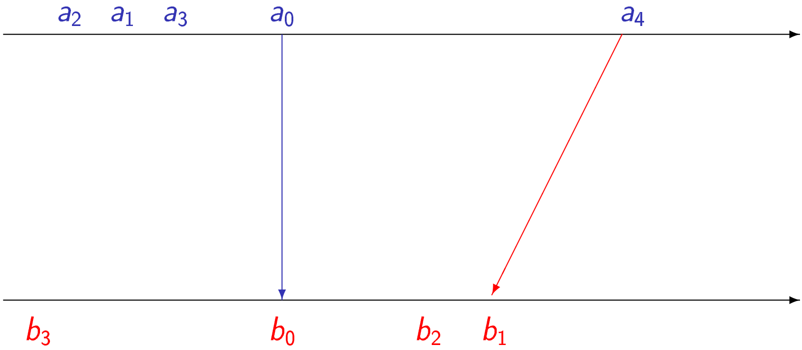

a_2
a_1
a_3
a_0
b_0
b_1

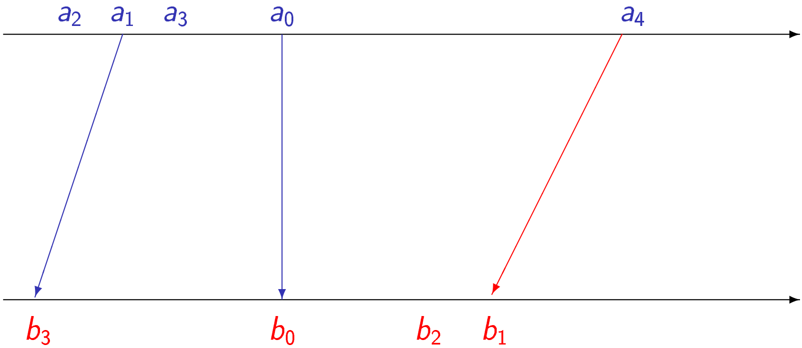

a_2
a_1
a_3
a_0
a_4
b_0
b_1

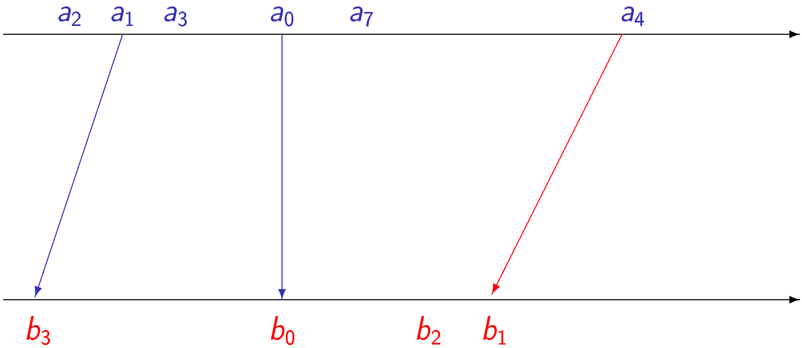

a_2 a_1 a_3 a_0 a_4
b_0 b_1

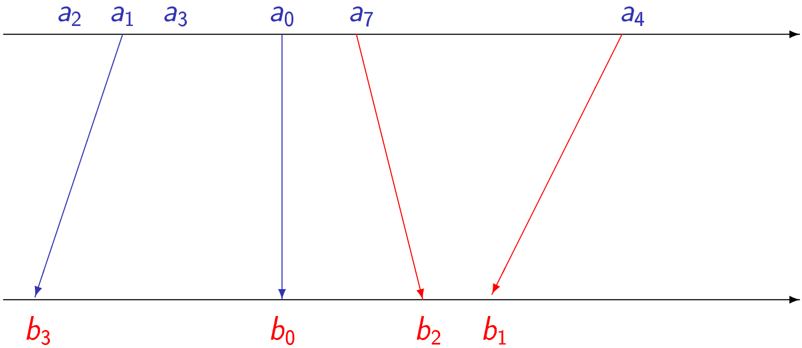


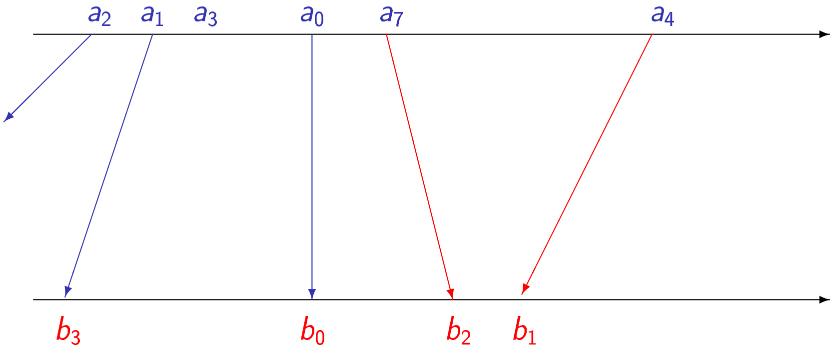
a_2 a_1 a_3 a_0 a_4
b_0 b_2 b_1


a_2 a_1 a_3 a_0 a_4
b_3 b_0 b_2 b_1

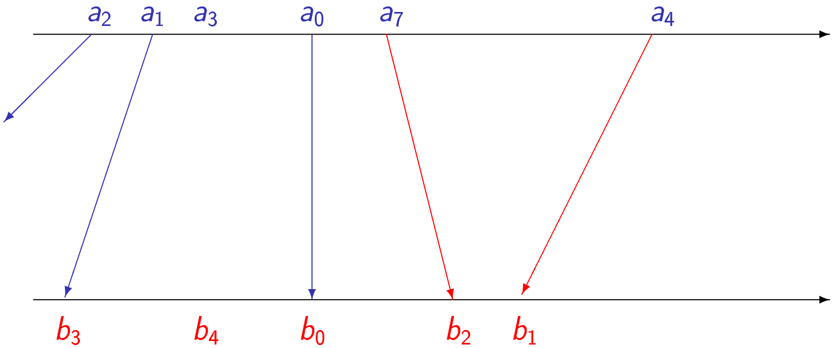

a_2
a_1
a_3
a_0
a_4
b_3
b_0
b_2
b_1

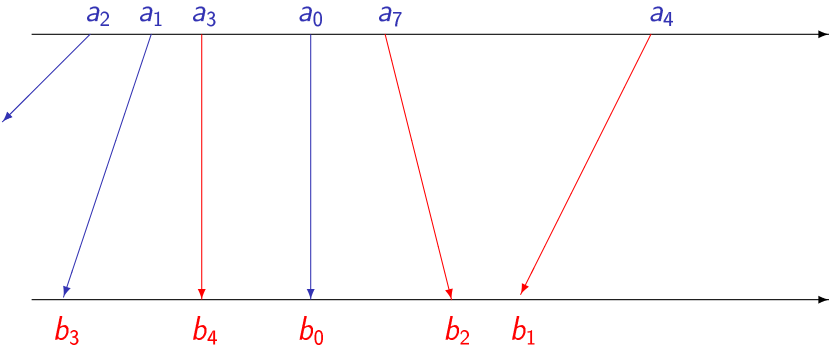

a_2
a_1
a_3
a_0
a_7
a_4
b_3
b_0
b_2
b_1


a_2
a_1
a_3
a_0
a_7
a_4
b_3
b_0
b_2
b_1



a_2
a_1
a_3
a_0
a_7
a_4
b_3
b_0
b_2
b_1


a_2 a_1 a_3 a_0 a_7 a_4
b_3 b_4 b_0 b_2 b_1



a_2
a_1
a_3
a_0
a_7
a_4
b_3
b_4
b_0
b_2
b_1

Uporządkowanie ciągłe

- Zbiór liniowo uporządkowany jest *ciągły*, gdy każdy jego podzbiór ograniczony z góry ma kres górny.
- Przykład: zbiór liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$.

Uporządkowanie ciągłe

- Zbiór liniowo uporządkowany jest *ciągły*, gdy każdy jego podzbiór ograniczony z góry ma kres górny.
- Przykład: zbiór liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$.
- Podzbiór A zbioru liniowo uporządkowanego B jest *gęsty w B*, gdy zachodzi warunek

$$\forall a, b \in B(a < b \to \exists c \in A(a < c < b)).$$

- Przykład: podzbiór $\mathbb{Q}$ zbioru $\mathbb{R}$.

○

Twierdzenie

Jeśli liniowo uporządkowany zbiór A *(bez końców) jest ciągły i ma przeliczalny podzbiór gęsty* B*, to* $A \approx \mathbb{R}$.

Twierdzenie

Jeśli liniowo uporządkowany zbiór A (bez końców) jest ciągły i ma przeliczalny podzbiór gęsty B, to $A \approx \mathbb{R}$.

Dowód: Wtedy istnieje izomorfizm $\varphi : \mathbb{Q} \to B$.
Można go rozszerzyć do izomorfizmu $\overline{\varphi} : \mathbb{R} \to A$, bo każda liczba $a \in \mathbb{R}$ jest kresem górnym pewnego zbioru $X \subseteq \mathbb{Q}$.
Przyjmujemy wtedy $\overline{\varphi}(a) = \sup \varphi(X)$. □

Wniosek

- *Zbiory* $\mathbb{Q}$ *oraz* $\mathbb{Q} - \{0\}$ *są izomorficzne.*

Wniosek

- *Zbiory* $\mathbb{Q}$ *oraz* $\mathbb{Q} - \{0\}$ *są izomorficzne.*
- *Zbiory* $\mathbb{R}$ *oraz* $\mathbb{R} - \{0\}$ *nie są izomorficzne.*

Dobre ufundowanie

Niech $\langle A, \leq \rangle$ będzie zbiorem częściowo uporządkowanym.
Jeśli każdy niepusty podzbiór zbioru A ma element minimalny,
to mówimy, że $\langle A, \leq \rangle$ jest *częściowym dobrym porządkiem*,
lub, że A jest *dobrze ufundowany*.

Jeśli ponadto porządek $\langle A, \leq \rangle$ jest liniowy,
to jest to *dobry porządek*.

(Wtedy każdy niepusty podzbiór A ma element najmniejszy.)

○

Przykłady

- Zbiór $\mathbb{N}$ jest dobrze uporządkowany przez zwykłe $\leq$.

Przykłady

- Zbiór $\mathbb{N}$ jest dobrze uporządkowany przez zwykłe $\leq$.
- Zbiór $\mathbb{N}$ jest dobrze ufundowany przez podzielność.

Przykłady

- Zbiór $\mathbb{N}$ jest dobrze uporządkowany przez zwykłe $\leq$.
- Zbiór $\mathbb{N}$ jest dobrze ufundowany przez podzielność.
- Zbiory $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ nie są dobrze ufundowane.

$\circ$

Inna definicja dobrego ufundowania

Fakt

Zbiór $\langle A, \leq \rangle$ *jest dobrze ufundowany wtedy i tylko wtedy, gdy nie istnieje w nim ciąg malejący, tj. taki podzbiór* $\{a_i \mid i \in \mathbb{N}\}$, *że* $a_{i+1} < a_i$ *dla dowolnego* i.

Inna definicja dobrego ufundowania

Fakt

Zbiór $\langle A, \leq \rangle$ jest dobrze ufundowany wtedy i tylko wtedy, gdy nie istnieje w nim ciąg malejący, tj. taki podzbiór $\{a_i \mid i \in \mathbb{N}\}$, że $a_{i+1} < a_i$ dla dowolnego i.

Dowód: $(\Rightarrow)$ Gdyby taki istniał, to by nie miał elementu minimalnego.

Inna definicja dobrego ufundowania

Fakt

Zbiór $\langle A, \leq \rangle$ jest dobrze ufundowany wtedy i tylko wtedy, gdy nie istnieje w nim ciąg malejący, tj. taki podzbiór $\{a_i \mid i \in \mathbb{N}\}$, że $a_{i+1} < a_i$ dla dowolnego i.

Dowód: ($\Rightarrow$) Gdyby taki istniał, to by nie miał elementu minimalnego.

($\Leftarrow$) Przypuśćmy, że niepusty podzbiór $B \subseteq A$ nie ma elementu minimalnego. Skoro B jest niepusty to ma jakiś element b_0. On oczywiście nie jest minimalny, więc jest takie $b_1 \in B$, że $b_1 < b_0$. I tak dalej: przez indukcję określamy ciąg malejący $b_0 > b_1 > b_2 > \cdots$ $\square$

Przykłady

- Relacja porządku prefiksowego jest dobrym ufundowaniem zbioru A^*.

Przykłady

- Relacja porządku prefiksowego jest dobrym ufundowaniem zbioru A^*.
- Niech $r = \{\langle \ell,\ n :: \ell \rangle \mid n \in \mathbb{N} \land \ell \in \textbf{list}\}$ i niech $\sqsubseteq$ będzie domknięciem przechodnim relacji $r \cup \mathrm{id}_{\textbf{list}}$. Wtedy $\sqsubseteq$ jest dobrym ufundowaniem typu **list**.

Przykłady

- Relacja porządku prefiksowego jest dobrym ufundowaniem zbioru A^*.
- Niech $r = \{\langle \ell,\ n :: \ell \rangle \mid n \in \mathbb{N} \wedge \ell \in \textbf{list}\}$ i niech $\sqsubseteq$ będzie domknięciem przechodnim relacji $r \cup \mathrm{id}_{\textbf{list}}$. Wtedy $\sqsubseteq$ jest dobrym ufundowaniem typu **list**.
- Jeśli w A są dwa elementy a, b, takie że $a < b$, to porządek leksykograficzny $\preceq$ nie jest dobrym ufundowaniem zbioru A^*.

  (Zbiór $\{a^n b \mid n \in \mathbb{N}\}$ nie ma elementu minimalnego.)

Przykład

Dla dowolnego k, zbiór $\mathbb{N}^k$, złożony z k-krotek liczb naturalnych (słów długości k) jest dobrze uporządkowany przez porządek leksykograficzny.

Dla $k = 2$ ten porządek jest izomorficzny ze zbiorem

$$\{m - \tfrac{1}{n} \mid m, n \in \mathbb{N} - \{0\}\} \subseteq \mathbb{R},$$

uporządkowanym przez zwykły porządek liczb rzeczywistych.

$\circ$

Definicja

Jeśli $a < b$, ale dla żadnego c nie zachodzi $a < c < b$, to:

- element a jest *bezpośrednim poprzednikiem* b;
- element b jest *bezpośrednim następnikiem* a.

Odcinki początkowe

Podzbiór B zbioru częściowo uporządkowanego A nazywamy *odcinkiem początkowym* w A, gdy

$$\forall x, y \in A\,(x \in B \wedge y \leq x \rightarrow y \in B).$$

Odcinki początkowe

Podzbiór B zbioru częściowo uporządkowanego A nazywamy *odcinkiem początkowym* w A, gdy

$$\forall x, y \in A\,(x \in B \land y \leq x \to y \in B).$$

Szczególny przypadek odcinka początkowego to odcinek wyznaczony przez element $x \in A$:

$$\mathcal{O}_A(x) = \{y \in A \mid y < x\}.$$

Dendrologia

Zbiór częściowo uporządkowany $\langle T, \leq \rangle$ nazywamy *drzewem*, gdy spełnia on następujące warunki:

1) Istnieje element najmniejszy.
2) Każdy odcinek $\mathcal{O}_T(x)$ jest skończonym łańcuchem.

Dendrologia

Zbiór częściowo uporządkowany $\langle T, \leq \rangle$ nazywamy *drzewem*, gdy spełnia on następujące warunki:

1) Istnieje element najmniejszy.
2) Każdy odcinek $\mathcal{O}_T(x)$ jest skończonym łańcuchem.

Jeśli łańcuch $\mathcal{O}_T(x)$ ma n elementów, to powiemy, że x jest wierzchołkiem o *wysokości* n. Element najmniejszy, nazywany *korzeniem*, ma wysokość zerową.

Dendrologia

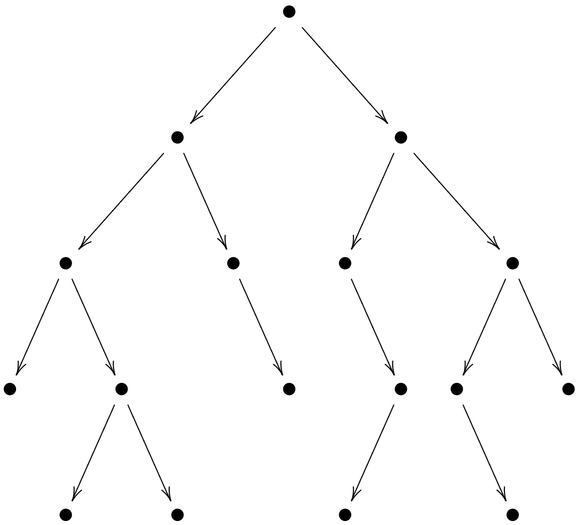
Zbiór częściowo uporządkowany $\langle T, \leq \rangle$ nazywamy *drzewem*, gdy spełnia on następujące warunki:

1) Istnieje element najmniejszy.
2) Każdy odcinek $\mathcal{O}_T(x)$ jest skończonym łańcuchem.

Jeśli łańcuch $\mathcal{O}_T(x)$ ma n elementów, to powiemy, że x jest wierzchołkiem o *wysokości n*. Element najmniejszy, nazywany *korzeniem*, ma wysokość zerową.

Fakt: każde drzewo jest dobrze ufundowane.

Drzewa rosną z góry na dół.



Drzewo słów

Niepusty podzbiór T zbioru A^* nazywamy *drzewem słów*, gdy jest on odcinkiem początkowym w $\langle A^*, \subseteq \rangle$, czyli gdy

$$\forall w, u \in A^* \, (w \cdot u \in T \to w \in T).$$

Przykład: $\{\varepsilon, a, b, aa, ab, ba, bb, aaa, aab, abb,$
$bab, bba, bbb, aaba, aabb, baba, bbab\}$.

Drzewa nad alfabetem dwuliterowym to *drzewa binarne*.
Zbiór $\{a, b\}^*$ to *pełne nieskończone drzewo binarne*.

○

Dendrologia

Twierdzenie

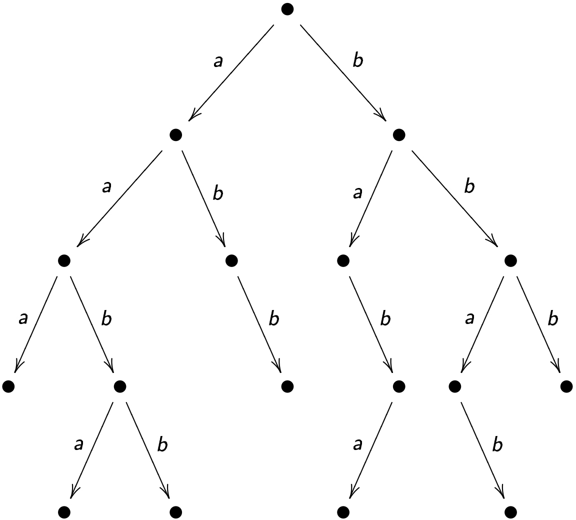
Każde drzewo jest izomorficzne z pewnym drzewem słów.

Dowód: Wybieramy alfabet dostatecznie dużej mocy. Każdemu wierzchołkowi x przypisujemy słowo $f(x)$:

- Korzeniowi przypisujemy słowo puste;
- Jeśli $f(x) = w$, to następnikom x przypisujemy słowa postaci wa, dla różnych liter a.

Funkcja f jest szukanym izomorfizmem. $\square$

Przykład



Definicje

- *Gałęzią* w drzewie T nazywamy dowolny ciąg postaci $\varepsilon = a_0, a_1, a_2, \ldots$ (skończony lub nieskończony) gdzie każde a_{i+1} jest bezpośrednim następnikiem a_i.
- Mówimy, że T jest drzewem *o skończonym rozgałęzieniu*, jeśli każdy element T ma skończenie wiele bezpośrednich następników.

○

Lemat Königa

Twierdzenie

Jeśli T *jest nieskończonym drzewem o skończonym rozgałęzieniu to w* T *jest gałąź nieskończona.*

Lemat Königa

Twierdzenie

Jeśli T jest nieskończonym drzewem o skończonym rozgałęzieniu to w T jest gałąź nieskończona.

Dowód: Dla $a \in T$ niech $T_a = \{b \in T \mid a \leq b\}$.

Lemat Königa

Twierdzenie

Jeśli T jest nieskończonym drzewem o skończonym rozgałęzieniu to w T jest gałąź nieskończona.

Dowód: Dla $a \in T$ niech $T_a = \{b \in T \mid a \leq b\}$.

Przez indukcję konstruujemy gałąź $\varepsilon = a_0, a_1, a_2, \ldots$ tak, aby każde T_{a_i} było nieskończone.

Lemat Königa

Twierdzenie

Jeśli T jest nieskończonym drzewem o skończonym rozgałęzieniu to w T jest gałąź nieskończona.

Dowód: Dla $a \in T$ niech $T_a = \{b \in T \mid a \leq b\}$.

Przez indukcję konstruujemy gałąź $\varepsilon = a_0, a_1, a_2, \ldots$ tak, aby każde T_{a_i} było nieskończone.

Krok bazowy jest poprawny, bo $T_\varepsilon = T$.

Lemat Königa

Twierdzenie

Jeśli T jest nieskończonym drzewem o skończonym rozgałęzieniu to w T jest gałąź nieskończona.

Dowód: Dla $a \in T$ niech $T_a = \{b \in T \mid a \leq b\}$.

Przez indukcję konstruujemy gałąź $\varepsilon = a_0,\ a_1,\ a_2, \ldots$ tak, aby każde T_{a_i} było nieskończone.

Krok bazowy jest poprawny, bo $T_\varepsilon = T$.

Niech T_{a_n} będzie nieskończony. Ponieważ

$$T_{a_n} = \{a_n\} \cup T_{b_1} \cup \cdots \cup T_{b_k},$$

gdzie $b_1, \ldots, b_k$ są bezp. następnikami a_n, więc któreś T_{b_i} jest nieskończone. Można przyjąć $a_{n+1} = b_i$. $\square$

○

Zasada indukcji

Fakt

Niech $\langle A, \leq \rangle$ *będzie dobrze ufundowany i niech* $P \subseteq A$*.*
Załóżmy, że dla dowolnego $a \in A$ *zachodzi implikacja:*

$$\mathcal{O}_A(a) \subseteq P \;\Rightarrow\; a \in P.$$

Wtedy $P = A$*.*

Zasada indukcji

Fakt

Niech $\langle A, \leq \rangle$ będzie dobrze ufundowany i niech $P \subseteq A$. Załóżmy, że dla dowolnego $a \in A$ zachodzi implikacja:

$$\mathcal{O}_A(a) \subseteq P \;\Rightarrow\; a \in P.$$

Wtedy $P = A$.

Dowód: Przypuśćmy, że $P \neq A$. Zbiór $A - P$ jest wtedy niepusty i ma element minimalny a. Z minimalności mamy jednak $\mathcal{O}_A(a) \subseteq P$, więc $a \in P$. $\square$

◦

Dobre porządki

Przykłady dobre:

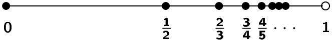
- Zbiór liczb naturalnych $\mathbb{N}$;
- Każdy skończony liniowy porządek;
- Zbiór $\mathbb{N}^k$ uporządkowany leksykograficznie.

Przykłady złe:

- Zbiór liczb całkowitych $\mathbb{Z}$;
- Odcinek $[0, 1]$;
- Zbiór $\mathbb{N}^*$ uporządkowany leksykograficznie.

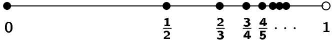
Następujące podzbiory $\mathbb{R}$ są dobrze uporządkowane

- $A = \{1 - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} - \{0\}\}$;

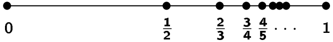


Następujące podzbiory $\mathbb{R}$ są dobrze uporządkowane

- $A = \{1 - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} - \{0\}\}$;

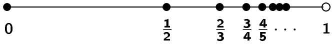


- $A' = \{1 - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} - \{0\}\} \cup \{1\}$;

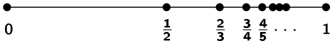


Następujące podzbiory $\mathbb{R}$ są dobrze uporządkowane

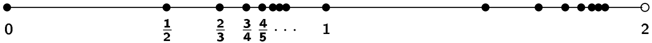
- $A = \{1 - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} - \{0\}\}$;



- $A' = \{1 - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} - \{0\}\} \cup \{1\}$;

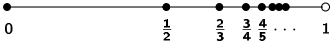


- $A'' = A \cup \{2 - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} - \{0\}\}$;

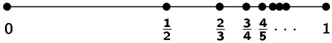


Następujące podzbiory $\mathbb{R}$ są dobrze uporządkowane

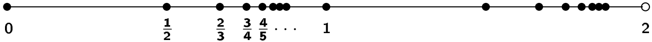
- $A = \{1 - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} - \{0\}\}$;



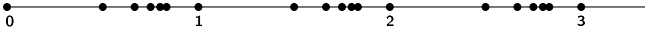
- $A' = \{1 - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} - \{0\}\} \cup \{1\}$;



- $A'' = A \cup \{2 - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} - \{0\}\}$;



- $B = \{m - \frac{1}{n} \mid m, n \in \mathbb{N} - \{0\}\}$.



Własności dobrych porządków

Fakt:

- Niepusty zbiór dobrze uporządkowany ma element najmniejszy.

Własności dobrych porządków

Fakt:

- Niepusty zbiór dobrze uporządkowany ma element najmniejszy.
  Ale $[0, 1]$ też ma.

Własności dobrych porządków

Fakt:

- Niepusty zbiór dobrze uporządkowany ma element najmniejszy.
  Ale $[0, 1]$ też ma.
- W zbiorze dobrze uporządkowanym każdy element oprócz ostatniego ma bezpośredni następnik.

Własności dobrych porządków

Fakt:

- Niepusty zbiór dobrze uporządkowany ma element najmniejszy.
  Ale $[0,1]$ też ma.

- W zbiorze dobrze uporządkowanym każdy element oprócz ostatniego ma bezpośredni następnik.
  Ale w zbiorze $\mathbb{Z}$ też.

Własności dobrych porządków

Fakt:

- Niepusty zbiór dobrze uporządkowany ma element najmniejszy.
  Ale $[0,1]$ też ma.
- W zbiorze dobrze uporządkowanym każdy element oprócz ostatniego ma bezpośredni następnik.
  Ale w zbiorze $\mathbb{Z}$ też.
- W zbiorze dobrze uporządkowanym każdy odcinek właściwy jest postaci $\mathcal{O}_A(x)$.

Własności dobrych porządków

Fakt:

- Niepusty zbiór dobrze uporządkowany ma element najmniejszy.
  Ale $[0, 1]$ też ma.
- W zbiorze dobrze uporządkowanym każdy element oprócz ostatniego ma bezpośredni następnik.
  Ale w zbiorze $\mathbb{Z}$ też.
- W zbiorze dobrze uporządkowanym każdy odcinek właściwy jest postaci $\mathcal{O}_A(x)$.
  I na odwrót.

Własności dobrych porządków

- Jeśli A jest zbiorem dobrze uporządkowanym, to A nie jest izomorficzny z żadnym swoim właściwym odcinkiem początkowym.

Własności dobrych porządków

- Jeśli A jest zbiorem dobrze uporządkowanym, to A nie jest izomorficzny z żadnym swoim właściwym odcinkiem początkowym.
- Jeśli A i B są dobrze uporządkowane, to jeden z nich jest izomorficzny z odcinkiem początkowym drugiego.

Własności dobrych porządków

- Jeśli A jest zbiorem dobrze uporządkowanym, to A nie jest izomorficzny z żadnym swoim właściwym odcinkiem początkowym.
- Jeśli A i B są dobrze uporządkowane, to jeden z nich jest izomorficzny z odcinkiem początkowym drugiego.
- Każdy zbiór można dobrze uporządkować. (E. Zermelo)

Porównywalność liczb kardynalnych

Wniosek

Dla dowolnych zbiorów A i B zachodzi

$$\overline{\overline{A}} \leq \overline{\overline{B}} \quad \textit{lub} \quad \overline{\overline{B}} \leq \overline{\overline{A}}.$$

Porównywalność liczb kardynalnych

Wniosek

Dla dowolnych zbiorów A i B zachodzi

$$\overline{\overline{A}} \leq \overline{\overline{B}} \quad lub \quad \overline{\overline{B}} \leq \overline{\overline{A}}.$$

Dowód: Zbiory A i B można dobrze uporządkować, a wtedy jeden z nich jest izomorficzny z odcinkiem początkowym drugiego. $\square$

Liczby porządkowe

- Liczby porządkowe zbiorów skończonych to liczby naturalne.
- Liczba porządkowa zbioru $\mathbb{N}$ to ω.

Niech $\overline{\overline{A}} = \alpha$ i $\overline{\overline{B}} = \beta$.

- Suma $\alpha + \beta$ to liczba porządkowa zbioru $A \oplus B$ uporządkowanego tak:

$$\langle x \rangle_i \leq \langle y \rangle_j \qquad \Leftrightarrow \qquad i < j, \text{ lub } i = j \text{ oraz } x \leq y.$$

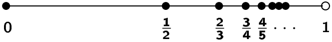
- Iloczyn $\alpha \cdot \beta$ to liczba porządkowa zbioru $A \times B$ uporządkowanego „antyleksykograficznie":

$$\langle a, b \rangle \leq \langle a', b' \rangle \quad \Leftrightarrow \quad b < b', \text{ lub } b = b' \text{ oraz } a \leq a'.$$

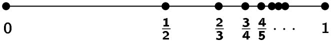
○

Przykłady

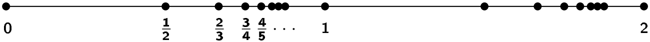
- $A = \{1 - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} - \{0\}\};$ (ω)



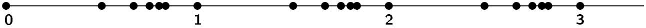
- $A' = \{1 - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} - \{0\}\} \cup \{1\};$ $(\omega + 1)$



- $A'' = A \cup \{2 - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} - \{0\}\};$ $(\omega + \omega)$



- $B = \{m - \frac{1}{n} \mid m, n \in \mathbb{N} - \{0\}\}.$ $(\omega \cdot \omega)$



Działania na liczbach porządkowych

- $1 + \omega = \omega \neq \omega + 1$;

Działania na liczbach porządkowych

- $1 + \omega = \omega \neq \omega + 1$;
- $2 \cdot \omega = \omega \neq \omega + \omega = \omega \cdot 2$;

Działania na liczbach porządkowych

- $1 + \omega = \omega \neq \omega + 1$;
- $2 \cdot \omega = \omega \neq \omega + \omega = \omega \cdot 2$;
- $\alpha^2 := \alpha \cdot \alpha$;

Działania na liczbach porządkowych

- $1 + \omega = \omega \neq \omega + 1$;
- $2 \cdot \omega = \omega \neq \omega + \omega = \omega \cdot 2$;
- $\alpha^2 := \alpha \cdot \alpha$;
- $\alpha^{k+1} := \alpha \cdot \alpha^k$;

Działania na liczbach porządkowych

- $1 + \omega = \omega \neq \omega + 1$;
- $2 \cdot \omega = \omega \neq \omega + \omega = \omega \cdot 2$;
- $\alpha^2 := \alpha \cdot \alpha$;
- $\alpha^{k+1} := \alpha \cdot \alpha^k$;
- $\alpha^\omega :=$ najmniejsza liczba większa od wszystkich α^k.

Działania na liczbach porządkowych

- $1 + \omega = \omega \neq \omega + 1$;
- $2 \cdot \omega = \omega \neq \omega + \omega = \omega \cdot 2$;
- $\alpha^2 := \alpha \cdot \alpha$;
- $\alpha^{k+1} := \alpha \cdot \alpha^k$;
- $\alpha^\omega :=$ najmniejsza liczba większa od wszystkich α^k.
- $2^\omega = \omega$.

Multizbiory

Multizbiór to „zbiór z powtórzeniami” (funkcja $M : A \to \mathbb{N}$).

Na przykład $\{1, 2, 2, 3, 4, 4, 4\}$ to taka funkcja M, że

$$M(1) = M(3) = 1,\ M(2) = 2 \text{ i } M(4) = 3.$$

Dla $x \neq 1, 2, 3, 4$ przyjmujemy $M(x) = 0$.

Multizbiór M jest *skończony*, jeśli zbiór $\{n \mid M(n) > 0\}$ jest skończony.

○

Porównujemy skończone multizbiory

Niech M_1, M_2 to skończone multizbiory.
Jeśli $M_1 \neq M_2$, to niech

$$m_0 = \max\{m \mid M_1(m) \neq M_2(m)\}.$$

Przyjmujemy, że $M_1 \leq M_2$, gdy

$$M_1 = M_2 \quad \vee \quad M_1(m_0) < M_2(m_0)$$

Fakt: *To jest dobre uporządkowanie typu* ω^ω.