

# Podstawy matematyki dla informatyków

## Wykład 12

12 stycznia 2011

## W poprzednim odcinku: naturalna dedukcja

- ▶ Reguły *wprowadzania* spójników logicznych: jak można udowodnić formułę danej postaci?
- ▶ Reguły *eliminacji* spójników: jak można wykorzystać formułę tej postaci do udowodnienia innej?

# Reguły wnioskowania dla rachunku zdań (1)

$$\frac{}{\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \varphi} (\text{Ax})$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B} (\text{W}\wedge) \quad \frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash A} (\text{E}\wedge) \quad \frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash B} (\text{E}\wedge)$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash A \rightarrow B}{\Gamma \vdash B} (\text{E} \rightarrow) \quad \frac{\Gamma \cup \{A\} \vdash B}{\Gamma \vdash A \rightarrow B} (\text{W} \rightarrow)$$

## Reguły wnioskowania dla rachunku zdań (2)

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B} \text{ (W}\vee\text{)}$$

$$\frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B} \text{ (W}\vee\text{)}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \vee B \quad \Gamma \cup \{A\} \vdash C \quad \Gamma \cup \{B\} \vdash C}{\Gamma \vdash C} \text{ (E}\vee\text{)}$$

$$\frac{\Gamma \cup \{A\} \vdash \perp}{\Gamma \vdash \neg A} \text{ (W}\neg\text{)}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \neg A \quad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash \perp} \text{ (E}\neg\text{)}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \perp}{\Gamma \vdash A} \text{ (E}\perp\text{)}$$

$$\frac{\Gamma \cup \{\neg A\} \vdash \perp}{\Gamma \vdash A} \text{ (E}\neg\neg\text{)}$$

# Dowód formalny

*Dowód formalny* osądu  $\Gamma \vdash \varphi$  w naturalnej dedukcji, to drzewo skończone, w którym każdemu wierzchołkowi przypisano pewien osąd. Przy tym:

- ▶ Korzeniowi drzewa przypisano osąd  $\Gamma \vdash \varphi$ .
- ▶ Osąd przypisany dowolnemu wierzchołkowi powstaje z osądów przypisanych jego poprzednikom poprzez zastosowanie jednej z reguł wnioskowania.
- ▶ *Liściom przypisano osądy postaci  $\Delta, \alpha \vdash \alpha$ .*

Przykład 1:  $\neg\beta \vdash \neg(\beta \wedge \gamma)$

$$\frac{\frac{\neg\beta, \beta \wedge \gamma \vdash \neg\beta \quad \frac{\neg\beta, \beta \wedge \gamma \vdash \beta \wedge \gamma}{\neg\beta, \beta \wedge \gamma \vdash \beta} (E\wedge)}{\neg\beta, \beta \wedge \gamma \vdash \perp} (E\neg)}{\neg\beta \vdash \neg(\beta \wedge \gamma)} (W\neg)$$

$\neg\beta, [\beta \wedge \gamma, \beta, \perp], \neg(\beta \wedge \gamma).$

o

## Eliminacja kwantyfikatora ogólnego

$$\frac{\Gamma \vdash \forall x A(x)}{\Gamma \vdash A(y)} \text{ (E}\forall\text{)}$$

*(W miejscu  $y$  może być nazwa dowolnego obiektu.)*

## Wprowadzanie kwantyfikatora ogólnego

$$\frac{\Gamma \vdash A(x)}{\Gamma \vdash \forall x A(x)} \text{ (W}\forall\text{)}$$

*(x nie jest wolne w  $\Gamma$ )*

## Wprowadzanie kwantyfikatora szczegółowego

$$\frac{\Gamma \vdash A(y)}{\Gamma \vdash \exists x A(x)} \text{ (W}\exists\text{)}$$

*(W miejscu y może być nazwa dowolnego obiektu.)*

## Eliminacja kwantyfikatora szczegółowego

$$\frac{\Gamma \vdash \exists x A(x) \quad \Gamma \cup \{A(x)\} \vdash B}{\Gamma \vdash B} \text{ (E}\exists\text{)}$$

*(x nie jest wolne w  $\Gamma \cup \{B\}$ )*

# Poprawność i pełność (dla rachunku zdań)

## Twierdzenie (o pełności)

- ▶ *System naturalnej dedukcji jest poprawny: Jeśli formuła ma dowód (jest twierdzeniem) to jest tautologią.*

# Poprawność i pełność (dla rachunku zdań)

## Twierdzenie (o pełności)

- ▶ *System naturalnej dedukcji jest poprawny: Jeśli formuła ma dowód (jest twierdzeniem) to jest tautologią.*
- ▶ *System naturalnej dedukcji jest pełny: Każda tautologia ma dowód.*

## Przypomnienie notacji

Piszemy  $\varrho \models \Gamma$ , gdy  $\llbracket \gamma \rrbracket_{\varrho} = 1$ , dla każdego  $\gamma \in \Gamma$ .

Piszemy  $\Gamma \models \alpha$ , gdy dla dowolnej interpretacji zdaniowej  $\varrho$ :  
jeżeli  $\varrho \models \Gamma$ , to także  $\llbracket \alpha \rrbracket_{\varrho} = 1$ .

Jeśli osąd  $\Gamma \vdash \alpha$  ma dowód, to piszemy po prostu “ $\Gamma \vdash \alpha$ ”.

# Poprawność

**Twierdzenie:** *Jeśli osąd  $\Gamma \vdash \alpha$  ma dowód, to  $\Gamma \models \alpha$ .*

# Poprawność

**Twierdzenie:** *Jeśli osąd  $\Gamma \vdash \alpha$  ma dowód, to  $\Gamma \models \alpha$ .*

**Dowód:** Dowód jest przez indukcję ze względu na wielkość. . . dowodu  $\Gamma \vdash \alpha$ .

# Poprawność

**Twierdzenie:** *Jeśli osąd  $\Gamma \vdash \alpha$  ma dowód, to  $\Gamma \models \alpha$ .*

**Dowód:** Dowód jest przez indukcję ze względu na wielkość... dowodu  $\Gamma \vdash \alpha$ . Rozważamy kilka przypadków, zależnie od ostatniej użytej reguły.

*Przypadek 1:* Osąd  $\Gamma \vdash \alpha$  jest aksjomatem, tj.  $\Gamma = \Gamma' \cup \{\alpha\}$ .  
Wtedy teza jest oczywista.

*Przypadek 2:* Osąd  $\Gamma \vdash \alpha$  otrzymano przez  $(E \rightarrow)$  z osądów  $\Gamma \vdash \beta \rightarrow \alpha$  i  $\Gamma \vdash \beta$ . Z założenia indukcyjnego  $\Gamma \models \beta \rightarrow \alpha$  oraz  $\Gamma \models \beta$ , bo te dowody mają mniejsze rozmiary.  
Jeśli więc  $\varrho \models \Gamma$ , to  $\varrho$  spełnia obie formuły  $\beta \rightarrow \alpha$  i  $\beta$ .  
Wtedy  $\varrho$  musi też spełniać  $\alpha$ .

Jeśli  $\Gamma \vdash \alpha$ , to  $\Gamma \models \alpha$

*Przypadek 3:* Osąd  $\Gamma \vdash \alpha$  otrzymano przez  $(W \rightarrow)$ .

Wtedy  $\alpha = \beta \rightarrow \gamma$  oraz  $\Gamma, \beta \vdash \gamma$  ma dowód mniejszych rozmiarów, zatem  $\Gamma \cup \{\beta\} \models \gamma$ , z założenia indukcyjnego.

Założmy, że  $\varrho \models \Gamma$ . Jeśli  $\llbracket \beta \rrbracket_{\varrho} = 1$ , to  $\varrho \models \Gamma \cup \{\beta\}$ , więc  $\llbracket \gamma \rrbracket_{\varrho} = 1$ , skąd  $\llbracket \beta \rightarrow \gamma \rrbracket_{\varrho} = 1$ . A jeśli  $\llbracket \beta \rrbracket_{\varrho} = 0$ , to tym bardziej  $\llbracket \beta \rightarrow \gamma \rrbracket_{\varrho} = 1$ .

Jeśli  $\Gamma \vdash \alpha$ , to  $\Gamma \models \alpha$

*Przypadek 4:* Osąd  $\Gamma \vdash \alpha$  otrzymano przez  $(E\perp)$  z  $\Gamma \vdash \perp$ .  
Z założenia indukcyjnego dostajemy  $\Gamma \models \perp$ , co oznacza,  
że nie istnieje interpretacja zdaniowa spełniająca  $\Gamma$ .

A więc  $\Gamma \models \alpha$ , walkowerem.

Jeśli  $\Gamma \vdash \alpha$ , to  $\Gamma \models \alpha$

*Przypadek 4:* Osąd  $\Gamma \vdash \alpha$  otrzymano przez  $(E\perp)$  z  $\Gamma \vdash \perp$ . Z założenia indukcyjnego dostajemy  $\Gamma \models \perp$ , co oznacza, że nie istnieje interpretacja zdaniowa spełniająca  $\Gamma$ .

A więc  $\Gamma \models \alpha$ , walkowerem.

*Przypadek 5:* Osąd  $\Gamma \vdash \alpha$  otrzymano z pomocą reguły  $(E\neg\neg)$  z osądu  $\Gamma \cup \{\neg\alpha\} \vdash \perp$ . Wtedy  $\Gamma, \neg\alpha \models \perp$  z założenia indukcyjnego, czyli nie istnieje interpretacja zdaniowa spełniająca  $\Gamma \cup \{\neg\alpha\}$ . Znaczy to dokładnie tyle, że każda interpretacja zdaniowa spełniająca  $\Gamma$  musi spełniać  $\alpha$ .

Jeśli  $\Gamma \vdash \alpha$ , to  $\Gamma \models \alpha$

*Przypadek 6:* Osąd  $\Gamma \vdash \alpha$  otrzymano z pomocą reguły (EV) z trzech osądów:  $\Gamma \vdash \beta \vee \gamma$ ,  $\Gamma \cup \{\beta\} \vdash \alpha$ ,  $\Gamma \cup \{\gamma\} \vdash \alpha$ . Z założenia indukcyjnego wiemy, że  $\Gamma \models \beta \vee \gamma$ .

Jeśli więc  $\varrho \models \Gamma$ , to  $\llbracket \beta \rrbracket_{\varrho} = 1$  lub  $\llbracket \gamma \rrbracket_{\varrho} = 1$ , skąd  $\varrho$  spełnia jeden ze zbiorów  $\Gamma \cup \{\beta\}$ ,  $\Gamma \cup \{\gamma\}$ . W obu przypadkach z założenia indukcyjnego wynika, że  $\llbracket \alpha \rrbracket_{\varrho} = 1$ .

*Przypadki 7–13:* Podobnie.



Pełność: *Jeśli*  $\models \alpha$ , *to*  $\vdash \alpha$

### Lemat 1:

Następujące osądy mają dowody w naturalnej dedukcji:

1.  $\beta, \gamma \vdash \beta \wedge \gamma$ ;
2.  $\beta, \neg\gamma \vdash \neg(\beta \rightarrow \gamma)$ ;
3.  $\neg\beta, \neg\gamma \vdash \neg(\beta \vee \gamma)$ ;
4.  $\neg\beta \vdash \neg(\beta \wedge \gamma)$  oraz  $\neg\gamma \vdash \neg(\beta \wedge \gamma)$ ;
5.  $\neg\beta \vdash \beta \rightarrow \gamma$ ;
6.  $\gamma \vdash \beta \rightarrow \gamma$ ;
7.  $\vdash \neg\perp$ ;
8.  $\alpha \vee \neg\alpha$ ;

(1)  $\beta, \gamma \vdash \beta \wedge \gamma$

$$\frac{\beta, \gamma \vdash \beta \quad \beta, \gamma \vdash \gamma}{\beta, \gamma \vdash \beta \wedge \gamma} (\text{W}\wedge)$$

$\beta, \gamma, \beta \wedge \gamma.$

o

$$(2) \quad \beta, \neg\gamma \vdash \neg(\beta \rightarrow \gamma)$$

Oznaczenie:  $\Gamma = \{\beta, \neg\gamma, \beta \rightarrow \gamma\}$

$$\frac{\frac{\frac{\Gamma \vdash \beta \quad \Gamma \vdash \beta \rightarrow \gamma}{\Gamma \vdash \gamma} (E \rightarrow)}{\Gamma \vdash \neg\gamma \quad \Gamma \vdash \gamma} (E \neg)}{\Gamma \vdash \perp} (E \neg)}{\beta, \neg\gamma \vdash \neg(\beta \rightarrow \gamma)} (W \neg)$$

$\beta, \neg\gamma, [\beta \rightarrow \gamma, \gamma, \perp], \neg(\beta \rightarrow \gamma).$

o

(3)  $\neg\beta, \neg\gamma \vdash \neg(\beta \vee \gamma)$

Oznaczenie:  $\Gamma = \{\neg\beta, \neg\gamma, \beta \vee \gamma\}$

$$\frac{\Gamma \vdash \beta \vee \gamma \quad \frac{\frac{\Gamma, \beta \vdash \beta \quad \Gamma, \beta \vdash \neg\beta}{\Gamma, \beta \vdash \perp} (E\neg) \quad \frac{\Gamma, \gamma \vdash \gamma \quad \Gamma, \gamma \vdash \neg\gamma}{\Gamma, \gamma \vdash \perp} (E\vee)}{\Gamma \vdash \perp} (E\vee)}{\frac{\Gamma \vdash \perp}{\neg\beta, \neg\gamma \vdash \neg(\beta \vee \gamma)} (E\perp)}$$

$\neg\beta, \neg\gamma, [\beta \vee \gamma, [\beta, \perp], [\gamma, \perp], \perp], \neg(\beta \vee \gamma).$

o

(5)  $\neg\beta \vdash \beta \rightarrow \gamma$

$$\frac{\neg\beta, \beta \vdash \neg\beta \quad \neg\beta, \beta \vdash \beta}{\neg\beta, \beta \vdash \perp} (\text{E}\neg)$$
$$\frac{\neg\beta, \beta \vdash \perp}{\neg\beta, \beta \vdash \gamma} (\text{E}\perp)$$
$$\frac{\neg\beta, \beta \vdash \gamma}{\neg\beta \vdash \beta \rightarrow \gamma} (\text{W}\rightarrow)$$

$\neg\beta, [\beta, \perp, \gamma], \beta \rightarrow \gamma.$

○

$$(6) \quad \gamma \vdash \beta \rightarrow \gamma$$

$$\frac{\gamma, \beta \vdash \gamma}{\gamma \vdash \beta \rightarrow \gamma} (\text{W } \rightarrow)$$

$$\gamma, [\beta, \gamma], \beta \rightarrow \gamma.$$

o

(7)  $\vdash \neg \perp$

$$\frac{\perp \vdash \perp}{\vdash \neg \perp} (W\neg)$$

$[\perp, \perp], \neg \perp.$

◦



Pełność: *Jeśli*  $\models \alpha$ , *to*  $\vdash \alpha$

**Lemat 2 (Osłabianie):** Jeśli  $\Gamma \vdash \alpha$  to także  $\Gamma \cup \Delta \vdash \alpha$ .

**Dowód:** We wszystkich osądach występujących w dowodzie  $\Gamma \vdash \alpha$  dopisujemy  $\Delta$  po lewej stronie.  
(Porządny dowód jest przez indukcję.)



### Lemat 3 (Reguła cięcia):

Jeśli  $\Gamma \vdash \alpha$  oraz  $\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta$ , to  $\Gamma \vdash \beta$ .

### Dowód:

$$\frac{\frac{\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta}{\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta} (W \rightarrow) \quad \Gamma \vdash \alpha}{\Gamma \vdash \beta} (E \rightarrow)$$

### Wniosek:

Jeśli  $\Gamma \vdash \alpha_1, \dots, \Gamma \vdash \alpha_n$ , oraz  $\Gamma, \alpha_1, \dots, \alpha_n \vdash \beta$ , to  $\Gamma \vdash \beta$ .

**Lemat 4:** Jeśli  $\Gamma \cup \{\gamma\} \vdash \alpha$  oraz  $\Gamma \cup \{\neg\gamma\} \vdash \alpha$ , to  $\Gamma \vdash \alpha$ .

**Dowód:** Ponieważ  $\vdash \gamma \vee \neg\gamma$ , więc  $\Gamma \vdash \gamma \vee \neg\gamma$  (osłabianie).  
Teraz należy zastosować regułę eliminacji alternatywy:

$$\frac{\Gamma \vdash \gamma \vee \neg\gamma \quad \Gamma \cup \{\gamma\} \vdash \alpha \quad \Gamma \cup \{\neg\gamma\} \vdash \alpha}{\Gamma \vdash \alpha}$$

# Lemat Kalmára

**Oznaczenie:** Dla dowolnej interpretacji zdaniowej  $\varrho$  i dowolnej formuły  $\alpha$  przyjmijmy, że

$$\alpha^{\varrho} = \begin{cases} \alpha, & \text{jeśli } \llbracket \alpha \rrbracket_{\varrho} = 1; \\ \neg\alpha, & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Na przykład jeśli  $\varrho(p) = 0$  i  $\varrho(q) = 1$ , to  $q^{\varrho} = q$  oraz  $((p \rightarrow q) \rightarrow p)^{\varrho} = \neg((p \rightarrow q) \rightarrow p)$ .

**Lemat Kalmára:** Niech  $p_1, \dots, p_n$  będą wszystkimi symbolami zdaniowymi występującymi w formule  $\alpha$ . Wówczas  $p_1^{\varrho}, \dots, p_n^{\varrho} \vdash \alpha^{\varrho}$ .

# Lemat Kalmára

*Jeśli  $p_1, \dots, p_n$  są wszystkimi symbolami zdaniowymi występującymi w formule  $\alpha$ , to  $p_1^e, \dots, p_n^e \vdash \alpha^e$ .*

**Dowód:** Indukcja ze względu na długość formuły  $\alpha$ .

*Przypadek 1:* Jeśli  $\alpha = p_i$ , to  $p_1^e, \dots, p_n^e \vdash p_i^e$  jest aksjomatem.

*Przypadek 2:* Jeśli  $\alpha = \perp$ , to  $\alpha^e = \neg \perp$ . A skoro  $\vdash \neg \perp$ , to także  $p_1^e, \dots, p_n^e \vdash \neg \perp$ .

# Dowód lematu Kalmára

*Przypadek 3:* Niech  $\alpha = \beta \rightarrow \gamma$ .

Jeśli  $\llbracket \alpha \rrbracket_e = 0$  to  $\llbracket \beta \rrbracket_e = 1$  i  $\llbracket \gamma \rrbracket_e = 0$ . Formuły  $\beta$  i  $\gamma$  są krótsze od  $\alpha$ , więc  $p_1^e, \dots, p_n^e \vdash \beta$  oraz  $p_1^e, \dots, p_n^e \vdash \neg\gamma$  z założenia indukcyjnego. Z lematu 1(2) wiadomo, że  $\beta, \neg\gamma \vdash \neg(\beta \rightarrow \gamma)$ . Używając osłabiania i reguły cięcia dostaniemy tezę.

# Dowód lematu Kalmára

*Przypadek 3:* Niech  $\alpha = \beta \rightarrow \gamma$ .

Jeśli  $\llbracket \alpha \rrbracket_e = 0$  to  $\llbracket \beta \rrbracket_e = 1$  i  $\llbracket \gamma \rrbracket_e = 0$ . Formuły  $\beta$  i  $\gamma$  są krótsze od  $\alpha$ , więc  $p_1^e, \dots, p_n^e \vdash \beta$  oraz  $p_1^e, \dots, p_n^e \vdash \neg\gamma$  z założenia indukcyjnego. Z lematu 1(2) wiadomo, że  $\beta, \neg\gamma \vdash \neg(\beta \rightarrow \gamma)$ . Używając osłabiania i reguły cięcia dostaniemy tezę.

Jeśli  $\llbracket \alpha \rrbracket_e = 1$ , to albo  $\llbracket \beta \rrbracket_e = 0$  albo  $\llbracket \gamma \rrbracket_e = 1$ .

W pierwszym przypadku z założenia indukcyjnego wiemy, że  $p_1^e, \dots, p_n^e \vdash \neg\beta$ , a w drugim, że  $p_1^e, \dots, p_n^e \vdash \gamma$ . W obu przypadkach potrafimy udowodnić  $\beta \rightarrow \gamma$  z lematu 1(5,6).

# Dowód lematu Kalmára

*Przypadek 4:* Załóżmy, że  $\alpha = \beta \vee \gamma$  i niech  $\llbracket \alpha \rrbracket_e = 1$ . Zatem  $\llbracket \beta \rrbracket_e = 1$  lub  $\llbracket \gamma \rrbracket_e = 1$ . Wtedy jedna z formuł  $\beta, \gamma$  ma dowód przy założeniach  $p_1^e, \dots, p_n^e$  i stosując zasadę wprowadzania alternatywy od razu dostajemy  $p_1^e, \dots, p_n^e \vdash \beta \vee \gamma$ .

# Dowód lematu Kalmára

*Przypadek 4:* Załóżmy, że  $\alpha = \beta \vee \gamma$  i niech  $\llbracket \alpha \rrbracket_e = 1$ . Zatem  $\llbracket \beta \rrbracket_e = 1$  lub  $\llbracket \gamma \rrbracket_e = 1$ . Wtedy jedna z formuł  $\beta, \gamma$  ma dowód przy założeniach  $p_1^e, \dots, p_n^e$  i stosując zasadę wprowadzania alternatywy od razu dostajemy  $p_1^e, \dots, p_n^e \vdash \beta \vee \gamma$ .

Jeśli natomiast  $\llbracket \alpha \rrbracket_e = 0$ , to z założenia indukcyjnego wynika, że mamy dowody formuł  $\neg\gamma$  i  $\neg\beta$ . Ale z lematu 1(3) mamy  $\neg\beta, \neg\gamma \vdash \neg(\beta \vee \gamma)$ , skąd wynika  $p_1^e, \dots, p_n^e \vdash \beta \vee \gamma$ .

# Dowód lematu Kalmára

*Przypadek 5:* Niech  $\alpha = \beta \wedge \gamma$

Jeśli  $\llbracket \alpha \rrbracket_e = 1$ , to  $\llbracket \beta \rrbracket_e = \llbracket \gamma \rrbracket_e = 1$  i mamy dowody osądów  $p_1^e, \dots, p_n^e \vdash \beta$  i  $p_1^e, \dots, p_n^e \vdash \gamma$ . Pozostaje zastosować regułę  $(W\wedge)$ .

# Dowód lematu Kalmára

*Przypadek 5:* Niech  $\alpha = \beta \wedge \gamma$

Jeśli  $\llbracket \alpha \rrbracket_e = 1$ , to  $\llbracket \beta \rrbracket_e = \llbracket \gamma \rrbracket_e = 1$  i mamy dowody osądów  $p_1^e, \dots, p_n^e \vdash \beta$  i  $p_1^e, \dots, p_n^e \vdash \gamma$ . Pozostaje zastosować regułę  $(W\wedge)$ .

Jeśli  $\llbracket \alpha \rrbracket_e = 0$ , to jedna z wartości  $\llbracket \beta \rrbracket_e, \llbracket \gamma \rrbracket_e$  jest zerem, istnieje więc dowód osądu  $p_1^e, \dots, p_n^e \vdash \neg\beta$  lub osądu  $p_1^e, \dots, p_n^e \vdash \neg\gamma$ . Można teraz skorzystać z tego, że  $\neg\beta \vdash \neg(\beta \wedge \gamma)$  oraz  $\neg\gamma \vdash \neg(\beta \wedge \gamma)$ .

# Dowód lematu Kalmára

*Przypadek 6:* Niech  $\alpha = \neg\beta$ .

Jeśli  $\llbracket\alpha\rrbracket_e = 1$  to  $\llbracket\beta\rrbracket_e = 0$  i z założenia indukcyjnego  $p_1^e, \dots, p_n^e \vdash \neg\beta$ .

# Dowód lematu Kalmára

*Przypadek 6:* Niech  $\alpha = \neg\beta$ .

Jeśli  $\llbracket\alpha\rrbracket_e = 1$  to  $\llbracket\beta\rrbracket_e = 0$  i z założenia indukcyjnego  $p_1^e, \dots, p_n^e \vdash \neg\beta$ .

W przeciwnym razie,  $p_1^e, \dots, p_n^e \vdash \beta$ , a skoro  $\beta \vdash \neg\neg\beta$ , więc  $p_1^e, \dots, p_n^e \vdash \neg\alpha$ .



# Pełność rachunku zdań

**Twierdzenie (o pełności):** *Każda tautologia ma dowód.*

# Pełność rachunku zdań

**Twierdzenie (o pełności):** *Każda tautologia ma dowód.*

**Dowód:** Niech  $\alpha$  będzie tautologią zdaniową.

Wtedy  $\alpha^{\varrho} = \alpha$  dla dowolnej interpretacji  $\varrho$ .

Niech  $p_1, \dots, p_n$  będą wszystkimi symbolami zdaniowymi w formule  $\alpha$ . Udowodnimy, że dla dowolnego  $m \leq n$  i dowolnego  $\varrho$  zachodzi  $p_1^{\varrho}, \dots, p_m^{\varrho} \vdash \alpha$ .

Przyjmując  $m = 0$  otrzymamy  $\vdash \alpha$ .

Dowód przebiega przez indukcję ze względu na  $n - m$ .

Dla  $m = n$  teza wynika z lematu Kalmára.

## Krok indukcyjny

Założenie indukcyjne:

$$p_1^\varrho, \dots, p_m^\varrho, p_{m+1}^\varrho \vdash \alpha, \text{ dla dowolnego } \varrho.$$

Teza:

$$p_1^\varrho, \dots, p_m^\varrho \vdash \alpha, \text{ dla dowolnego } \varrho.$$

# Krok indukcyjny

Założenie indukcyjne:

$$p_1^{\varrho}, \dots, p_m^{\varrho}, p_{m+1}^{\varrho} \vdash \alpha, \text{ dla dowolnego } \varrho.$$

Teza:

$$p_1^{\varrho}, \dots, p_m^{\varrho} \vdash \alpha, \text{ dla dowolnego } \varrho.$$

Weźmy dowolne  $\varrho$ . Z założenia indukcyjnego wynika, że

$$p_1^{\varrho}, \dots, p_m^{\varrho}, p_{m+1}^{\varrho} \vdash \alpha \quad \text{oraz} \quad p_1^{\varrho}, \dots, p_m^{\varrho}, \neg p_{m+1}^{\varrho} \vdash \alpha$$

## Krok indukcyjny

Założenie indukcyjne:

$$p_1^{\varrho}, \dots, p_m^{\varrho}, p_{m+1}^{\varrho} \vdash \alpha, \text{ dla dowolnego } \varrho.$$

Teza:

$$p_1^{\varrho}, \dots, p_m^{\varrho} \vdash \alpha, \text{ dla dowolnego } \varrho.$$

Weźmy dowolne  $\varrho$ . Z założenia indukcyjnego wynika, że

$$p_1^{\varrho}, \dots, p_m^{\varrho}, p_{m+1}^{\varrho} \vdash \alpha \quad \text{oraz} \quad p_1^{\varrho}, \dots, p_m^{\varrho}, \neg p_{m+1}^{\varrho} \vdash \alpha$$

Pozostaje skorzystać z lematu 4

(Jeśli  $\Gamma \cup \{\gamma\} \vdash \alpha$  oraz  $\Gamma \cup \{\neg\gamma\} \vdash \alpha$ , to  $\Gamma \vdash \alpha$ .)

## Nieco silniejsza wersja twierdzenia o pełności

**Twierdzenie (łatwe):** Dla dowolnej formuły  $\varphi$  i dowolnego skończonego zbioru formuł  $\Gamma$  zachodzi równoważność:

$$\Gamma \vdash \varphi \quad \text{wtedy i tylko wtedy, gdy} \quad \Gamma \models \varphi$$

## Nieco silniejsza wersja twierdzenia o pełności

**Twierdzenie (łatwe):** Dla dowolnej formuły  $\varphi$  i dowolnego skończonego zbioru formuł  $\Gamma$  zachodzi równoważność:

$$\Gamma \vdash \varphi \quad \text{wtedy i tylko wtedy, gdy} \quad \Gamma \models \varphi$$

**Twierdzenie (trudne):** Jeżeli  $\Gamma \models \varphi$ , to istnieje taki skończony podzbiór  $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ , że  $\Gamma_0 \vdash \varphi$ .

## Nieco silniejsza wersja twierdzenia o pełności

**Twierdzenie (łatwe):** Dla dowolnej formuły  $\varphi$  i dowolnego skończonego zbioru formuł  $\Gamma$  zachodzi równoważność:

$$\Gamma \vdash \varphi \quad \text{wtedy i tylko wtedy, gdy} \quad \Gamma \models \varphi$$

**Twierdzenie (trudne):** Jeżeli  $\Gamma \models \varphi$ , to istnieje taki skończony podzbiór  $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ , że  $\Gamma_0 \vdash \varphi$ .

**Twierdzenie (o zwartości):** Jeżeli  $\Gamma \models \varphi$ , to istnieje taki skończony podzbiór  $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ , że  $\Gamma_0 \models \varphi$ .

# Zwartość

**Twierdzenie (o zwartości):** *Jeżeli  $\Gamma \models \varphi$ , to istnieje taki skończony podzbiór  $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ , że  $\Gamma_0 \models \varphi$ .*

**Wniosek:** *Jeżeli każdy skończony podzbiór zbioru  $\Gamma$  jest spełnialny, to cały zbiór  $\Gamma$  jest spełnialny.*

**Dowód:** Jeśli  $\Gamma$  nie jest spełnialny, to  $\Gamma \models \perp$ . Z twierdzenia o zwartości istnieje więc skończony niespełnialny podzbiór.

## Przykład: kolorowanie nieskończonego grafu

Niech  $G$  będzie (być może nieskończonym) zbiorem, w którym określono symetryczną relację  $r$ .

*(Myślimy o  $G$  jak o zbiorze wierzchołków nieskończonego grafu i o relacji  $r$  jak o zbiorze krawędzi tego grafu.)*

Relacja  $r$  jest *trójkolorowa*, gdy istnieje taki trójelementowy podział zbioru  $G$ , że elementy należące do różnych składników nie są nigdy w relacji  $r$ .

*(Wierzchołki połączone krawędziami są różnych kolorów.)*

Relacja  $r$  jest *trójkolorowa w podzbiore*  $H \subseteq G$ , gdy trójkolorowa jest relacja  $r \cap (H \times H)$  w zbiorze  $H$ .

## Kolorowanie nieskończonego grafu

**Twierdzenie:** Jeśli relacja  $r$  jest trójkolorowa w każdym skończonym podzbiorze zbioru  $G$ , to jest trójkolorowa w  $G$ .

**Dowód:** Zdefiniujemy pewien nieskończony zbiór  $\Gamma$  formuł rachunku zdań. Użyjemy do tego (nieskończenie wielu) zmiennych zdaniowych postaci  $p_a^i$ , dla  $a \in G$  oraz  $i \in \{1, 2, 3\}$ .

W zbiorze  $\Gamma$  są takie formuły:

$\alpha_a = (p_a^1 \vee p_a^2 \vee p_a^3) \wedge \neg(p_a^1 \wedge p_a^2) \wedge \neg(p_a^1 \wedge p_a^3) \wedge \neg(p_a^3 \wedge p_a^2)$ ,  
dla każdego  $a \in G$ . (*Element  $a$  ma dokładnie jeden kolor.*)

$\beta_{ab} = \neg(p_a^1 \wedge p_b^1) \wedge \neg(p_a^2 \wedge p_b^2) \wedge \neg(p_a^3 \wedge p_b^3)$ ,  
dla każdej pary  $\langle a, b \rangle \in r$ . (*Elementy  $a$  i  $b$  są różnego koloru.*)

## Kolorowanie nieskończonego grafu

$$\alpha_a = (p_a^1 \vee p_a^2 \vee p_a^3) \wedge \neg(p_a^1 \wedge p_a^2) \wedge \neg(p_a^1 \wedge p_a^3) \wedge \neg(p_a^3 \wedge p_a^2)$$

$$\beta_{ab} = \neg(p_a^1 \wedge p_b^1) \wedge \neg(p_a^2 \wedge p_b^2) \wedge \neg(p_a^3 \wedge p_b^3)$$

$$\Gamma_H = \{\alpha_a \mid a \in H\} \cup \{\beta_{ab} \mid \langle a, b \rangle \in r \cap H\}$$

$$\Gamma = \Gamma_G.$$

## Kolorowanie nieskończonego grafu

$$\alpha_a = (p_a^1 \vee p_a^2 \vee p_a^3) \wedge \neg(p_a^1 \wedge p_a^2) \wedge \neg(p_a^1 \wedge p_a^3) \wedge \neg(p_a^3 \wedge p_a^2)$$

$$\beta_{ab} = \neg(p_a^1 \wedge p_b^1) \wedge \neg(p_a^2 \wedge p_b^2) \wedge \neg(p_a^3 \wedge p_b^3)$$

$$\Gamma_H = \{\alpha_a \mid a \in H\} \cup \{\beta_{ab} \mid \langle a, b \rangle \in r \cap H\}$$

$$\Gamma = \Gamma_G.$$

Zbiór  $\Gamma_H$  jest spełnialny wtw, gdy relacja  $r$  jest trójkolorowa w podzbiorze  $H$ . A tak jest dla wszystkich skończonych  $H$ .

## Kolorowanie nieskończonego grafu

$$\alpha_a = (p_a^1 \vee p_a^2 \vee p_a^3) \wedge \neg(p_a^1 \wedge p_a^2) \wedge \neg(p_a^1 \wedge p_a^3) \wedge \neg(p_a^3 \wedge p_a^2)$$

$$\beta_{ab} = \neg(p_a^1 \wedge p_b^1) \wedge \neg(p_a^2 \wedge p_b^2) \wedge \neg(p_a^3 \wedge p_b^3)$$

$$\Gamma_H = \{\alpha_a \mid a \in H\} \cup \{\beta_{ab} \mid \langle a, b \rangle \in r \cap H\}$$

$$\Gamma = \Gamma_G.$$

Zbiór  $\Gamma_H$  jest spełnialny wtw, gdy relacja  $r$  jest trójkolorowa w podzbiorze  $H$ . A tak jest dla wszystkich skończonych  $H$ .

Niech  $\Gamma' \subseteq \Gamma$  będzie skończony. Wtedy  $\Gamma' \subseteq \Gamma_H$  dla pewnego skończonego  $H \subseteq G$ . Zatem  $\Gamma'$  jest spełnialny.

## Kolorowanie nieskończonego grafu

$$\alpha_a = (p_a^1 \vee p_a^2 \vee p_a^3) \wedge \neg(p_a^1 \wedge p_a^2) \wedge \neg(p_a^1 \wedge p_a^3) \wedge \neg(p_a^3 \wedge p_a^2)$$

$$\beta_{ab} = \neg(p_a^1 \wedge p_b^1) \wedge \neg(p_a^2 \wedge p_b^2) \wedge \neg(p_a^3 \wedge p_b^3)$$

$$\Gamma_H = \{\alpha_a \mid a \in H\} \cup \{\beta_{ab} \mid \langle a, b \rangle \in r \cap H\}$$

$$\Gamma = \Gamma_G.$$

Zbiór  $\Gamma_H$  jest spełnialny wtw, gdy relacja  $r$  jest trójkolorowa w podzbiorze  $H$ . A tak jest dla wszystkich skończonych  $H$ .

Niech  $\Gamma' \subseteq \Gamma$  będzie skończony. Wtedy  $\Gamma' \subseteq \Gamma_H$  dla pewnego skończonego  $H \subseteq G$ . Zatem  $\Gamma'$  jest spełnialny.

Z twierdzenia o zwartości cały zbiór  $\Gamma$  jest spełnialny, czyli relacja  $r$  jest trójkolorowa.