

# Podstawy matematyki dla informatyków

Wykład 1

6 października 2011

## *Różne książki*

- ▶ O teorii mnogości:
  - ▶ Kuratowski,
  - ▶ Kuratowski, Mostowski,
  - ▶ Błaszczyk, Turek,
  - ▶ Guzicki, Zakrzewski,
  - ▶ Rasiowa.

## Różne książki

- ▶ O teorii mnogości:
  - ▶ Kuratowski,
  - ▶ Kuratowski, Mostowski,
  - ▶ Błaszczyk, Turek,
  - ▶ Guzicki, Zakrzewski,
  - ▶ Rasiowa.
- ▶ Zbiory zadań:
  - ▶ Marek, Onyszkiewicz,
  - ▶ Guzicki, Zakrzewski,
  - ▶ Ławrow, Maksimowa.

*Ale po co książki?*

<http://www.mimuw.edu.pl/~urzy/Pmat>

urzy@mimuw.edu.pl  
chrzaszcz@mimuw.edu.pl

# Spójniki zdaniowe

*Koniunkcja:*  $\alpha \wedge \beta$  czytamy „ $\alpha$  i  $\beta$ ”;

# Spójniki zdaniowe

*Koniunkcja:*  $\alpha \wedge \beta$  czytamy „ $\alpha$  i  $\beta$ ”;

*Alternatywa:*  $\alpha \vee \beta$  czytamy „ $\alpha$  lub  $\beta$ ”;

# Spójniki zdaniowe

*Koniunkcja:*  $\alpha \wedge \beta$  czytamy „ $\alpha$  i  $\beta$ ”;

*Alternatywa:*  $\alpha \vee \beta$  czytamy „ $\alpha$  lub  $\beta$ ”;

*Implikacja:*  $\alpha \rightarrow \beta$  czytamy „jeśli  $\alpha$  to  $\beta$ ”;

# Spójniki zdaniowe

*Koniunkcja:*  $\alpha \wedge \beta$  czytamy „ $\alpha$  i  $\beta$ ”;

*Alternatywa:*  $\alpha \vee \beta$  czytamy „ $\alpha$  lub  $\beta$ ”;

*Implikacja:*  $\alpha \rightarrow \beta$  czytamy „jeśli  $\alpha$  to  $\beta$ ”;

*Równoważność:*  $\alpha \leftrightarrow \beta$  czytamy „ $\alpha$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $\beta$ ”;

# Spójniki zdaniowe

*Koniunkcja:*  $\alpha \wedge \beta$  czytamy „ $\alpha$  i  $\beta$ ”;

*Alternatywa:*  $\alpha \vee \beta$  czytamy „ $\alpha$  lub  $\beta$ ”;

*Implikacja:*  $\alpha \rightarrow \beta$  czytamy „jeśli  $\alpha$  to  $\beta$ ”;

*Równoważność:*  $\alpha \leftrightarrow \beta$  czytamy „ $\alpha$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $\beta$ ”;

*Negacja:*  $\neg\alpha$  czytamy „nieprawda, że  $\alpha$ ”.

*Dwuwartościowa logika: 1 = prawda, 0 = fałsz*

$\alpha$	$\beta$	$\alpha \wedge \beta$	$\alpha \vee \beta$
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	1

## *Implikacja materialna*

$\alpha$	$\beta$	$\alpha \rightarrow \beta$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

## Implikacja materialna

$\alpha$	$\beta$	$\alpha \rightarrow \beta$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Wartość logiczna implikacji zależy wyłącznie od wartości logicznych stwierdzeń  $\alpha$  i  $\beta$ , a nie zależy od związku przyczynowo-skutkowego następstwa w czasie, itp.

## Implikacja materialna

$\alpha$	$\beta$	$\alpha \rightarrow \beta$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Wartość logiczna implikacji zależy wyłącznie od wartości logicznych stwierdzeń  $\alpha$  i  $\beta$ , a nie zależy od związku przyczynowo-skutkowego następstwa w czasie, itp.

**Ważne:** Implikacja  $\alpha \rightarrow \beta$  znaczy to samo, co  $\neg\alpha \vee \beta$

*Które z następujących zdań jest materialnie prawdziwe:*

- ▶ *Jeśli w baku jest paliwo, to samochód jedzie?*
- ▶ *Jeśli samochód jedzie, to w baku jest paliwo?*

# Kwantyfikatory

*Ogólny:*

$\forall x W(x)$  czytamy: „Każde  $x$  ma własność  $W(x)$ ”

# Kwantyfikatory

*Ogólny:*

$\forall x W(x)$  czytamy: „Każde  $x$  ma własność  $W(x)$ ”

*Szczegółowy:*

$\exists x W(x)$  czytamy: „Pewne  $x$  ma własność  $W(x)$ ”

## *Zmienne wolne i związane*

Interpretacja stwierdzenia „ $x > 4$ ” zależy od wartości  $x$ .

## Zmienne wolne i związane

Interpretacja stwierdzenia „ $x > 4$ ” zależy od wartości  $x$ .

Interpretacja zdania  $\forall x:\mathbb{N} x > 4$  nie zależy od wartości  $x$ .

## Zmienne wolne i związane

Interpretacja stwierdzenia „ $x > 4$ ” zależy od wartości  $x$ .

Interpretacja zdania  $\forall x:\mathbb{N} x > 4$  nie zależy od wartości  $x$ .

Zdanie „ $\forall x:\mathbb{N} x > 4$ ” wyraża tę samą myśl co „ $\forall y:\mathbb{N} y > 4$ ”.

## Zmienne wolne i związane

Interpretacja stwierdzenia „ $x > 4$ ” zależy od wartości  $x$ .

Interpretacja zdania  $\forall x:\mathbb{N} x > 4$  nie zależy od wartości  $x$ .

Zdanie „ $\forall x:\mathbb{N} x > 4$ ” wyraża tę samą myśl co „ $\forall y:\mathbb{N} y > 4$ ”.

W formule „ $x > 4$ ” zmienna  $x$  jest *wolna*.

## Zmienne wolne i związane

Interpretacja stwierdzenia „ $x > 4$ ” zależy od wartości  $x$ .

Interpretacja zdania  $\forall x:\mathbb{N} x > 4$  nie zależy od wartości  $x$ .

Zdanie „ $\forall x:\mathbb{N} x > 4$ ” wyraża tę samą myśl co „ $\forall y:\mathbb{N} y > 4$ ”.

W formule „ $x > 4$ ” zmienna  $x$  jest *wolna*.

W zdaniu „ $\forall x:\mathbb{N} x > 4$ ” zmienna  $x$  jest *związana*.

*Które zmienne są tu wolne, a które związane?*

$$\forall x:\mathbb{N} (x > 0 \vee x \leq y) \rightarrow x = 1$$

*Które zmienne są tu wolne, a które związane?*

$$\forall x:\mathbb{N} (x > 0 \vee x \leq y) \rightarrow x = 1$$

*Jak to lepiej zapisać?*

*Które zmienne są tu wolne, a które związane?*

$$\forall x:\mathbb{N} (x > 0 \vee x \leq y) \rightarrow x = 1$$

*Jak to lepiej zapisać?*

$$\forall z:\mathbb{N} (z > 0 \vee z \leq y) \rightarrow x = 1$$

## *Kłopoty z logiką*

Język formuł matematycznych rządzi się swoimi prawami.

## *Kłopoty z logiką*

Język formuł matematycznych rządzi się swoimi prawami.

Ma inną *składnię* niż języki naturalne.

## Kłopoty z logiką

Język formuł matematycznych rządzi się swoimi prawami.

Ma inną *składnię* niż języki naturalne.

Nie potrafi „powiedzieć wszystkiego, co pomyśli głowa”.

## Kłopoty z logiką

Język formuł matematycznych rządzi się swoimi prawami.

Ma inną *składnię* niż języki naturalne.

Nie potrafi „powiedzieć wszystkiego, co pomyśli głowa”.

Ale za to ma jednoznaczność *semantykę*.

## Kłopoty z logiką

Język formuł matematycznych rządzi się swoimi prawami.

Ma inną *składnię* niż języki naturalne.

Nie potrafi „powiedzieć wszystkiego, co pomyśli głowa”.

Ale za to ma jednoznaczność *semantykę*.

## Przykład

Czy te dwa zdania są podobne?

*Nie wolno pić i grać w karty.*

*Nie wolno pluć i łąpać.*

## Przykład

Czy te dwa zdania są podobne?

*Nie wolno pić i grać w karty.*

*Nie wolno pluć i łąpać.*

Niezupełnie. W pierwszym zdaniu jest domyślne powtórzenie:

*Nie wolno pić i **nie wolno** grać w karty.*

## Przykład

Czy te dwa zdania są podobne?

*Nie wolno pić i grać w karty.*

*Nie wolno pluć i łąpać.*

Niezupełnie. W pierwszym zdaniu jest domyślne powtórzenie:

*Nie wolno pić i **nie wolno** grać w karty.*

W drugim zdaniu jest domyślny nawias:

*Nie wolno (pluć i łąpać).*

## Przykład

Czy te dwa zdania są podobne?

*Nie wolno pić i grać w karty.*

*Nie wolno pluć i łąpać.*

Niezupełnie. W pierwszym zdaniu jest domyślne powtórzenie:

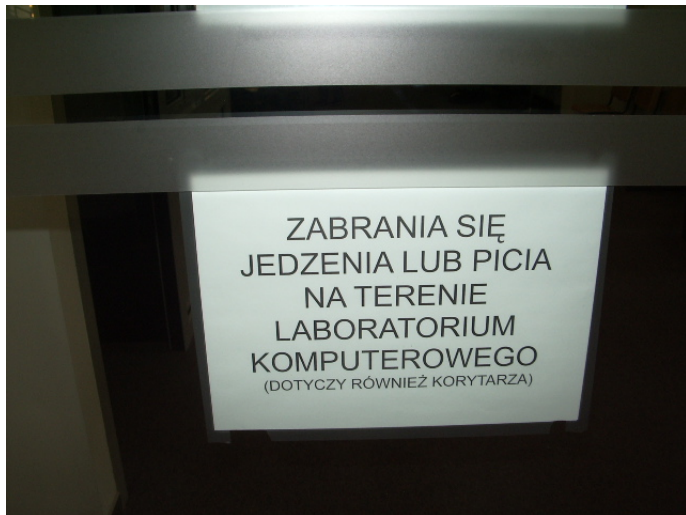
*Nie wolno pić i **nie wolno** grać w karty.*

W drugim zdaniu jest domyślny nawias:

*Nie wolno (pluć i łąpać).*

Oba zdania są poprawne. Ich znaczenie wynika z kontekstu.

*A co znaczy to zdanie?*



# Przykład

Czy te dwa zdania są podobne?

*Liczby  $m$  i  $n$  są pierwsze.*

*Liczby  $m$  i  $n$  są względnie pierwsze.*

# Przykład

Czy te dwa zdania są podobne?

*Liczby  $m$  i  $n$  są pierwsze.*

*Liczby  $m$  i  $n$  są względnie pierwsze.*

Pierwsze zdanie mówi o własnościach pojedynczych liczb:

*$Pierwsze(m) \wedge Pierwsze(n)$ .*

# Przykład

Czy te dwa zdania są podobne?

*Liczby  $m$  i  $n$  są pierwsze.*

*Liczby  $m$  i  $n$  są względnie pierwsze.*

Pierwsze zdanie mówi o własnościach pojedynczych liczb:

*$Pierwsze(m) \wedge Pierwsze(n)$ .*

Drugie zdanie mówi o związku między liczbami:

*$Względnie\_pierwsze(m, n)$ .*

# Przykład

Czy te dwa zdania są podobne?

*Liczby  $m$  i  $n$  są pierwsze.*

*Liczby  $m$  i  $n$  są względnie pierwsze.*

Pierwsze zdanie mówi o własnościach pojedynczych liczb:

*$Pierwsze(m) \wedge Pierwsze(n)$ .*

Drugie zdanie mówi o związku między liczbami:

*$Względnie\_pierwsze(m, n)$ .*

Jak brzmi zaprzeczenie każdego z tych zdań?

A co znaczy to zdanie?

*Warunek  $W(x, y)$  zachodzi dla pewnego  $x$  i dla każdego  $y$ .*

A co znaczy to zdanie?

*Warunek  $W(x, y)$  zachodzi dla pewnego  $x$  i dla każdego  $y$ .*

Prawdopodobnie znaczy  $\exists x \forall y W(x, y)$

## A co znaczy to zdanie?

*Warunek  $W(x, y)$  zachodzi dla pewnego  $x$  i dla każdego  $y$ .*

Prawdopodobnie znaczy  $\exists x \forall y W(x, y)$ ,

ale zmienimy tylko kolejność:

## A co znaczy to zdanie?

Warunek  $W(x, y)$  zachodzi dla pewnego  $x$  i dla każdego  $y$ .

Prawdopodobnie znaczy  $\exists x \forall y W(x, y)$ ,

ale zmienimy tylko kolejność:

Warunek  $W(x, y)$  zachodzi dla każdego  $y$  i dla pewnego  $x$ .

## A co znaczy to zdanie?

Warunek  $W(x, y)$  zachodzi dla pewnego  $x$  i dla każdego  $y$ .

Prawdopodobnie znaczy  $\exists x \forall y W(x, y)$ ,

ale zmienmy tylko kolejność:

Warunek  $W(x, y)$  zachodzi dla każdego  $y$  i dla pewnego  $x$ .

Teraz można je zozumieć na dwa sposoby:

$$\exists x \forall y W(x, y) \quad \text{i} \quad \forall y \exists x W(x, y).$$

*„Odpowiednie dać rzeczy słowo”*

W matematyce posługujemy się językiem naturalnym.

## *„Odpowiednie dać rzeczy słowo”*

W matematyce posługujemy się językiem naturalnym.

Róbmy to w sposób precyzyjny i jednoznaczny.

## *„Odpowiednie dać rzeczy słowo”*

W matematyce posługujemy się językiem naturalnym.

Róbmy to w sposób precyzyjny i jednoznaczny.

Ale nie naśladujmy mechanicznie konstrukcji języka formalnego.

## *„Odpowiednie dać rzeczy słowo”*

W matematyce posługujemy się językiem naturalnym.

Róbmy to w sposób precyzyjny i jednoznaczny.

Ale nie naśladujmy mechanicznie konstrukcji języka formalnego.

Ani na odwrót.

# Teoria zbiorów



## Georg Cantor:

*Zbiorem nazywamy zgromadzenie w jedną całość  
wyraźnie wyróżnionych przedmiotów  
naszej intuicji lub naszej myśli.*

# Kłopoty ze zbiorami

$\{x \mid W(x)\}$  oznacza zbiór wszystkich  $x$  o własności  $W(x)$

# Kłopoty ze zbiorami

$\{x \mid W(x)\}$  oznacza zbiór wszystkich  $x$  o własności  $W(x)$

$$R = \{x \mid x \text{ jest zbiorem i } x \notin x\}$$

# Kłopoty ze zbiorami

$\{x \mid W(x)\}$  oznacza zbiór wszystkich  $x$  o własności  $W(x)$

$$R = \{x \mid x \text{ jest zbiorem i } x \notin x\}$$

Jeśli  $R \in R$ , to  $R \notin R \dots$

# Kłopoty ze zbiorami

$\{x \mid W(x)\}$  oznacza zbiór wszystkich  $x$  o własności  $W(x)$

$$R = \{x \mid x \text{ jest zbiorem i } x \notin x\}$$

Jeśli  $R \in R$ , to  $R \notin R$ ... ale jeśli  $R \notin R$ , to  $R \in R$ !

# Kłopoty ze zbiorami (Antynomia Russella)

$\{x \mid W(x)\}$  oznacza zbiór wszystkich  $x$  o własności  $W(x)$

$$R = \{x \mid x \text{ jest zbiorem i } x \notin x\}$$

Jeśli  $R \in R$ , to  $R \notin R$ ... ale jeśli  $R \notin R$ , to  $R \in R$ !

## Typy

Zbiór  $\{x \mid W(x)\}$  to „zmaterializowane” kryterium  $W(x)$ .

## Typy

Zbiór  $\{x \mid W(x)\}$  to „zmaterializowane” kryterium  $W(x)$ .

Ale nie każde kryterium  $W(x)$  ma sens dla dowolnego  $x$ .

## Typy

Zbiór  $\{x \mid W(x)\}$  to „zmaterializowane” kryterium  $W(x)$ .

Ale nie każde kryterium  $W(x)$  ma sens dla dowolnego  $x$ .

Wartości zmiennej  $x$  należą zawsze do pewnej dziedziny  $\mathcal{D}$ .

# Typy

Zbiór  $\{x \mid W(x)\}$  to „zmaterializowane” kryterium  $W(x)$ .

Ale nie każde kryterium  $W(x)$  ma sens dla dowolnego  $x$ .

Wartości zmiennej  $x$  należą zawsze do pewnej dziedziny  $\mathcal{D}$ .  
Takie dziedziny nazywamy *typami*.

# Typy

Zbiór  $\{x \mid W(x)\}$  to „zmaterializowane” kryterium  $W(x)$ .

Ale nie każde kryterium  $W(x)$  ma sens dla dowolnego  $x$ .

Wartości zmiennej  $x$  należą zawsze do pewnej dziedziny  $\mathcal{D}$ .  
Takie dziedziny nazywamy *typami*.

Zbiory tworzymy wybierając elementy ustalonego typu:

# Typy

Zbiór  $\{x \mid W(x)\}$  to „zmaterializowane” kryterium  $W(x)$ .

Ale nie każde kryterium  $W(x)$  ma sens dla dowolnego  $x$ .

Wartości zmiennej  $x$  należą zawsze do pewnej dziedziny  $\mathcal{D}$ .  
Takie dziedziny nazywamy *typami*.

Zbiory tworzymy wybierając elementy ustalonego typu:

$$\{x : \mathcal{D} \mid W(x)\}$$

## Definiowanie zbiorów

- ▶ Przez „wycinanie”:  $\{x : \mathcal{D} \mid W(x)\}$ .

$$y : \mathcal{D} \wedge W(y) \leftrightarrow y \in \{x : \mathcal{D} \mid W(x)\}.$$

## Definiowanie zbiorów

- ▶ Przez „wycinanie”:  $\{x : \mathcal{D} \mid W(x)\}$ .

$$y : \mathcal{D} \wedge W(y) \leftrightarrow y \in \{x : \mathcal{D} \mid W(x)\}.$$

- ▶ Przez „wyliczanie”:  $\{x_1, \dots, x_n\}$ , np.  $\{2\}$ ,  $\{1, 5\}$ .

## Równość (zasada Leibniza)

Przedmioty  $A$  i  $B$  są równe (jest to jeden i ten sam przedmiot) wtedy i tylko wtedy, gdy spełniają dokładnie te same kryteria:

$$x = y \leftrightarrow \forall A(x \in A \leftrightarrow y \in A).$$



## Równość zbiorów (zasada jednoznaczności)

Zbiory  $A$  i  $B$  są *równe* (jest to jeden i ten sam zbiór) wtedy i tylko wtedy, gdy mają dokładnie te same elementy.

$$A = B \quad \Leftrightarrow \quad \forall z(z \in A \leftrightarrow z \in B)$$

## Równość zbiorów (zasada jednoznaczności)

Zbiory  $A$  i  $B$  są *równe* (jest to jeden i ten sam zbiór) wtedy i tylko wtedy, gdy mają dokładnie te same elementy.

$$A = B \quad \Leftrightarrow \quad \forall z(z \in A \leftrightarrow z \in B)$$

A zatem  $\{a, b\}$ ,  $\{b, a\}$ ,  $\{b, a, b\}$  i  $\{a, b, b, a\}$  to to samo.

Zawieranie (inkluzja):

$$A \subseteq B \quad \Leftrightarrow \quad \forall z(z \in A \rightarrow z \in B).$$

Zawieranie (inkluzja):

$$A \subseteq B \quad \Leftrightarrow \quad \forall z(z \in A \rightarrow z \in B).$$

$$A = B \quad \Leftrightarrow \quad A \subseteq B \wedge B \subseteq A$$

## Zawieranie (inkluzja):

$$A \subseteq B \quad \Leftrightarrow \quad \forall z(z \in A \rightarrow z \in B).$$

$$A = B \quad \Leftrightarrow \quad A \subseteq B \wedge B \subseteq A$$

Notacja:

$A \not\subseteq B$  oznacza, że  $\neg A \subseteq B$

$A \subsetneq B$  oznacza, że  $A \subseteq B$ , ale  $A \neq B$

Zbiór (typ) potęgowy:

Elementami zbioru  $P(A)$  są wszystkie podzbiory zbioru  $A$

Zbiór (typ) potęgowy:

Elementami zbioru  $P(A)$  są wszystkie podzbiory zbioru  $A$

$$X \in P(A) \quad \Leftrightarrow \quad X \subseteq A$$

## Zbiór (typ) potęgowy:

Elementami zbioru  $P(A)$  są wszystkie podzbiory zbioru  $A$

$$X \in P(A) \quad \Leftrightarrow \quad X \subseteq A$$

Zbiory obiektów typu  $\mathcal{D}$  są typu  $P(\mathcal{D})$ .

$$P(A) = \{X : P(\mathcal{D}) \mid X \subseteq A\}$$

## Zbiór pusty

Mówimy, że zbiór jest *pusty*, gdy nie ma żadnego elementu.

## Zbiór pusty

Mówimy, że zbiór jest *pusty*, gdy nie ma żadnego elementu.

### Fakt

*Każdy typ  $\mathcal{D}$  ma dokładnie jeden pusty podzbiór.*

## Zbiór pusty

Mówimy, że zbiór jest *pusty*, gdy nie ma żadnego elementu.

### Fakt

*Każdy typ  $\mathcal{D}$  ma dokładnie jeden pusty podzbiór.*

**Dowód:** Gdyby były dwa, to miałyby te same elementy. □

## Zbiór pusty

Mówimy, że zbiór jest *pusty*, gdy nie ma żadnego elementu.

### Fakt

*Każdy typ  $\mathcal{D}$  ma dokładnie jeden pusty podzbiór.*

**Dowód:** Gdyby były dwa, to miałyby te same elementy. □

Zbiór pusty oznaczamy symbolem  $\emptyset$ .

## *Prawa De Morgana*

**Uwaga:** Mówiąc, że zbiór  $A$  jest pusty, zaprzeczamy stwierdzeniu  $\exists x. x \in A$ ; zauważmy, że znaczy to tyle samo, co stwierdzenie  $\forall x. x \notin A$ .

## Prawa De Morgana

**Uwaga:** Mówiąc, że zbiór  $A$  jest pusty, zaprzeczamy stwierdzeniu  $\exists x. x \in A$ ; zauważmy, że znaczy to tyle samo, co stwierdzenie  $\forall x. x \notin A$ . Inaczej:

$\neg \exists x. x \in A$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $\forall x. x \notin A$ .

## Prawa De Morgana

**Uwaga:** Mówiąc, że zbiór  $A$  jest pusty, zaprzeczamy stwierdzeniu  $\exists x. x \in A$ ; zauważmy, że znaczy to tyle samo, co stwierdzenie  $\forall x. x \notin A$ . Inaczej:

$\neg \exists x. x \in A$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $\forall x. x \notin A$ .

Ogólnie:

$\neg \exists x. W(x)$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $\forall x. \neg W(x)$ .

# Prawa De Morgana

**Uwaga:** Mówiąc, że zbiór  $A$  jest pusty, zaprzeczamy stwierdzeniu  $\exists x. x \in A$ ; zauważmy, że znaczy to tyle samo, co stwierdzenie  $\forall x. x \notin A$ . Inaczej:

$\neg \exists x. x \in A$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $\forall x. x \notin A$ .

Ogólnie:

$\neg \exists x. W(x)$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $\forall x. \neg W(x)$ .

$\neg \forall x W(x)$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $\exists x. \neg W(x)$ .

## Działania na zbiorach

Niech  $A, B : P(\mathcal{D})$ . Wówczas:

- ▶ *Sumą* zbiorów  $A$  i  $B$  nazywamy zbiór

$$A \cup B = \{x : \mathcal{D} \mid x \in A \vee x \in B\}.$$

## Działania na zbiorach

Niech  $A, B : P(\mathcal{D})$ . Wówczas:

- ▶ *Sumą* zbiorów  $A$  i  $B$  nazywamy zbiór

$$A \cup B = \{x : \mathcal{D} \mid x \in A \vee x \in B\}.$$

- ▶ *Iloczyn* lub *przecięcie* zbiorów  $A$  i  $B$  to zbiór

$$A \cap B = \{x : \mathcal{D} \mid x \in A \wedge x \in B\}.$$

## Działania na zbiorach

Niech  $A, B : P(\mathcal{D})$ . Wówczas:

- ▶ *Sumą* zbiorów  $A$  i  $B$  nazywamy zbiór

$$A \cup B = \{x : \mathcal{D} \mid x \in A \vee x \in B\}.$$

- ▶ *Iloczyn* lub *przecięcie* zbiorów  $A$  i  $B$  to zbiór

$$A \cap B = \{x : \mathcal{D} \mid x \in A \wedge x \in B\}.$$

- ▶ *Różnicą* zbiorów  $A$  i  $B$  nazywamy zbiór

$$A - B = \{x : \mathcal{D} \mid x \in A \wedge x \notin B\}.$$

## Działania na zbiorach

Niech  $A, B : P(\mathcal{D})$ . Wówczas:

- ▶ *Sumą* zbiorów  $A$  i  $B$  nazywamy zbiór

$$A \cup B = \{x : \mathcal{D} \mid x \in A \vee x \in B\}.$$

- ▶ *Iloczyn* lub *przecięcie* zbiorów  $A$  i  $B$  to zbiór

$$A \cap B = \{x : \mathcal{D} \mid x \in A \wedge x \in B\}.$$

- ▶ *Różnicą* zbiorów  $A$  i  $B$  nazywamy zbiór

$$A - B = \{x : \mathcal{D} \mid x \in A \wedge x \notin B\}.$$

- ▶ *Dopełnienie* zbioru  $A$  (do typu  $\mathcal{D}$ ) to zbiór

$$-A = \{x : \mathcal{D} \mid x \notin A\}$$

(czyli różnica  $\mathcal{D} - A$ ).

## Złote myśli

$$x \in A \cup B \quad \Leftrightarrow \quad x \in A \vee x \in B$$

## Złote myśli

$$x \in A \cup B \quad \Leftrightarrow \quad x \in A \vee x \in B$$

$$x \in A \cap B \quad \Leftrightarrow \quad x \in A \wedge x \in B$$

## Złote myśli

$$x \in A \cup B \quad \Leftrightarrow \quad x \in A \vee x \in B$$

$$x \in A \cap B \quad \Leftrightarrow \quad x \in A \wedge x \in B$$

$$x \in A - B \quad \Leftrightarrow \quad x \in A \wedge x \notin B$$

## Złote myśli

$$x \in A \cup B \quad \Leftrightarrow \quad x \in A \vee x \in B$$

$$x \in A \cap B \quad \Leftrightarrow \quad x \in A \wedge x \in B$$

$$x \in A - B \quad \Leftrightarrow \quad x \in A \wedge x \notin B$$

$$x \in -A \quad \Leftrightarrow \quad x \notin A$$

## Ćwiczenie

*Udowodnić, że dla dowolnych  $A$  i  $B$  jeśli  $A - B = \emptyset$  to  $A \subseteq B$ .*

## Ćwiczenie

*Udowodnić, że dla dowolnych  $A$  i  $B$  jeśli  $A - B = \emptyset$  to  $A \subseteq B$ .*

**Rozwiązanie:** Niech  $A - B = \emptyset$  oraz  $x \in A$ . Gdyby  $x \notin B$ , to  $x \in A - B = \emptyset$ , sprzeczność. Zatem  $x \in B$ .



*Jeśli  $A - B = \emptyset$  to  $A \subseteq B$*

Założmy, że  $A - B = \emptyset$ .

Jeśli  $A - B = \emptyset$  to  $A \subseteq B$

Założmy, że  $A - B = \emptyset$ .

(Cel 1:  $A \subseteq B$ )

Jeśli  $A - B = \emptyset$  to  $A \subseteq B$

Założmy, że  $A - B = \emptyset$ .

Weźmy dowolne  $x \in A$ .

(Cel 1:  $A \subseteq B$ )

Jeśli  $A - B = \emptyset$  to  $A \subseteq B$

Założmy, że  $A - B = \emptyset$ .

Weźmy dowolne  $x \in A$ .

(Cel 1:  $A \subseteq B$ )

(Cel 2:  $x \in B$ )

Jeśli  $A - B = \emptyset$  to  $A \subseteq B$

Założmy, że  $A - B = \emptyset$ .

Weźmy dowolne  $x \in A$ .

Założmy, że  $x \notin B$ .

(Cel 1:  $A \subseteq B$ )

(Cel 2:  $x \in B$ )

Jeśli  $A - B = \emptyset$  to  $A \subseteq B$

Założmy, że  $A - B = \emptyset$ .

Weźmy dowolne  $x \in A$ .

Założmy, że  $x \notin B$ .

(Cel 1:  $A \subseteq B$ )

(Cel 2:  $x \in B$ )

(Cel 3: sprzeczność)

Jeśli  $A - B = \emptyset$  to  $A \subseteq B$

Założmy, że  $A - B = \emptyset$ .

Weźmy dowolne  $x \in A$ .

Założmy, że  $x \notin B$ .

Skoro  $x \in A$  i  $x \notin B$ , to  $x \in A - B$ .

*(Cel 1:  $A \subseteq B$ )*

*(Cel 2:  $x \in B$ )*

*(Cel 3: sprzeczność)*

Jeśli  $A - B = \emptyset$  to  $A \subseteq B$

Założmy, że  $A - B = \emptyset$ .

(Cel 1:  $A \subseteq B$ )

Weźmy dowolne  $x \in A$ .

(Cel 2:  $x \in B$ )

Założmy, że  $x \notin B$ .

(Cel 3: sprzeczność)

Skoro  $x \in A$  i  $x \notin B$ , to  $x \in A - B$ .

Ale  $A - B = \emptyset$ , więc  $x \in \emptyset$ , sprzeczność.

Jeśli  $A - B = \emptyset$  to  $A \subseteq B$

Założmy, że  $A - B = \emptyset$ .

(Cel 1:  $A \subseteq B$ )

Weźmy dowolne  $x \in A$ .

(Cel 2:  $x \in B$ )

Założmy, że  $x \notin B$ .

(Cel 3: sprzeczność)

Skoro  $x \in A$  i  $x \notin B$ , to  $x \in A - B$ .

Ale  $A - B = \emptyset$ , więc  $x \in \emptyset$ , sprzeczność. (Cel 3 osiągnięty)

Jeśli  $A - B = \emptyset$  to  $A \subseteq B$

Założmy, że  $A - B = \emptyset$ .

*(Cel 1:  $A \subseteq B$ )*

Weźmy dowolne  $x \in A$ .

*(Cel 2:  $x \in B$ )*

Założmy, że  $x \notin B$ .

*(Cel 3: sprzeczność)*

Skoro  $x \in A$  i  $x \notin B$ , to  $x \in A - B$ .

Ale  $A - B = \emptyset$ , więc  $x \in \emptyset$ , sprzeczność. *(Cel 3 osiągnięty)*

Zatem  $x \in B$ .

Jeśli  $A - B = \emptyset$  to  $A \subseteq B$

Założmy, że  $A - B = \emptyset$ .

*(Cel 1:  $A \subseteq B$ )*

Weźmy dowolne  $x \in A$ .

*(Cel 2:  $x \in B$ )*

Założmy, że  $x \notin B$ .

*(Cel 3: sprzeczność)*

Skoro  $x \in A$  i  $x \notin B$ , to  $x \in A - B$ .

Ale  $A - B = \emptyset$ , więc  $x \in \emptyset$ , sprzeczność.

*(Cel 3 osiągnięty)*

Zatem  $x \in B$ .

*(Cel 2 osiągnięty)*

Jeśli  $A - B = \emptyset$  to  $A \subseteq B$

Założmy, że  $A - B = \emptyset$ .

*(Cel 1:  $A \subseteq B$ )*

Weźmy dowolne  $x \in A$ .

*(Cel 2:  $x \in B$ )*

Założmy, że  $x \notin B$ .

*(Cel 3: sprzeczność)*

Skoro  $x \in A$  i  $x \notin B$ , to  $x \in A - B$ .

Ale  $A - B = \emptyset$ , więc  $x \in \emptyset$ , sprzeczność.

*(Cel 3 osiągnięty)*

Zatem  $x \in B$ .

*(Cel 2 osiągnięty)*

Zatem  $\forall x(x \in A \rightarrow x \in B)$ , czyli  $A \subseteq B$ .

Jeśli  $A - B = \emptyset$  to  $A \subseteq B$

Założmy, że  $A - B = \emptyset$ .

*(Cel 1:  $A \subseteq B$ )*

Weźmy dowolne  $x \in A$ .

*(Cel 2:  $x \in B$ )*

Założmy, że  $x \notin B$ .

*(Cel 3: sprzeczność)*

Skoro  $x \in A$  i  $x \notin B$ , to  $x \in A - B$ .

Ale  $A - B = \emptyset$ , więc  $x \in \emptyset$ , sprzeczność.

*(Cel 3 osiągnięty)*

Zatem  $x \in B$ .

*(Cel 2 osiągnięty)*

Zatem  $\forall x(x \in A \rightarrow x \in B)$ , czyli  $A \subseteq B$ .

*(Cel 1 osiągnięty)*

Jeśli  $A - B = \emptyset$  to  $A \subseteq B$

Założmy, że  $A - B = \emptyset$ .

*(Cel 1:  $A \subseteq B$ )*

Weźmy dowolne  $x \in A$ .

*(Cel 2:  $x \in B$ )*

Założmy, że  $x \notin B$ .

*(Cel 3: sprzeczność)*

Skoro  $x \in A$  i  $x \notin B$ , to  $x \in A - B$ .

Ale  $A - B = \emptyset$ , więc  $x \in \emptyset$ , sprzeczność.

*(Cel 3 osiągnięty)*

Zatem  $x \in B$ .

*(Cel 2 osiągnięty)*

Zatem  $\forall x(x \in A \rightarrow x \in B)$ , czyli  $A \subseteq B$ .

*(Cel 1 osiągnięty)*

Zatem jeśli  $A - B = \emptyset$  to  $A \subseteq B$ .

Jeśli  $A - B = \emptyset$  to  $A \subseteq B$

Założmy, że  $A - B = \emptyset$ . (Cel 1:  $A \subseteq B$ )

Weźmy dowolne  $x \in A$ . (Cel 2:  $x \in B$ )

Założmy, że  $x \notin B$ . (Cel 3: sprzeczność)

Skoro  $x \in A$  i  $x \notin B$ , to  $x \in A - B$ .

Ale  $A - B = \emptyset$ , więc  $x \in \emptyset$ , sprzeczność. (Cel 3 osiągnięty)

Zatem  $x \in B$ . (Cel 2 osiągnięty)

Zatem  $\forall x(x \in A \rightarrow x \in B)$ , czyli  $A \subseteq B$ . (Cel 1 osiągnięty)

Zatem jeśli  $A - B = \emptyset$  to  $A \subseteq B$ .

Jeśli  $A - B = \emptyset$  to  $A \subseteq B$

Założmy, że  $A - B = \emptyset$ . (Cel 1:  $A \subseteq B$ )

Weźmy dowolne  $x \in A$ . (Cel 2:  $x \in B$ )

Założmy, że  $x \notin B$ . (Cel 3: sprzeczność)

Skoro  $x \in A$  i  $x \notin B$ , to  $x \in A - B$ .

Ale  $A - B = \emptyset$ , więc  $x \in \emptyset$ , sprzeczność. (Cel 3 osiągnięty)

Zatem  $x \in B$ . (Cel 2 osiągnięty)

Zatem  $\forall x(x \in A \rightarrow x \in B)$ , czyli  $A \subseteq B$ . (Cel 1 osiągnięty)

Zatem jeśli  $A - B = \emptyset$  to  $A \subseteq B$ .

Niech  $A - B = \emptyset$  oraz  $x \in A$ . Gdyby  $x \notin B$ ,  
to  $x \in A - B = \emptyset$ , sprzeczność. Zatem  $x \in B$ .