

Podstawy matematyki dla informatyków

Wykład 12

12 stycznia 2011

- ▶ Reguły *wprowadzania* spójników logicznych: jak można udowodnić formułę danej postaci?
- ▶ Reguły *eliminacji* spójników: jak można wykorzystać formułę tej postaci do udowodnienia innej?

Reguły wnioskowania dla rachunku zdań (1)

$$\frac{}{\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \varphi} (\text{Ax})$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B} (\text{W}\wedge) \quad \frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash A} (\text{E}\wedge) \quad \frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash B} (\text{E}\wedge)$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash A \rightarrow B}{\Gamma \vdash B} (\text{E} \rightarrow) \quad \frac{\Gamma \cup \{A\} \vdash B}{\Gamma \vdash A \rightarrow B} (\text{W} \rightarrow)$$

Reguły wnioskowania dla rachunku zdań (2)

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B} (\text{W}\vee) \quad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B} (\text{W}\vee)$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \vee B \quad \Gamma \cup \{A\} \vdash C \quad \Gamma \cup \{B\} \vdash C}{\Gamma \vdash C} (\text{E}\vee)$$

$$\frac{\Gamma \cup \{A\} \vdash \perp}{\Gamma \vdash \neg A} (\text{W}\neg) \quad \frac{\Gamma \vdash \neg A \quad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash \perp} (\text{E}\neg)$$

$$\frac{\Gamma \vdash \perp}{\Gamma \vdash A} (\text{E}\perp) \quad \frac{\Gamma \cup \{\neg A\} \vdash \perp}{\Gamma \vdash A} (\text{E}\neg\neg)$$

Dowód formalny

Dowód formalny osądu $\Gamma \vdash \varphi$ w naturalnej dedukcji, to drzewo skończone, w którym każdemu wierzchołkowi przypisano pewien osąd. Przy tym:

- ▶ Korzeniowi drzewa przypisano osąd $\Gamma \vdash \varphi$.
- ▶ Osąd przypisany dowolnemu wierzchołkowi powstaje z osądów przypisanych jego poprzednikom poprzez zastosowanie jednej z reguł wnioskowania.
- ▶ Liściom przypisano osądy postaci $\Delta, \alpha \vdash \alpha$.

Przykład 1: $\neg\beta \vdash \neg(\beta \wedge \gamma)$

$$\frac{\frac{\neg\beta, \beta \wedge \gamma \vdash \beta \wedge \gamma}{\neg\beta, \beta \wedge \gamma \vdash \beta} (E\wedge)}{\neg\beta, \beta \wedge \gamma \vdash \perp} (E\neg)}{\neg\beta \vdash \neg(\beta \wedge \gamma)} (W\neg)$$

$\neg\beta, [\beta \wedge \gamma, \beta, \perp], \neg(\beta \wedge \gamma)$.

◦

Eliminacja kwantyfikatora ogólnego

$$\frac{\Gamma \vdash \forall x A(x)}{\Gamma \vdash A(y)} (E\forall)$$

(W miejscu y może być nazwa dowolnego obiektu.)

Wprowadzanie kwantyfikatora ogólnego

$$\frac{\Gamma \vdash A(x)}{\Gamma \vdash \forall x A(x)} (W\forall)$$

(x nie jest wolne w Γ)

Wprowadzanie kwantyfikatora szczegółowego

$$\frac{\Gamma \vdash A(y)}{\Gamma \vdash \exists x A(x)} \text{ (W}\exists\text{)}$$

(W miejscu y może być nazwa dowolnego obiektu.)

Eliminacja kwantyfikatora szczegółowego

$$\frac{\Gamma \vdash \exists x A(x) \quad \Gamma \cup \{A(x)\} \vdash B}{\Gamma \vdash B} \text{ (E}\exists\text{)}$$

(x nie jest wolne w $\Gamma \cup \{B\}$)

Poprawność i pełność (dla rachunku zdań)

Twierdzenie (o pełności)

- ▶ System naturalnej dedukcji jest *poprawny*: Jeśli formuła ma dowód (jest *twierdzeniem*) to jest tautologią.
- ▶ System naturalnej dedukcji jest *pełny*: Każda tautologia ma dowód.

Przypomnienie notacji

Piszemy $\varrho \models \Gamma$, gdy $\llbracket \gamma \rrbracket_{\varrho} = 1$, dla każdego $\gamma \in \Gamma$.

Piszemy $\Gamma \models \alpha$, gdy dla dowolnej interpretacji zdaniowej ϱ :
jeżeli $\varrho \models \Gamma$, to także $\llbracket \alpha \rrbracket_{\varrho} = 1$.

Jeśli osąd $\Gamma \vdash \alpha$ ma dowód, to piszemy po prostu " $\Gamma \vdash \alpha$ ".

Poprawność

Twierdzenie: *Jeśli osąd $\Gamma \vdash \alpha$ ma dowód, to $\Gamma \models \alpha$.*

Dowód: Dowód jest przez indukcję ze względu na wielkość... dowodu $\Gamma \vdash \alpha$. Rozważamy kilka przypadków, zależnie od ostatniej użytej reguły.

Przypadek 1: Osąd $\Gamma \vdash \alpha$ jest aksjomatem, tj. $\Gamma = \Gamma' \cup \{\alpha\}$. Wtedy teza jest oczywista.

Przypadek 2: Osąd $\Gamma \vdash \alpha$ otrzymano przez (E \rightarrow) z osądów $\Gamma \vdash \beta \rightarrow \alpha$ i $\Gamma \vdash \beta$. Z założenia indukcyjnego $\Gamma \models \beta \rightarrow \alpha$ oraz $\Gamma \models \beta$, bo te dowody mają mniejsze rozmiary. Jeśli więc $\varrho \models \Gamma$, to ϱ spełnia obie formuły $\beta \rightarrow \alpha$ i β . Wtedy ϱ musi też spełniać α .

Jeśli $\Gamma \vdash \alpha$, to $\Gamma \models \alpha$

Przypadek 3: Osąd $\Gamma \vdash \alpha$ otrzymano przez (W \rightarrow).

Wtedy $\alpha = \beta \rightarrow \gamma$ oraz $\Gamma, \beta \vdash \gamma$ ma dowód mniejszych rozmiarów, zatem $\Gamma \cup \{\beta\} \models \gamma$, z założenia indukcyjnego.

Założmy, że $\varrho \models \Gamma$. Jeśli $\llbracket \beta \rrbracket_{\varrho} = 1$, to $\varrho \models \Gamma \cup \{\beta\}$, więc $\llbracket \gamma \rrbracket_{\varrho} = 1$, skąd $\llbracket \beta \rightarrow \gamma \rrbracket_{\varrho} = 1$. A jeśli $\llbracket \beta \rrbracket_{\varrho} = 0$, to tym bardziej $\llbracket \beta \rightarrow \gamma \rrbracket_{\varrho} = 1$.

Jeśli $\Gamma \vdash \alpha$, to $\Gamma \models \alpha$

Przypadek 4: Osąd $\Gamma \vdash \alpha$ otrzymano przez (E \perp) z $\Gamma \vdash \perp$. Z założenia indukcyjnego dostajemy $\Gamma \models \perp$, co oznacza, że nie istnieje interpretacja zdaniowa spełniająca Γ .

A więc $\Gamma \models \alpha$, walkowerem.

Przypadek 5: Osąd $\Gamma \vdash \alpha$ otrzymano z pomocą reguły (E $\neg\neg$) z osądu $\Gamma \cup \{\neg\alpha\} \vdash \perp$. Wtedy $\Gamma, \neg\alpha \models \perp$ z założenia indukcyjnego, czyli nie istnieje interpretacja zdaniowa spełniająca $\Gamma \cup \{\neg\alpha\}$. Znaczy to dokładnie tyle, że każda interpretacja zdaniowa spełniająca Γ musi spełniać α .

Jeśli $\Gamma \vdash \alpha$, to $\Gamma \models \alpha$

Przypadek 6: Osąd $\Gamma \vdash \alpha$ otrzymano z pomocą reguły (EV) z trzech osądów: $\Gamma \vdash \beta \vee \gamma$, $\Gamma \cup \{\beta\} \vdash \alpha$, $\Gamma \cup \{\gamma\} \vdash \alpha$. Z założenia indukcyjnego wiemy, że $\Gamma \models \beta \vee \gamma$.

Jeśli więc $\varrho \models \Gamma$, to $\llbracket \beta \rrbracket_{\varrho} = 1$ lub $\llbracket \gamma \rrbracket_{\varrho} = 1$, skąd ϱ spełnia jeden ze zbiorów $\Gamma \cup \{\beta\}$, $\Gamma \cup \{\gamma\}$. W obu przypadkach z założenia indukcyjnego wynika, że $\llbracket \alpha \rrbracket_{\varrho} = 1$.

Przypadki 7–13: Podobnie.

Pełność: *Jeśli* $\models \alpha$, *to* $\vdash \alpha$

Lemat 1:

Następujące osądy mają dowody w naturalnej dedukcji:

1. $\beta, \gamma \vdash \beta \wedge \gamma$;
2. $\beta, \neg\gamma \vdash \neg(\beta \rightarrow \gamma)$;
3. $\neg\beta, \neg\gamma \vdash \neg(\beta \vee \gamma)$;
4. $\neg\beta \vdash \neg(\beta \wedge \gamma)$ oraz $\neg\gamma \vdash \neg(\beta \wedge \gamma)$;
5. $\neg\beta \vdash \beta \rightarrow \gamma$;
6. $\gamma \vdash \beta \rightarrow \gamma$;
7. $\vdash \neg\perp$;
8. $\alpha \vee \neg\alpha$;

(1) $\beta, \gamma \vdash \beta \wedge \gamma$

$$\frac{\beta, \gamma \vdash \beta \quad \beta, \gamma \vdash \gamma}{\beta, \gamma \vdash \beta \wedge \gamma} (W\wedge)$$

$\beta, \gamma, \beta \wedge \gamma.$

◦

(2) $\beta, \neg\gamma \vdash \neg(\beta \rightarrow \gamma)$

Oznaczenie: $\Gamma = \{\beta, \neg\gamma, \beta \rightarrow \gamma\}$

$$\frac{\frac{\frac{\Gamma \vdash \neg\gamma \quad \frac{\Gamma \vdash \beta \quad \Gamma \vdash \beta \rightarrow \gamma}{\Gamma \vdash \gamma} (E \rightarrow)}{\Gamma \vdash \perp} (E\neg)}{\beta, \neg\gamma \vdash \neg(\beta \rightarrow \gamma)} (W\neg)}$$

$\beta, \neg\gamma, [\beta \rightarrow \gamma, \gamma, \perp], \neg(\beta \rightarrow \gamma).$

◦

(3) $\neg\beta, \neg\gamma \vdash \neg(\beta \vee \gamma)$

Oznaczenie: $\Gamma = \{\neg\beta, \neg\gamma, \beta \vee \gamma\}$

$$\frac{\frac{\frac{\Gamma \vdash \beta \vee \gamma \quad \frac{\frac{\Gamma, \beta \vdash \beta \quad \Gamma, \beta \vdash \neg\beta}{\Gamma, \beta \vdash \perp} (E\neg)}{\Gamma, \gamma \vdash \perp} (E\vee)}{\Gamma \vdash \perp} (E\perp)}{\neg\beta, \neg\gamma \vdash \neg(\beta \vee \gamma)} (E\perp)}$$

$\neg\beta, \neg\gamma, [\beta \vee \gamma, [\beta, \perp], [\gamma, \perp], \perp], \neg(\beta \vee \gamma).$

◦

(5) $\neg\beta \vdash \beta \rightarrow \gamma$

$$\frac{\frac{\frac{\neg\beta, \beta \vdash \neg\beta \quad \neg\beta, \beta \vdash \beta}{\neg\beta, \beta \vdash \perp} (\text{E}\neg) \quad \frac{\neg\beta, \beta \vdash \perp}{\neg\beta, \beta \vdash \gamma} (\text{E}\perp)}{\neg\beta, \beta \vdash \gamma} (\text{W}\rightarrow) \quad \frac{\neg\beta, \beta \vdash \gamma}{\neg\beta \vdash \beta \rightarrow \gamma} (\text{W}\rightarrow)}$$

$\neg\beta, [\beta, \perp, \gamma], \beta \rightarrow \gamma.$

o

(6) $\gamma \vdash \beta \rightarrow \gamma$

$$\frac{\gamma, \beta \vdash \gamma}{\gamma \vdash \beta \rightarrow \gamma} (\text{W}\rightarrow)$$

$\gamma, [\beta, \gamma], \beta \rightarrow \gamma.$

o

(7) $\vdash \neg\perp$

$$\frac{\perp \vdash \perp}{\vdash \neg\perp} (\text{W}\neg)$$

$[\perp, \perp], \neg\perp.$

o

(8) $\alpha \vee \neg\alpha$

Oznaczenie: $\xi = \alpha \vee \neg\alpha$

$$\frac{\frac{\frac{\frac{\neg\xi, \alpha \vdash \alpha}{\neg\xi, \alpha \vdash \xi} (\text{W}\vee) \quad \frac{\neg\xi, \alpha \vdash \neg\xi}{\neg\xi, \alpha \vdash \perp} (\text{E}\neg)}{\neg\xi, \alpha \vdash \xi} (\text{E}\neg) \quad \frac{\neg\xi, \alpha \vdash \perp}{\neg\xi \vdash \neg\alpha} (\text{W}\neg) \quad \frac{\neg\xi \vdash \neg\alpha}{\neg\xi \vdash \xi} (\text{W}\vee)}{\neg\xi \vdash \neg\xi} (\text{E}\neg) \quad \frac{\neg\xi \vdash \perp}{\vdash \xi} (\text{E}\neg\neg)}$$

$[\neg(\alpha \vee \neg\alpha), [\alpha, \alpha \vee \neg\alpha, \perp], \neg\alpha, \alpha \vee \neg\alpha, \perp], \alpha \vee \neg\alpha.$

o

Pełność: *Jeśli $\models \alpha$, to $\vdash \alpha$*

Lemat 2 (Osłabianie): Jeśli $\Gamma \vdash \alpha$ to także $\Gamma \cup \Delta \vdash \alpha$.

Dowód: We wszystkich osądach występujących w dowodzie $\Gamma \vdash \alpha$ dopisujemy Δ po lewej stronie. (Porządny dowód jest przez indukcję.)

Lemat 4: Jeśli $\Gamma \cup \{\gamma\} \vdash \alpha$ oraz $\Gamma \cup \{\neg\gamma\} \vdash \alpha$, to $\Gamma \vdash \alpha$.

Dowód: Ponieważ $\vdash \gamma \vee \neg\gamma$, więc $\Gamma \vdash \gamma \vee \neg\gamma$ (osłabianie). Teraz należy zastosować regułę eliminacji alternatywy:

$$\frac{\Gamma \vdash \gamma \vee \neg\gamma \quad \Gamma \cup \{\gamma\} \vdash \alpha \quad \Gamma \cup \{\neg\gamma\} \vdash \alpha}{\Gamma \vdash \alpha}$$

Lemat 3 (Reguła cięcia):

Jeśli $\Gamma \vdash \alpha$ oraz $\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta$, to $\Gamma \vdash \beta$.

Dowód:

$$\frac{\frac{\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta}{\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta} (W \rightarrow) \quad \Gamma \vdash \alpha}{\Gamma \vdash \beta} (E \rightarrow)$$

Wniosek:

Jeśli $\Gamma \vdash \alpha_1, \dots, \Gamma \vdash \alpha_n$, oraz $\Gamma, \alpha_1, \dots, \alpha_n \vdash \beta$, to $\Gamma \vdash \beta$.

Lemat Kalmára

Oznaczenie: Dla dowolnej interpretacji zdaniowej ϱ i dowolnej formuły α przyjmijmy, że

$$\alpha^e = \begin{cases} \alpha, & \text{jeśli } \llbracket \alpha \rrbracket_e = 1; \\ \neg\alpha, & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Na przykład jeśli $\varrho(p) = 0$ i $\varrho(q) = 1$, to $q^e = q$ oraz $((p \rightarrow q) \rightarrow p)^e = \neg((p \rightarrow q) \rightarrow p)$.

Lemat Kalmára: Niech p_1, \dots, p_n będą wszystkimi symbolami zdaniowymi występującymi w formule α . Wówczas $p_1^e, \dots, p_n^e \vdash \alpha^e$.

Lemat Kalmára

Jeśli p_1, \dots, p_n są wszystkimi symbolami zdaniowymi występującymi w formule α , to $p_1^e, \dots, p_n^e \vdash \alpha^e$.

Dowód: Indukcja ze względu na długość formuły α .

Przypadek 1: Jeśli $\alpha = p_i$, to $p_1^e, \dots, p_n^e \vdash p_i^e$ jest aksjomatem.

Przypadek 2: Jeśli $\alpha = \perp$, to $\alpha^e = \neg\perp$. A skoro $\vdash \neg\perp$, to także $p_1^e, \dots, p_n^e \vdash \neg\perp$.

Dowód lematu Kalmára

Przypadek 3: Niech $\alpha = \beta \rightarrow \gamma$.

Jeśli $\llbracket \alpha \rrbracket_e = 0$ to $\llbracket \beta \rrbracket_e = 1$ i $\llbracket \gamma \rrbracket_e = 0$. Formuły β i γ są krótsze od α , więc $p_1^e, \dots, p_n^e \vdash \beta$ oraz $p_1^e, \dots, p_n^e \vdash \neg\gamma$ z założenia indukcyjnego. Z lematu 1(2) wiadomo, że $\beta, \neg\gamma \vdash \neg(\beta \rightarrow \gamma)$. Używając osłabiania i reguły cięcia dostaniemy tezę.

Jeśli $\llbracket \alpha \rrbracket_e = 1$, to albo $\llbracket \beta \rrbracket_e = 0$ albo $\llbracket \gamma \rrbracket_e = 1$.

W pierwszym przypadku z założenia indukcyjnego wiemy, że $p_1^e, \dots, p_n^e \vdash \neg\beta$, a w drugim, że $p_1^e, \dots, p_n^e \vdash \gamma$. W obu przypadkach potrafimy udowodnić $\beta \rightarrow \gamma$ z lematu 1(5,6).

Dowód lematu Kalmára

Przypadek 4: Załóżmy, że $\alpha = \beta \vee \gamma$ i niech $\llbracket \alpha \rrbracket_e = 1$. Zatem $\llbracket \beta \rrbracket_e = 1$ lub $\llbracket \gamma \rrbracket_e = 1$. Wtedy jedna z formuł β, γ ma dowód przy założeniach p_1^e, \dots, p_n^e i stosując zasadę wprowadzania alternatywy od razu dostajemy $p_1^e, \dots, p_n^e \vdash \beta \vee \gamma$.

Jeśli natomiast $\llbracket \alpha \rrbracket_e = 0$, to z założenia indukcyjnego wynika, że mamy dowody formuł $\neg\gamma$ i $\neg\beta$. Ale z lematu 1(3) mamy $\neg\beta, \neg\gamma \vdash \neg(\beta \vee \gamma)$, skąd wynika $p_1^e, \dots, p_n^e \vdash \beta \vee \gamma$.

Dowód lematu Kalmára

Przypadek 5: Niech $\alpha = \beta \wedge \gamma$

Jeśli $\llbracket \alpha \rrbracket_e = 1$, to $\llbracket \beta \rrbracket_e = \llbracket \gamma \rrbracket_e = 1$ i mamy dowody osądów $p_1^e, \dots, p_n^e \vdash \beta$ i $p_1^e, \dots, p_n^e \vdash \gamma$. Pozostaje zastosować regułę $(W\wedge)$.

Jeśli $\llbracket \alpha \rrbracket_e = 0$, to jedna z wartości $\llbracket \beta \rrbracket_e, \llbracket \gamma \rrbracket_e$ jest zerem, istnieje więc dowód osądu $p_1^e, \dots, p_n^e \vdash \neg\beta$ lub osądu $p_1^e, \dots, p_n^e \vdash \neg\gamma$. Można teraz skorzystać z tego, że $\neg\beta \vdash \neg(\beta \wedge \gamma)$ oraz $\neg\gamma \vdash \neg(\beta \wedge \gamma)$.

Dowód lematu Kalmára

Przypadek 6: Niech $\alpha = \neg\beta$.

Jeśli $\llbracket\alpha\rrbracket_\varrho = 1$ to $\llbracket\beta\rrbracket_\varrho = 0$ i z założenia indukcyjnego $p_1^\varrho, \dots, p_n^\varrho \vdash \neg\beta$.

W przeciwnym razie, $p_1^\varrho, \dots, p_n^\varrho \vdash \beta$, a skoro $\beta \vdash \neg\neg\beta$, więc $p_1^\varrho, \dots, p_n^\varrho \vdash \neg\alpha$.

Krok indukcyjny

Założenie indukcyjne:

$p_1^\varrho, \dots, p_m^\varrho, p_{m+1}^\varrho \vdash \alpha$, dla dowolnego ϱ .

Teza:

$p_1^\varrho, \dots, p_m^\varrho \vdash \alpha$, dla dowolnego ϱ .

Weźmy dowolne ϱ . Z założenia indukcyjnego wynika, że

$p_1^\varrho, \dots, p_m^\varrho, p_{m+1}^\varrho \vdash \alpha$ oraz $p_1^\varrho, \dots, p_m^\varrho, \neg p_{m+1}^\varrho \vdash \alpha$

Pozostaje skorzystać z lematu 4

(Jeśli $\Gamma \cup \{\gamma\} \vdash \alpha$ oraz $\Gamma \cup \{\neg\gamma\} \vdash \alpha$, to $\Gamma \vdash \alpha$.)

Pełność rachunku zdań

Twierdzenie (o pełności): Każda tautologia ma dowód.

Dowód: Niech α będzie tautologią zdaniową.

Wtedy $\alpha^\varrho = \alpha$ dla dowolnej interpretacji ϱ .

Niech p_1, \dots, p_n będą wszystkimi symbolami zdaniowymi w formule α . Udowodnimy, że dla dowolnego $m \leq n$

i dowolnego ϱ zachodzi $p_1^\varrho, \dots, p_m^\varrho \vdash \alpha$.

Przyjmując $m = 0$ otrzymamy $\vdash \alpha$.

Dowód przebiega przez indukcję ze względu na $n - m$.

Dla $m = n$ teza wynika z lematu Kalmára.

Nieco silniejsza wersja twierdzenia o pełności

Twierdzenie (łatwe): Dla dowolnej formuły φ i dowolnego skończonego zbioru formuł Γ zachodzi równoważność:

$\Gamma \vdash \varphi$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\Gamma \models \varphi$

Twierdzenie (trudne): Jeżeli $\Gamma \models \varphi$, to istnieje taki skończony podzbiór $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$, że $\Gamma_0 \vdash \varphi$.

Twierdzenie (o zwartości): Jeżeli $\Gamma \models \varphi$, to istnieje taki skończony podzbiór $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$, że $\Gamma_0 \models \varphi$.

Zwartość

Twierdzenie (o zwartości): Jeżeli $\Gamma \models \varphi$, to istnieje taki skończony podzbiór $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$, że $\Gamma_0 \models \varphi$.

Wniosek: Jeżeli każdy skończony podzbiór zbioru Γ jest spełnialny, to cały zbiór Γ jest spełnialny.

Dowód: Jeśli Γ nie jest spełnialny, to $\Gamma \models \perp$. Z twierdzenia o zwartości istnieje więc skończony niespełnialny podzbiór.

Kolorowanie nieskończonego grafu

Twierdzenie: Jeśli relacja r jest trójkolorowa w każdym skończonym podzbiore zbioru G , to jest trójkolorowa w G .

Dowód: Zdefiniujemy pewien nieskończony zbiór Γ formuł rachunku zdań. Użyjemy do tego (nieskończenie wielu) zmiennych zdaniowych postaci p_a^i , dla $a \in G$ oraz $i \in \{1, 2, 3\}$.

W zbiorze Γ są takie formuły:

$\alpha_a = (p_a^1 \vee p_a^2 \vee p_a^3) \wedge \neg(p_a^1 \wedge p_a^2) \wedge \neg(p_a^1 \wedge p_a^3) \wedge \neg(p_a^2 \wedge p_a^3)$,
dla każdego $a \in G$. (Element a ma dokładnie jeden kolor.)

$\beta_{ab} = \neg(p_a^1 \wedge p_b^1) \wedge \neg(p_a^2 \wedge p_b^2) \wedge \neg(p_a^3 \wedge p_b^3)$,
dla każdej pary $\langle a, b \rangle \in r$. (Elementy a i b są różnego koloru.)

Przykład: kolorowanie nieskończonego grafu

Niech G będzie (być może nieskończonym) zbiorem, w którym określono symetryczną relację r .

(Myślmy o G jak o zbiorze wierzchołków nieskończonego grafu i o relacji r jak o zbiorze krawędzi tego grafu.)

Relacja r jest *trójkolorowa*, gdy istnieje taki trójelementowy podzbiór zbioru G , że elementy należące do różnych składników nie są nigdy w relacji r .

(Wierzchołki połączone krawędziami są różnych kolorów.)

Relacja r jest *trójkolorowa w podzbiore $H \subseteq G$* , gdy trójkolorowa jest relacja $r \cap (H \times H)$ w zbiorze H .

Kolorowanie nieskończonego grafu

$\alpha_a = (p_a^1 \vee p_a^2 \vee p_a^3) \wedge \neg(p_a^1 \wedge p_a^2) \wedge \neg(p_a^1 \wedge p_a^3) \wedge \neg(p_a^2 \wedge p_a^3)$

$\beta_{ab} = \neg(p_a^1 \wedge p_b^1) \wedge \neg(p_a^2 \wedge p_b^2) \wedge \neg(p_a^3 \wedge p_b^3)$

$\Gamma_H = \{\alpha_a \mid a \in H\} \cup \{\beta_{ab} \mid \langle a, b \rangle \in r \cap H\}$
 $\Gamma = \Gamma_G$.

Zbiór Γ_H jest spełnialny wtw, gdy relacja r jest trójkolorowa w podzbiore H . A tak jest dla wszystkich skończonych H .

Niech $\Gamma' \subseteq \Gamma$ będzie skończony. Wtedy $\Gamma' \subseteq \Gamma_H$ dla pewnego skończonego $H \subseteq G$. Zatem Γ' jest spełnialny.

Z twierdzenia o zwartości cały zbiór Γ jest spełnialny, czyli relacja r jest trójkolorowa.