Podstawy matematyki dla informatyków

Wykład 1

6 października 2011

Różne książki

- O teorii mnogości:
  - Kuratowski,
  - Kuratowski, Mostowski,
  - Błaszczyk, Turek,
  - Guzicki, Zakrzewski,
  - Rasiowa.
- Zbiory zadań:
  - Marek, Onyszkiewicz,
  - Guzicki, Zakrzewski,
  - Ławrow, Maksimowa.

Ale po co książki?

http://www.mimuw.edu.pl/~urzy/Pmat

urzy@mimuw.edu.pl
chrzaszcz@mimuw.edu.pl

Spójniki zdaniowe

Koniunkcja: $\alpha \wedge \beta$ czytamy „α i β”;

Alternatywa: $\alpha \vee \beta$ czytamy „α lub β”;

Implikacja: $\alpha \to \beta$ czytamy „jeśli α to β”;

Równoważność: $\alpha \leftrightarrow \beta$ czytamy „α wtedy i tylko wtedy, gdy β”;

Negacja: $\neg\alpha$ czytamy „nieprawda, że α”.

Dwuwartościowa logika: 1 = prawda, 0 = fałsz

α	β	$\alpha \wedge \beta$	$\alpha \vee \beta$
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	1

Implikacja materialna

α	β	$\alpha \rightarrow \beta$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Wartość logiczna implikacji zależy wyłącznie od wartości logicznych stwierdzeń α i β, a nie zależy od związku przyczynowo-skutkowego następstwa w czasie, itp.

Ważne: Implikacja $\alpha \rightarrow \beta$ znaczy to samo, co $\neg\alpha \vee \beta$

Które z następujących zdań jest materialnie prawdziwe:

- *Jeśli w baku jest paliwo, to samochód jedzie?*
- *Jeśli samochód jedzie, to w baku jest paliwo?*

Kwantyfikatory

Ogólny:

$\forall x\, W(x)$ czytamy: „Każde x ma własność $W(x)$"

Szczegółowy:

$\exists x\, W(x)$ czytamy: „Pewne x ma własność $W(x)$"

Zmienne wolne i związane

Interpretacja stwierdzenia „$x > 4$” zależy od wartości x.

Interpretacja zdania $\forall x{:}\mathbb{N}\ x > 4$ nie zależy od wartości x.

Zdanie „$\forall x{:}\mathbb{N}\ x > 4$” wyraża tę samą myśl co „$\forall y{:}\mathbb{N}\ y > 4$”.

W formule „$x > 4$” zmienna x jest *wolna*.

W zdaniu „$\forall x{:}\mathbb{N}\ x > 4$” zmienna x jest *związana*.

Które zmienne są tu wolne, a które związane?

$$\forall x{:}\mathbb{N}\,(x > 0 \vee x \leq y) \rightarrow x = 1$$

Jak to lepiej zapisać?

$$\forall z{:}\mathbb{N}\,(z > 0 \vee z \leq y) \rightarrow x = 1$$

Kłopoty z logiką

Język formuł matematycznych rządzi się swoimi prawami.

Ma inną *składnię* niż języki naturalne.

Nie potrafi „*powiedzieć wszystkiego, co pomyśli głowa*”.

Ale za to ma jednoznaczną *semantykę*.

Przykład

Czy te dwa zdania są podobne?

> *Nie wolno pić i grać w karty.*
>
> *Nie wolno pluć i łapać.*

Niezupełnie. W pierwszym zdaniu jest domyślne powtórzenie:

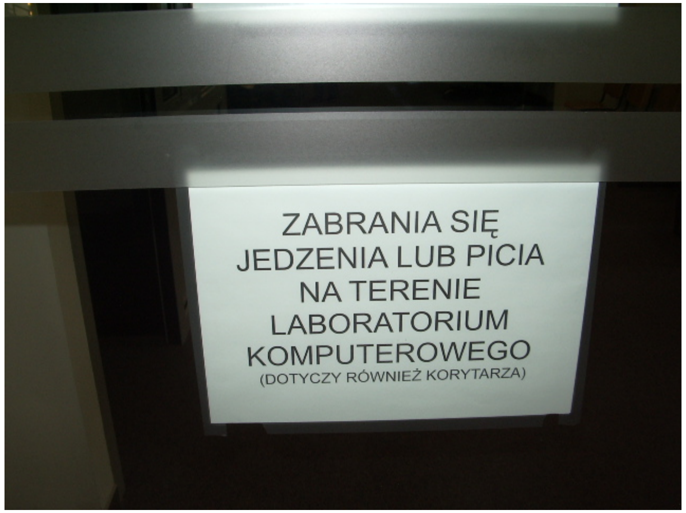
> *Nie wolno pić i nie wolno grać w karty.*

W drugim zdaniu jest domyślny nawias:

> *Nie wolno (pluć i łapać).*

Oba zdania są poprawne. Ich znaczenie wynika z kontekstu.

A co znaczy to zdanie?



Przykład

Czy te dwa zdania są podobne?

Liczby m i n są pierwsze.

Liczby m i n są względnie pierwsze.

Pierwsze zdanie mówi o własnościach pojedynczych liczb:

$Pierwsze(m) \wedge Pierwsze(n)$.

Drugie zdanie mówi o związku między liczbami:

$Względnie\_pierwsze(m, n)$.

Jak brzmi zaprzeczenie każdego z tych zdań?

A co znaczy to zdanie?

Warunek $W(x, y)$ zachodzi dla pewnego x i dla każdego y.

Prawdopodobnie znaczy $\exists x \forall y\, W(x, y)$,

ale zmieńmy tylko kolejność:

Warunek $W(x, y)$ zachodzi dla każdego y i dla pewnego x.

Teraz można je zozumieć na dwa sposoby:

$\exists x \forall y\, W(x, y)$ i $\forall y \exists x\, W(x, y)$.

„Odpowiednie dać rzeczy słowo"

W matematyce posługujemy się językiem naturalnym.

Róbmy to w sposób precyzyjny i jednoznaczny.

Ale nie naśladujmy mechanicznie konstrukcji języka formalnego.

Ani na odwrót.

Teoria zbiorów

Georg Cantor:

Zbiorem nazywamy zgromadzenie w jedną całość
wyraźnie wyróżnionych przedmiotów
naszej intuicji lub naszej myśli.

Kłopoty ze zbiorami (Antynomia Russella)

$\{x \mid W(x)\}$ oznacza zbiór wszystkich x o własności $W(x)$

$$R = \{x \mid x \text{ jest zbiorem i } x \notin x\}$$

Jeśli $R \in R$, to $R \notin R$... ale jeśli $R \notin R$, to $R \in R$!

Typy

Zbiór $\{x \mid W(x)\}$ to „zmaterializowane" kryterium $W(x)$.

Ale nie każde kryterium $W(x)$ ma sens dla dowolnego x.

Wartości zmiennej x należą zawsze do pewnej dziedziny $\mathcal{D}$.
Takie dziedziny nazywamy *typami*.

Zbiory tworzymy wybierając elementy ustalonego typu:

$$\{x : \mathcal{D} \mid W(x)\}$$

Definiowanie zbiorów

- Przez „wycinanie": $\{x : \mathcal{D} \mid W(x)\}$.

$$y{:}\mathcal{D} \wedge W(y) \;\leftrightarrow\; y \in \{x{:}\mathcal{D} \mid W(x)\}.$$

- Przez „wyliczanie": $\{x_1, \dots, x_n\}$, np. $\{2\}$, $\{1, 5\}$.

Równość (zasada Leibniza)

Przedmioty A i B są równe (jest to jeden i ten sam przedmiot) wtedy i tylko wtedy, gdy spełniają dokładnie te same kryteria:

$$x = y \leftrightarrow \forall A(x \in A \leftrightarrow y \in A).$$

Równość zbiorów (zasada jednoznaczności)

Zbiory A i B są *równe* (jest to jeden i ten sam zbiór) wtedy i tylko wtedy, gdy mają dokładnie te same elementy.

$$A = B \qquad \Leftrightarrow \qquad \forall z(z \in A \leftrightarrow z \in B)$$

A zatem $\{a, b\}$, $\{b, a\}$, $\{b, a, b\}$ i $\{a, b, b, a\}$ to to samo.

Zawieranie (inkluzja):

$$A \subseteq B \qquad \Leftrightarrow \qquad \forall z(z \in A \to z \in B).$$

$$A = B \qquad \Leftrightarrow \qquad A \subseteq B \wedge B \subseteq A$$

Notacja:

$A \not\subseteq B$ oznacza, że $\neg A \subseteq B$

$A \subsetneq B$ oznacza, że $A \subseteq B$, ale $A \neq B$

Zbiór (typ) potęgowy:

Elementami zbioru $\mathsf{P}(A)$ są wszystkie podzbiory zbioru A

$$X \in \mathsf{P}(A) \quad \Leftrightarrow \quad X \subseteq A$$

Zbiory obiektów typu $\mathcal{D}$ są typu $\mathsf{P}(\mathcal{D})$.

$$\mathsf{P}(A) = \{X : \mathsf{P}(\mathcal{D}) \mid X \subseteq A\}$$

Zbiór pusty

Mówimy, że zbiór jest *pusty*, gdy nie ma żadnego elementu.

Fakt

Każdy typ $\mathcal{D}$ ma dokładnie jeden pusty podzbiór.

Dowód: Gdyby były dwa, to miałyby te same elementy. $\square$

Zbiór pusty oznaczamy symbolem $\varnothing$.

Prawa De Morgana

Uwaga: Mówiąc, że zbiór A jest pusty, zaprzeczamy stwierdzeniu $\exists x.\, x \in A$; zauważmy, że znaczy to tyle samo, co stwierdzenie $\forall x.\, x \notin A$. Inaczej:

$\neg\exists x.\, x \in A$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\forall x.\, x \notin A$.

Ogólnie:

$\neg\exists x.\, W(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\forall x.\, \neg W(x)$.

$\neg\forall x\, W(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\exists x.\, \neg W(x)$.

Działania na zbiorach

Niech $A, B : \mathsf{P}(\mathcal{D})$. Wówczas:

- *Sumą* zbiorów A i B nazywamy zbiór
  $A \cup B = \{x : \mathcal{D} \mid x \in A \vee x \in B\}$.
- *Iloczyn* lub *przecięcie* zbiorów A i B to zbiór
  $A \cap B = \{x : \mathcal{D} \mid x \in A \wedge x \in B\}$.
- *Różnicą* zbiorów A i B nazywamy zbiór
  $A - B = \{x : \mathcal{D} \mid x \in A \wedge x \notin B\}$.
- *Dopełnienie* zbioru A (do typu $\mathcal{D}$) to zbiór
  $-A = \{x : \mathcal{D} \mid x \notin A\}$
  (czyli różnica $\mathcal{D} - A$).

Złote myśli

$$x \in A \cup B \quad \Leftrightarrow \quad x \in A \;\vee\; x \in B$$

$$x \in A \cap B \quad \Leftrightarrow \quad x \in A \;\wedge\; x \in B$$

$$x \in A - B \quad \Leftrightarrow \quad x \in A \;\wedge\; x \notin B$$

$$x \in -A \quad \Leftrightarrow \quad x \notin A$$

Ćwiczenie

Udowodnić, że dla dowolnych A i B jeśli $A - B = \varnothing$ to $A \subseteq B$.

Rozwiązanie: Niech $A - B = \varnothing$ oraz $x \in A$. Gdyby $x \notin B$, to $x \in A - B = \varnothing$, sprzeczność. Zatem $x \in B$.

Jeśli $A - B = \varnothing$ to $A \subseteq B$

Załóżmy, że $A - B = \varnothing$. *(Cel 1: $A \subseteq B$)*
Weźmy dowolne $x \in A$. *(Cel 2: $x \in B$)*
Załóżmy, że $x \notin B$. *(Cel 3: sprzeczność)*
Skoro $x \in A$ i $x \notin B$, to $x \in A - B$.
Ale $A - B = \varnothing$, więc $x \in \varnothing$, sprzeczność. *(Cel 3 osiągnięty)*
Zatem $x \in B$. *(Cel 2 osiągnięty)*
Zatem $\forall x(x \in A \rightarrow x \in B)$, czyli $A \subseteq B$. *(Cel 1 osiągnięty)*
Zatem jeśli $A - B = \varnothing$ to $A \subseteq B$.

Jeśli $A - B = \varnothing$ to $A \subseteq B$

Załóżmy, że $A - B = \varnothing$. *(Cel 1: $A \subseteq B$)*
Weźmy dowolne $x \in A$. *(Cel 2: $x \in B$)*
Załóżmy, że $x \notin B$. *(Cel 3: sprzeczność)*
Skoro $x \in A$ i $x \notin B$, to $x \in A - B$.
Ale $A - B = \varnothing$, więc $x \in \varnothing$, sprzeczność. *(Cel 3 osiągnięty)*
Zatem $x \in B$. *(Cel 2 osiągnięty)*
Zatem $\forall x(x \in A \rightarrow x \in B)$, czyli $A \subseteq B$. *(Cel 1 osiągnięty)*
Zatem jeśli $A - B = \varnothing$ to $A \subseteq B$.

Niech $A - B = \varnothing$ oraz $x \in A$. Gdyby $x \notin B$,
to $x \in A - B = \varnothing$, sprzeczność. Zatem $x \in B$.