Podstawy matematyki – egzamin
26 stycznia 2012

1. Niech $\langle A, \leq \rangle$ będzie kratą zupełną (tj. zbiorem częściowo uporządkowanym, w którym każdy podzbiór ma kres górny). Funkcję $C : \mathsf{P}(A) \longrightarrow \mathsf{P}(A)$ definiujemy następująco:
$$C(X) = \{a \in A \mid a \leq \sup X\}.$$
Udowodnić, że dla dowolnych $X, Y \in \mathsf{P}(A)$ zachodzi:
   (a) $X \subseteq C(X)$,
   (b) $C(C(X)) = C(X)$,
   (c) $X \subseteq Y$ implikuje $C(X) \subseteq C(Y)$.

2. Dwa koła na płaszczyźnie są w relacji s, jeśli różnica ich promieni jest liczbą całkowitą. Udowodnić, że s jest relacją równoważności. Jaka jest moc zbioru wszystkich klas abstrakcji relacji s? Jaką moc ma klasa abstrakcji wyznaczona przez koło $K(\langle 0, 0\rangle, 1)$? (Wiadomo, że zbiór $\mathcal{K}$ wszystkich kół na płaszczyźnie jest mocy $\mathfrak{C}$.)

3. Dla $A, B \subseteq \mathbb{N}$, niech $[A \Rightarrow B] = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \mid A \subseteq f^{-1}(B)\}$. Udowodnić, że jeśli $B, C \neq \varnothing$ i $D \neq \mathbb{N}$, to
$$[A \Rightarrow B] \subseteq [C \Rightarrow D] \qquad \text{wtedy i tylko wtedy, gdy} \qquad C \subseteq A \ \text{ i } \ B \subseteq D.$$

4. Znaleźć moc zbioru $\mathcal{G}$ wszystkich funkcji $f : \mathsf{P}(\mathbb{N}) \to \mathbb{N}$ spełniających warunek $f(X) \notin X$ dla każdego $X \neq \mathbb{N}$.

Rozwiązania

1a: Ponieważ $\sup X$ jest ograniczeniem górnym zbioru X, więc $X \subseteq C(X)$.

1b: Zauważmy, że $\sup X$ jest ograniczeniem górnym zbioru $C(X)$, a więc jest większe lub równe od jego kresu. Zatem dla dowolnego $a \in C(C(X))$ mamy $a \leq \sup C(X) \leq \sup X$, czyli $a \in C(X)$. Tym samym wykazaliśmy, że $C(C(X)) \subseteq C(X)$, skąd na mocy poprzedniego punktu wynika, że $C(C(X)) = C(X)$.

1c: Załóżmy, że $X \subseteq Y$. Niech $a \in C(X)$, zatem $a \leq \sup X$. Skoro $X \subseteq Y$, to $\sup Y$ jest ograniczeniem górnym zbioru X i tym samym $\sup X \leq \sup Y$, a więc $a \leq \sup Y$, skąd $a \in C(Y)$. Wobec tego $C(X) \subseteq C(Y)$.

2: Aby dowieść, że s jest relacją równoważności, pokazujemy, że s jest:

- zwrotna, bo dla każdego koła $K(p, r)$ zachodzi $r - r = 0 \in \mathbb{Z}$;
- symetryczna, bo jeśli $K(p_1, r_1)\ s\ K(p_2, r_2)$, skąd wynika, że $r_1 - r_2 \in \mathbb{Z}$, to również $r_2 - r_1 \in \mathbb{Z}$, a zatem $K(p_2, r_2)\ s\ K(p_1, r_1)$;

- przechodnia, bo jeśli $K(p_1, r_1)\ s\ K(p_2, r_2)$ i $K(p_2, r_2)\ s\ K(p_3, r_3)$, skąd wynika, że $r_1 - r_2 \in \mathbb{Z}$ i $r_2 - r_3 \in \mathbb{Z}$, to również $r_1 - r_3 = (r_1 - r_2) + (r_2 - r_3) \in \mathbb{Z}$, a zatem $K(p_1, r_1)\ s\ K(p_3, r_3)$.

Moc zbioru ilorazowego relacji s jest oczywiście co najwyżej taka, jak moc zbioru $\mathcal{K}$, czyli $\mathfrak{C}$. Moc ta jest też co najmniej $\mathfrak{C}$, bo funkcja $G : (0,1) \to \mathcal{K}/_s$, dana wzorem $G(r) = [K(\langle 0,0\rangle, r)]_s$, jest różnowartościowa.[1] Istotnie, różnica dwóch różnych liczb $r, r' \in (0,1)$ nie jest całkowita, więc $G(r) \neq G(r')$. Stąd $\mathfrak{C} = \overline{\overline{(0,1)}} \leq \overline{\overline{\mathcal{K}/_s}}$. Z twierdzenia Cantora-Bernsteina wnioskujemy, że $\overline{\overline{\mathcal{K}/_s}} = \mathfrak{C}$.

Klasa abstrakcji koła $K(\langle 0,0\rangle, 1)$ ma również moc $\mathfrak{C}$. Oczywiście $\overline{\overline{[K(\langle 0,0\rangle,1)]_s}} \leq \overline{\overline{\mathcal{K}}} = \mathfrak{C}$. Z drugiej strony, mamy funkcję różnowartościową $F : \mathbb{R} \xrightarrow{1-1} [K(\langle 0,0\rangle,1)]_s$ określoną wzorem $F(x) = K(\langle 0,x\rangle, 1)$, co oznacza, że $\mathfrak{C} = \overline{\overline{\mathbb{R}}} \leq \overline{\overline{[K(\langle 0,0\rangle,1)]_s}}$.

3: Załóżmy, że $C \subseteq A$ i $B \subseteq D$ i niech $f \in [A \Rightarrow B]$. Aby pokazać, że $f \in [C \Rightarrow D]$, przypuśćmy, że $n \in C$. Wtedy $n \in A \subseteq f^{-1}(B)$, czyli $f(n) \in B \subseteq D$. Stąd $n \in f^{-1}(D)$. Pokazaliśmy, że $C \subseteq f^{-1}(D)$, czyli $f \in [C \Rightarrow D]$.

Załóżmy teraz, że $[A \Rightarrow B] \subseteq [C \Rightarrow D]$. Udowodnimy najpierw, że $B \subseteq D$. Niech $b \in B$ i niech $f_b = \lambda x.\, b$. Wtedy $f_b^{-1}(B) = \{n \mid f_b(n) \in B\} = \{n \mid b \in B\} = \mathbb{N} \supseteq A$, więc $f_b \in [A \Rightarrow B]$. Skoro $[A \Rightarrow B] \subseteq [C \Rightarrow D]$, to $f_b \in [C \Rightarrow D]$, czyli $C \subseteq f_b^{-1}(D)$. Ponieważ $C \neq \varnothing$, więc $f_b^{-1}(D) \neq \varnothing$, czyli istnieje taka liczba c, że $f_b(c) \in D$. Ale $f_b(c) = b$, więc $b \in D$.

Aby wykazać $C \subseteq A$, przypuśćmy, że $x \in C - A$. Skoro $D \neq \mathbb{N}$ i $B \neq \varnothing$, to istnieją takie k, b, że $k \notin D$ i $b \in B$. Niech $h = \lambda y.\, \texttt{if}\ y = x\ \texttt{then}\ k\ \texttt{else}\ b$. Dla $y \in A$ mamy $h(y) = b \in B$, więc $A \subseteq h^{-1}(B)$, czyli $h \in [A \Rightarrow B] \subseteq [C \Rightarrow D]$. Zatem $C \subseteq h^{-1}(D) = \{n \mid h(n) \in D\}$, skąd $h(x) \in D$. Ale $h(x) = k \notin D$, sprzeczność.

4: Moc zbioru wszystkich funkcji z $\mathsf{P}(\mathbb{N})$ do $\mathbb{N}$ jest równa $\aleph_0^{2^{\aleph_0}} = \aleph_0^{\mathfrak{C}} = 2^{\mathfrak{C}}$, takie jest więc ograniczenie górne na moc zbioru $\mathcal{G}$.

Aby pokazać, że jest to również ograniczenie dolne, przyjmijmy dla $\mathcal{C} \subseteq \mathsf{P}(\mathbb{N} - \{0,1\})$:

$$f_{\mathcal{C}}(B) = \begin{cases} 0, & \text{jeśli } B \in \mathcal{C} \cup \{\mathbb{N}\}; \\ 1, & \text{jeśli } B \in \mathsf{P}(\mathbb{N} - \{0,1\}) - \mathcal{C}; \\ \min(\mathbb{N} - B) & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Dla dowolnego $\mathcal{C}$ i dla dowolnego $B \in \mathsf{P}(\mathbb{N})$ mamy $f_{\mathcal{C}}(B) \notin B$, zatem każde $f_{\mathcal{C}}$ należy do zbioru $\mathcal{G}$. Ponadto, dla $\mathcal{C}_1 \neq \mathcal{C}_2$ mamy $f_{\mathcal{C}_1} \neq f_{\mathcal{C}_2}$, gdyż jeśli np. $B \in \mathcal{C}_1$ i $B \notin \mathcal{C}_2$, to $f_{\mathcal{C}_1}(B) = 0$, a $f_{\mathcal{C}_2}(B) = 1$. Przekształcenie $\lambda\mathcal{C}.\, f_{\mathcal{C}}$ jest więc różnowartościową funkcją ze zbioru $\mathsf{P}(\mathsf{P}(\mathbb{N} - \{0,1\}))$ w zbiór $\mathcal{G}$, skąd $\overline{\overline{\mathsf{P}(\mathsf{P}(\mathbb{N} - \{0,1\}))}} \leq \overline{\overline{\mathcal{G}}}$. Ponieważ moc zbioru $\mathsf{P}(\mathsf{P}(\mathbb{N} - \{0,1\}))$ jest $2^{\mathfrak{C}}$, więc otrzymujemy $\overline{\overline{\mathcal{G}}} \geq 2^{\mathfrak{C}}$ i z twierdzenia Cantora-Bernsteina, $\overline{\overline{\mathcal{G}}} = 2^{\mathfrak{C}}$.

[1] Inaczej mówiąc, rodzina kół $\{K(\langle 0,0\rangle, r) \mid r \in (0,1)\}$ jest mocy continuum, a każdy jej element wyznacza inną klasę abstrakcji.