

Klasówka poprawkowa z podstaw matematyki, 14 stycznia 2011

1. Jaka jest moc zbioru wszystkich relacji równoważności w \mathbb{R} , których każda klasa abstrakcji ma skończoną nieparzystą liczbę elementów?
2. Niech funkcja $\phi : \mathcal{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$ będzie określona tak:

$$\phi(r) = \bigcap \{r^n \mid n > 0\}.$$

- (a) Czy ϕ jest różnowartościowa?
- (b) Niech \mathcal{Z} oznacza rodzinę wszystkich relacji zwrotnych w \mathbb{N} . Znaleźć $\phi(\mathcal{Z})$ i $\phi^{-1}(\mathcal{Z})$.

Rozwiązania

1: Niech \mathcal{V} oznacza zbiór relacji równoważności na \mathbb{R} , których wszystkie klasy abstrakcji mają skończoną nieparzystą liczbę elementów. Moc \mathcal{V} jest ograniczona z góry przez $2^{\mathfrak{c}}$, ponieważ taka jest moc zbioru wszystkich relacji na \mathbb{R} .

Aby pokazać, że $2^{\mathfrak{c}}$ jest również ograniczeniem dolnym mocy \mathcal{V} , skonstruujemy funkcję różnowartościową f , której dziedziną jest zbiór potęgowy przedziału $(0, 1)$, a której wartości są w zbiorze \mathcal{V} . Niech $T_a = \{a, a + 1, a + 2\}$. Dla dowolnego $A \subseteq (0, 1)$, niech $f(A)$ będzie relacją wyznaczającą podział

$$P = \{T_a \mid a \in A\} \cup \{\{b\} \mid b \notin \bigcup_{a \in A} T_a\}.$$

Mamy tu trójelementowe zbiory T_a dla $a \in A$, a wszystkie pozostałe składowe podziału to singletony. Zatem $f(A) \in \mathcal{V}$, czyli f jest dobrze określona.

Aby pokazać, że f jest różnowartościowa, weźmy dowolne $A_1 \neq A_2$. Bez straty ogólności możemy założyć, że istnieje $x \in A_1$ takie że $x \notin A_2$. W takim razie klasa abstrakcji x w relacji $f(A_1)$ to trójelementowy zbiór T_x , a w relacji $f(A_2)$ to singleton $\{x\}$. Stąd $f(A_1) \neq f(A_2)$, czyli funkcja f jest różnowartościowa. W takim razie moc \mathcal{V} jest co najmniej taka jak moc zbioru potęgowego przedziału $(0, 1)$, czyli $2^{\mathfrak{c}}$.

Zatem moc \mathcal{V} to $2^{\mathfrak{c}}$.

2a: Funkcja ϕ nie jest różnowartościowa. Istotnie, dla $r_1 = \{\langle 0, 1 \rangle\}$ i $r_2 = \{\langle 1, 2 \rangle\}$, wartością $\phi(r_1)$ oraz $\phi(r_2)$ jest \emptyset , gdyż dla obu relacji ich wszystkie nietrywialne złożenia są relacjami pustymi.

2b: Zaczniemy od tego, że dla dowolnej relacji zwrotnej r zachodzi $\phi(r) = r$. Weźmy dowolną taką relację. Oczywiście $\phi(r) \subseteq r^1 = r$. Ponadto, jeśli $\langle x, y \rangle \in r$ to ze zwrotności r wynika, że $\langle x, x \rangle \in r$, a zatem $\langle x, y \rangle \in r^n$ dla dowolnego $n > 0$. Stąd $r \subseteq \phi(r)$, czyli $r = \phi(r)$.

A więc $\phi(\mathcal{Z}) = \{\phi(r) \mid r \in \mathcal{Z}\} = \{r \mid r \in \mathcal{Z}\} = \mathcal{Z}$.

Pokażemy też, że $\phi^{-1}(\mathcal{Z}) = \mathcal{Z}$. Jeśli $r \in \mathcal{Z}$, to $\phi(r) = r \in \mathcal{Z}$, więc $\phi(r) \in \mathcal{Z}$. Stąd $\mathcal{Z} \subseteq \{r \mid \phi(r) \in \mathcal{Z}\} = \phi^{-1}(\mathcal{Z})$. Pozostaje wykazać zawieranie przeciwne $\phi^{-1}(\mathcal{Z}) \subseteq \mathcal{Z}$. Weźmy zatem dowolną relację $r \in \phi^{-1}(\mathcal{Z})$, a więc taką, że $\phi(r) \in \mathcal{Z}$, tj. r jest zwrotna. Skoro $\phi(r) \subseteq r$, to r też jest zwrotna. Jednak pokazaliśmy wcześniej, że dla relacji zwrotnych $\phi(r) = r$, a więc $r \in \mathcal{Z}$, co kończy dowód.