

Podstawy matematyki – praca domowa nr 7

Termin oddania: 5 grudnia 2011

1. Funkcję $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ nazwiemy *izolującą* wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia następujące warunki:

- $\forall x \in \mathbb{Z}(f(x) \neq f(x + 1))$;
- $\forall x \in f(\mathbb{Z})(x - 1 \notin f(\mathbb{Z}) \wedge x + 1 \notin f(\mathbb{Z}))$.

Jakiej mocy jest zbiór wszystkich funkcji izolujących?

2. Znaleźć moc zbioru wszystkich funkcji wyboru dla $\mathcal{P}(\mathbb{N}) - \{\emptyset\}$.

Rozwiązania

1: Zbiór wszystkich funkcji izolujących ma moc \mathfrak{C} . Aby udowodnić ten fakt, skorzystamy z twierdzenia Cantora-Bernsteina. Niech A oznacza zbiór funkcji izolujących. Zbiór $\mathbb{Z}^{\mathbb{Z}}$ wszystkich funkcji z \mathbb{Z} do \mathbb{Z} ma moc \mathfrak{C} . Mamy $A \subseteq \mathbb{Z}^{\mathbb{Z}}$, co daje nam nierówność $\overline{A} \leq \mathfrak{C}$.

Pokażemy, że zachodzi także $\mathfrak{C} \leq \overline{A}$. Zbiór wszystkich funkcji z \mathbb{Z} do $\{0, 1\}$ jest mocy \mathfrak{C} . Zdefiniujemy funkcję $\varphi : \{0, 1\}^{\mathbb{Z}} \xrightarrow{1-1} A$. Niech

$$\varphi(f)(n) = \begin{cases} 0, & \text{jeśli } f(n) = 0 \text{ i } n \text{ jest parzyste} \\ 2, & \text{jeśli } f(n) = 1 \text{ i } n \text{ jest parzyste} \\ 4, & \text{jeśli } f(n) = 0 \text{ i } n \text{ jest nieparzyste} \\ 6, & \text{jeśli } f(n) = 1 \text{ i } n \text{ jest nieparzyste} \end{cases}$$

Każda funkcja $\varphi(f)$ jest izolująca. Dla parzystych argumentów wartość funkcji $\varphi(f)$ jest równa 0 lub 2, dla nieparzystych 4 lub 6. Zatem na pewno dla sąsiednich argumentów mamy różne wartości. Ponadto dla każdej funkcji $f \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$ mamy $\varphi(f)(\mathbb{Z}) \subseteq \{0, 2, 4, 6\}$, więc $\varphi(f)$ spełnia drugi warunek: jeśli $x \in \varphi(f)(\mathbb{Z})$ to $x - 1, x + 1 \notin \varphi(f)(\mathbb{Z})$. Pokażemy, że funkcja φ jest różnowartościowa. Weźmy $f_1, f_2 \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$ takie, że $f_1 \neq f_2$. Wtedy istnieje taki argument n , że $f_1(n) \neq f_2(n)$. Bez straty ogólności możemy założyć, że $f_1(n) = 0$ i $f_2(n) = 1$. Wtedy jednak $\varphi(f_1)(n) \in \{0, 4\}$ i $\varphi(f_2)(n) \in \{2, 6\}$. Zatem $\varphi(f_1)(n) \neq \varphi(f_2)(n)$, skąd wynika, że $\varphi(f_1) \neq \varphi(f_2)$.

2: Każda funkcja wyboru dla $\mathcal{P}(\mathbb{N}) - \{\emptyset\}$ należy do zbioru $\mathbb{N}^{\mathcal{P}(\mathbb{N}) - \{\emptyset\}}$. Moc tego zbioru to $2^{\mathfrak{C}}$, więc moc zbioru funkcji wyboru jest co najwyżej taka.

Niech A oznacza zbiór funkcji wyboru dla $\mathcal{P}(\mathbb{N}) - \{\emptyset\}$ i niech $\mathcal{P}_1(\mathbb{N})$ oznacza zbiór jednoelementowych podzbiorów \mathbb{N} . Wreszcie przez $\mathcal{P}_{\geq 2}(\mathbb{N})$ oznaczmy zbiór $(\mathcal{P}(\mathbb{N}) - \{\emptyset\}) - \mathcal{P}_1(\mathbb{N})$. Zauważmy, że $\mathcal{P}_{\geq 2}(\mathbb{N})$ jest zbiorem mocy \mathfrak{C} , więc zbiór funkcji $\{0, 1\}^{\mathcal{P}_{\geq 2}(\mathbb{N})}$ jest mocy $2^{\mathfrak{C}}$. Pokażemy funkcję

$$F : \{0, 1\}^{\mathcal{P}_{\geq 2}(\mathbb{N})} \xrightarrow{1-1} A.$$

Weźmy

$$F(f)(X) = \begin{cases} \min(X - \{\min X\}), & \text{gdym } \overline{X} \geq 2 \text{ i } f(X) = 1; \\ \min X, & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Dla każdego $f \in \{0, 1\}^{\mathcal{P}_{\geq 2}(\mathbb{N})}$ wartość $F(f)$ jest funkcją wyboru dla $\mathcal{P}(\mathbb{N}) - \{\emptyset\}$: jeśli X jest jednoelementowy, to $F(f)(X)$ jest jedynym elementem zbioru X ; jeśli X ma więcej niż jeden element, to $F(f)(X)$ jest najmniejszym lub drugim co do wielkości elementem zbioru X . Pokażemy, że f jest różnowartościowa. Jeśli $f_1, f_2 \in \{0, 1\}^{\mathcal{P}_{\geq 2}(\mathbb{N})}$ i $f_1 \neq f_2$, to istnieje taki $X \in \mathcal{P}_{\geq 2}(\mathbb{N})$, że $f_1(X) \neq f_2(X)$. Bez straty ogólności możemy założyć, że $f_1(X) = 0$ i $f_2(X) = 1$. Wtedy jednak

$$F(f_1)(X) = \min X \quad \text{i} \quad F(f_2)(X) = \min(X - \{\min X\}).$$

Zatem rzeczywiście $F(f_1) \neq F(f_2)$.