

## Podstawy matematyki – praca domowa nr 4

Termin oddania: 14 listopada 2011

1. Niech  $\mathcal{C}_{X,Y}: (X \rightarrow Y) \rightarrow (\mathcal{P}(Y) \rightarrow \mathcal{P}(X))$  dana będzie wzorem

$$\mathcal{C}_{X,Y}(f)(A) = f^{-1}(A),$$

gdzie  $f: X \rightarrow Y$  i  $A \subseteq Y$ .

Czy dla dowolnych niepustych  $X$  i  $Y$ :

- (a) funkcja  $\mathcal{C}_{X,Y}$  jest różnowartościowa,
- (b) funkcja  $\mathcal{C}_{X,Y}$  jest *na*,
- (c) jeśli  $f: X \xrightarrow{1-1} Y$ , to  $\mathcal{C}_{X,Y}(f)$  też jest różnowartościowa,
- (d) jeśli  $f: X \xrightarrow{\text{na}} Y$ , to  $\mathcal{C}_{X,Y}(f)$  też jest *na*,
- (e) jeśli  $f: X \xrightarrow{1-1} Y$ , to  $\mathcal{C}_{X,Y}(f)$  jest *na*,
- (f) jeśli  $f: X \xrightarrow{\text{na}} Y$ , to  $\mathcal{C}_{X,Y}(f)$  jest różnowartościowa?

2. Dla dowolnego zbioru  $X$ , jeśli  $f: X \rightarrow X$ , to

$$\begin{aligned} f^0 &= \text{id}_X \\ f^{n+1} &= f^n \circ f. \end{aligned}$$

Czy istnieje taka bijekcja  $f: \mathbb{N} \xrightarrow[na]{1-1} \mathbb{N}$ , że dla dowolnych  $n, m: \mathbb{N}$  jeśli  $n \geq 1$ , to  $f^n(m) \neq m$ ?

## Rozwiązania

**1a:** Tak. Weźmy  $f, g: X \rightarrow Y$  takie, że  $f \neq g$ . Wtedy dla pewnego  $x \in X$  zachodzi  $f(x) \neq g(x)$ . W takim razie

$$\mathcal{C}_{X,Y}(f)(\{f(x)\}) \neq \mathcal{C}_{X,Y}(g)(\{f(x)\}).$$

**1b:** Nie. Nie istnieje taka funkcja  $f$ , że  $\mathcal{C}_{\{0\}\{0\}}(f)(\{0\}) = \emptyset$ .

**Dygresja:** Natomiast  $\mathcal{C}_{\emptyset,Y}$  jest *na*, a nawet jest bijekcją. Zauważmy, że istnieje dokładnie jedna funkcja ze zbioru pustego w dowolny zbiór – jest to funkcja, która niczemu niczego nie przypisuje (nazywamy ją funkcją pustą i oznaczamy symbolem  $\emptyset$ ). Ponadto dla każdego zbioru istnieje również dokładnie jedna funkcja z tego zbioru w zbiór jednoelementowy. Dlatego

$\mathcal{C}_{\emptyset, Y} : (\emptyset \rightarrow Y) \rightarrow (\mathbf{P}(Y) \rightarrow \{\emptyset\})$  jest funkcją ze zbioru jednoelementowego w zbiór jednoelementowy, czyli oczywiście bijekcją.

**1c:** Nie. Weźmy  $X = Y = \mathbb{N}$  i  $f(n) = 2n$ . Zachodzi

$$\mathcal{C}_{\mathbb{N}, \mathbb{N}}(f)(\{1\}) = \mathcal{C}_{\mathbb{N}, \mathbb{N}}(f)(\{3\}) = \emptyset.$$

**1d:** Nie. Weźmy  $X = Y = \mathbb{N}$  i  $f(n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ . Dla dowolnego  $A \subseteq \mathbb{N}$  zachodzi

$$\mathcal{C}_{\mathbb{N}, \mathbb{N}}(f)(A) \neq \{0\}.$$

Jeśli bowiem  $0 \in \mathcal{C}_{\mathbb{N}, \mathbb{N}}(f)(A) = f^{-1}(A)$ , to  $0 = f(0) \in A$ . Ale wtedy także  $1 \in f^{-1}(A) = \mathcal{C}_{\mathbb{N}, \mathbb{N}}(f)(A)$ , bo  $f(1) = \lfloor \frac{1}{2} \rfloor = 0$ .

**1e:** Tak. Weźmy  $A \subseteq X$ . Będziemy szukać takiego  $B \subseteq Y$ , by zachodziło  $\mathcal{C}_{X, Y}(f)(B) = A$ . Okazuje się, że jeśli  $f$  jest różnowartościowa, to  $f^{-1}(f(A)) = A$ . Przyjmujemy więc  $B = f(A)$ .

**1f:** Tak. Weźmy  $A, B \subseteq Y$ ,  $A \neq B$ . Bez straty ogólności zakładamy, że istnieje takie  $y \in Y$ , że  $y \in A$  i  $y \notin B$ . Skoro  $f$  jest *na*, to istnieje taki  $x \in X$ , że  $f(x) = y$ . Zatem  $x \in \mathcal{C}_{X, Y}(f)(A)$  i  $x \notin \mathcal{C}_{X, Y}(f)(B)$ .

**2:** Tak, warunki spełnia funkcja

$$f(n) = \begin{cases} n + 2 & \text{gdy } n \text{ jest parzyste,} \\ n - 2 & \text{gdy } n \text{ jest nieparzyste i } n \geq 3, \\ 0 & \text{gdy } n = 1. \end{cases}$$

Niech  $m \geq 1$ . Zauważmy, że jeśli  $n$  jest parzyste, to  $f^m(n) > n$ , zaś jeśli  $n$  jest nieparzyste, to  $f^m(n)$  jest albo mniejsze od  $n$ , albo parzyste.