

Podstawy matematyki – praca domowa nr 1

Termin oddania: 17 października 2011

1. Dla każdego z poniższych wyników sprawdź, czy jest ono prawdziwe – jeśli tak, podaj dowód, jeśli nie – kontrprzykład.

(a) $A \cup C \subseteq B \cup C \rightarrow C - B \subseteq C - A$;

(b) $A \cap C \subseteq B \cap C \rightarrow C - B \subseteq C - A$.

2. Zaznacz na płaszczyźnie zbiór:

$$\{\langle x, y \rangle \mid \exists z(z \in \mathbb{Z} \wedge \forall w(|w - |z|| = \frac{1}{2} \rightarrow |w - y| \leq \frac{1}{2} \wedge |z - x| \leq \frac{1}{2}))\}.$$

Rozwiązania

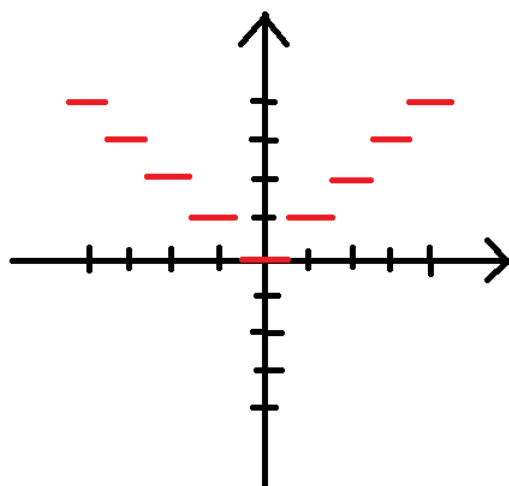
1a: Przyjmijmy $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2\}$, $C = \{1, 2, 3\}$. Wówczas $A \cup C = B \cup C = \{1, 2, 3\}$, $C - B = \{3\}$, ale $C - A = \emptyset$, czyli $C - B \not\subseteq C - A$

1b: Załóżmy, że $(A \cap C \subseteq B \cap C)$. Weźmy dowolny x należący do $C - B$. Pokażemy, że należy on do $C - A$.

W tym celu wystarczy dowieść, że x należy do C i x nie należy do A . Ponieważ x należy do $C - B$, zatem x należy do C . Pozostaje pokazać, że x nie należy do A .

Załóżmy nie wprost, że x należy do A . Wiemy, że x należy do C , zatem x należy do $(A \cap C)$. Z założenia możemy wywnioskować, że x należy do $(B \cap C)$, więc x należy do B i x należy do C . Skoro jednak x należy do $C - B$, to x nie należy do B – sprzeczność.

2: Zauważmy, że aby para $\langle x, y \rangle$ należała do wspomnianego zbioru, musi należeć do zbioru $X_z = \{\langle x, y \rangle \mid \forall w(|w - |z|| = \frac{1}{2} \rightarrow |w - y| \leq \frac{1}{2} \wedge |z - x| \leq \frac{1}{2})\}$ dla pewnego $z \in \mathbb{Z}$. Wtedy $\langle x, y \rangle$ spełnia warunek $|w - y| \leq \frac{1}{2} \wedge |z - x| \leq \frac{1}{2}$ dla wszystkich w o własności $|w - |z|| = \frac{1}{2}$. Ale dla określonego z istnieją dwie wartości w , które spełniają to równanie: $w_1 = |z| + \frac{1}{2}$ i $w_2 = |z| - \frac{1}{2}$. Zatem zbiór X_z to przecięcie zbiorów $X_{z,1} = \{\langle x, y \rangle \mid |w_1 - y| \leq \frac{1}{2} \wedge |z - x| \leq \frac{1}{2}\}$ i $X_{z,2} = \{\langle x, y \rangle \mid |w_2 - y| \leq \frac{1}{2} \wedge |z - x| \leq \frac{1}{2}\}$. Zbiory te to kwadraty o boku 1 i środkach odpowiednio $(z, |z| + \frac{1}{2})$ i $(z, |z| - \frac{1}{2})$, a ich przecięcie to odcinek stanowiący górny bok dolnego i dolny bok górnego z tych kwadratów – patrz rysunek 1.



Rysunek 1: Zadanie 2.