

## Podstawy matematyki – praca domowa nr 9

Termin oddania: 2 stycznia 2012

1. Niech  $\mathbb{N}_+ := \mathbb{N} - \{0\}$ . Czy każdy właściwy podzbiór zbioru  $\mathbb{N}^+$  ma kres górny w porządku  $\langle \mathbb{N}_+, | \rangle$ , gdzie znak  $|$  oznacza relację podzielności? A czy każdy podzbiór ma kres dolny?
2. Udowodnić, że jeśli w porządku częściowym każdy podzbiór dwuelementowy ma kres górny, to każdy niepusty podzbiór skończony ma kres górny.
3. Niech  $\epsilon \in \mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$ . Relację  $\tau_\epsilon \subseteq \mathbb{R}^2$  definiujemy kładąc:

$$\langle x, y \rangle \in \tau_\epsilon \Leftrightarrow |x - y| < \epsilon,$$

*Kliką* w tej relacji nazwiemy taki zbiór  $A \subseteq \mathbb{R}$ , że  $\forall a, b \in A \langle a, b \rangle \in \tau_\epsilon$

- (a) Czy  $\tau_\epsilon$  jest relacją równoważności?
- (b) Znaleźć  $\bigcup \{B \mid B \text{ jest kliką oraz } 0 \in B\}$ ? Czy jest to klika? Czy jest to klika maksymalna? Podać przykład maksymalnej kliki, do której należy 0.
- (c) Czy dla dowolnych  $\epsilon_1$  i  $\epsilon_2$  istnieje takie  $\gamma \in \mathbb{R}_+$ , iż  $\tau_\gamma = \tau_{\epsilon_1} \circ \tau_{\epsilon_2}$ ?
- (d) Dla jakich  $\epsilon$  zachodzi  $\langle \epsilon, \sqrt{2} \rangle \in \tau_\epsilon^+$ ?

## Rozwiązania

**1:** Zbiór liczb pierwszych nie ma kresu górnego w  $\mathbb{N}_+$ , bo nie ma żadnych ograniczeń górnych. Nie ma bowiem liczby podzielnej przez wszystkie liczby pierwsze. Z podobnego powodu zbiór pusty nie ma kresu dolnego: taki kres byłby elementem największym w  $\langle \mathbb{N}_+, | \rangle$ , czyli byłby podzielny przez wszystkie liczby naturalne dodatnie.

**2:** Niech  $B$  będzie  $n$ -elementowym podzbiorem częściowego porządku  $\langle Z, \leq \rangle$ . Przez indukcję ze względu na  $n$  dowodzimy, że jeśli  $n > 0$ , to  $B$  ma kres górny. Dla  $n = 0$  implikacja jest trywialna, dla  $n = 1$  mamy zbiór jednoelementowy, którego kresem jest jego jedyny element. Dla  $n = 2$  teza wynika wprost z założenia. Rozpatrzmy więc przypadek  $n \geq 3$  i załóżmy, że wszystkie niepuste zbiory mniej niż  $n$ -elementowe mają kresy górne. Zbiór  $B$  możemy przedstawić jako sumę  $B = A \cup \{a\}$ , gdzie  $a \notin A$  i  $A$  ma  $n - 1$  elementów, a zatem ma kres górny  $\alpha = \sup A$ . Dwuelementowe zbiory też mają kresy górne, niech więc  $\beta = \sup\{\alpha, a\}$ . Pokażemy, że  $\beta = \sup B$ .

Najpierw zauważmy, że  $\beta$  ogranicza  $B$  z góry. Jeśli bowiem  $x \in B$ , to albo  $x = a$  albo  $x \in A$  i wtedy  $x \leq \alpha$ . W obu przypadkach  $a \leq \sup\{\alpha, a\} = \beta$ .

Teraz przypuśćmy, że jakiś element  $d \in Z$  jest ograniczeniem górnym  $B$ . Wtedy  $d \geq A$ , skąd  $d \geq \alpha$  (bo  $\alpha = \sup A$ ) oraz  $d \geq a$ . Ale to znaczy, że  $d \geq \{\alpha, a\}$ , a więc  $d \geq \sup\{\alpha, a\} = \beta$ .

**3a:** Nie, relacja  $\tau_\epsilon$  jest zwrotna i symetryczna, ale nie jest przechodnia. Istotnie,  $\langle \frac{\epsilon}{3}, \epsilon \rangle \in \tau_\epsilon$  oraz  $\langle \epsilon, \frac{5\epsilon}{3} \rangle \in \tau_\epsilon$ , ale  $\langle \frac{\epsilon}{3}, \frac{5\epsilon}{3} \rangle \notin \tau_\epsilon$ .

**3b:** Pokażemy, że  $\bigcup\{B \mid B \text{ jest kliką oraz } 0 \in B\} = (-\epsilon, \epsilon)$ . Zawieranie z prawej do lewej wynika stąd, że dla  $x \in (-\epsilon, \epsilon)$  zbiór  $\{x, 0\}$  jest kliką, do której należy zero. Na odwrót, jeśli  $x \in B$ , gdzie  $B$  jest kliką oraz  $0 \in B$ , to  $|x| = |x - 0| < \epsilon$  czyli  $x \in (-\epsilon, \epsilon)$ .

Przedział  $(-\epsilon, \epsilon)$  nie jest kliką (więc nie jest też kliką maksymalną), bo np. liczby  $-\frac{3\epsilon}{4}$  i  $\frac{3\epsilon}{4}$  nie są w relacji  $\tau_\epsilon$ . Przykładowa kliką maksymalną, do której należy zero, to przedział  $[0, \epsilon)$ .

**3c:** Tak. Niech  $\gamma = \epsilon_1 + \epsilon_2$ , wówczas  $\tau_\gamma = \tau_{\epsilon_1} \circ \tau_{\epsilon_2}$ .

Dla dowodu zawierania w prawo weźmy dowolne takie  $x, y$ , że  $\langle x, y \rangle \in \tau_\gamma$ . Przypuśćmy najpierw, że  $x < y$ . Skoro różnica  $y - x$  jest mniejsza od  $\gamma$  (czyli od  $\epsilon_1 + \epsilon_2$ ), to istnieje takie  $z \in (x, y)$ , że  $z - x < \epsilon_1$  i  $y - z < \epsilon_2$ . Można przyjąć na przykład  $z = x + |y - x| * \frac{\epsilon_1}{\gamma}$ . Wtedy  $\langle x, z \rangle \in \tau_{\epsilon_1}$  i  $\langle y, z \rangle \in \tau_{\epsilon_2}$ , a więc  $\langle x, y \rangle \in \tau_{\epsilon_1} \circ \tau_{\epsilon_2}$ . Dla  $x > y$  dowód jest analogiczny.

Zawieranie w przeciwną stronę wynika z tego, że jeśli  $\langle x, z \rangle \in \tau_{\epsilon_1}$  i  $\langle z, y \rangle \in \tau_{\epsilon_2}$ , to  $|x - y| \leq |x - z| + |z - y| < \epsilon_1 + \epsilon_2 = \gamma$ , a zatem  $\langle x, y \rangle \in \tau_\gamma$ .

**3d:** Dla dowolnego  $\epsilon$  mamy  $\tau_\epsilon^+ = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ , w szczególności  $\langle \epsilon, \sqrt{2} \rangle \in \tau_\epsilon^+$ . Istotnie, dla  $x < y$  istnieje taki ciąg  $x = x_0, x_1, \dots, x_n = y$ , że  $\langle x_i, x_{i+1} \rangle \in \tau_\epsilon$  dla  $i = 0, \dots, n - 1$ . Wystarczy wziąć  $n = \lceil 2 \frac{y-x}{\epsilon} \rceil$  oraz  $x_i = x + i \cdot \frac{\epsilon}{2}$  dla  $i = 0 \dots n - 1$  oraz  $x_n = y$ .