

Podstawy matematyki – praca domowa nr 10

Termin oddania: 09 stycznia 2012

1. Niech $\phi : \mathcal{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$ będzie zdefiniowane tak, że $\phi(r)$ to najmniejsza relacja równoważności w \mathbb{N} zawierająca r , dla $r \in \mathcal{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$.
 - (a) Czy ϕ jest różnowartościowa?
 - (b) Czy ϕ jest na $\mathcal{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$?
 - (c) Rozważmy takie $d \in \mathcal{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$, że $a d b$ wtedy i tylko wtedy gdy a i b mają wspólny dzielnik różny od 1 (dokładniej: jeśli istnieją $k, a', b' \in \mathbb{N}$ spełniające $a = k \cdot a', b = k \cdot b'$ i $k \neq 1$). Znajdź $\phi(d)$.
 - (d) Niech p będzie relacją równoważności, której wszystkie klasy abstrakcji są zbiorami postaci $\{2k, 2k + 1\}$ dla $k \in \mathbb{N}$. Jakiej mocy jest $\phi^{-1}(\{p\})$?
2. Rozpatrzmy następujący porządek częściowy $\mathcal{B} = \langle B, \leq \rangle$, gdzie $B = \{n - \frac{\pi}{m} \mid n, m \in \mathbb{N} - \{0\}\}$, a relacja \leq jest obcięciem do B standardowego porządku na liczbach rzeczywistych.
 - (a) Czy \mathcal{B} jest dobrze ufundowany?
 - (b) Czy każdy niepusty podzbiór B ma kres górny w \mathcal{B} ?
 - (c) Czy każdy niepusty i ograniczony z góry podzbiór B ma kres górny w \mathcal{B} ?
 - (d) Czy \mathcal{B} jest izomorficzny z $\langle \mathbb{Q}, \leq \rangle$?

Rozwiązania

1a: Nie, bo dla $r_1 = \{(1, 1)\}$ i $r_2 = \{(2, 2)\}$ mamy $\phi(r_1) = \phi(r_2) = \mathbf{1}_{\mathbb{N}}$.

1b: Nie, bo nie każda relacja w \mathbb{N} jest relacją równoważności. W szczególności dla $q = \{(1, 2)\}$ nie istnieje takie r , że $\phi(r) = q$.

1c: Rozważmy dowolne $a, b > 1$. Wtedy $a \cdot b$ dzieli się przez a i przez b a więc liczby a , b i $a \cdot b$ będą w tej samej klasie abstrakcji relacji $\phi(d)$. To oznacza, że wszystkie liczby większe od 1 są we wspólnej klasie abstrakcji. Do tej klasy należy też zero, bo $0 = a * 0$ dla każdego $a \in \mathbb{N}$. W drugiej, osobnej, klasie abstrakcji znajduje się tylko 1.

1d: Pokażemy, że moc $\phi^{-1}(\{p\})$ jest większa lub równa continuum. Ponieważ $\phi^{-1}(p) \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$ oraz moc $\mathcal{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$ jest równa \mathfrak{C} , będzie to oznaczało, że moc $\phi^{-1}(\{p\})$ jest równa \mathfrak{C} .

Po pierwsze zauważmy, że dla dowolnej relacji $q \in \phi^{-1}(\{p\})$ zachodzi $q \subseteq p$. To oznacza, że do q mogą należeć tylko pary postaci $\langle 2k, 2k+1 \rangle$, $\langle 2k+1, 2k \rangle$, $\langle 2k, 2k \rangle$ i $\langle 2k+1, 2k+1 \rangle$. Co więcej, jeśli ani $\langle 2k, 2k+1 \rangle$ ani $\langle 2k+1, 2k \rangle$ nie należy do q , to liczby $2k$ i $2k+1$ są w różnych klasach abstrakcji relacji $\phi(q)$. A więc do każdej relacji w $\phi^{-1}(\{p\})$ należy co najmniej jedna para postaci $\langle 2k, 2k+1 \rangle$ lub $\langle 2k+1, 2k \rangle$ dla każdego k . Rozpatrzmy następującą funkcję $f : \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \rightarrow \phi^{-1}(\{p\})$:

$$f(c) = \{\langle 2k, 2k+1 \rangle \mid c(k) = 0\} \cup \{\langle 2k+1, 2k \rangle \mid c(k) = 1\}.$$

Oczywiście $\phi(f(c)) = p$ dla każdego $c \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, czyli f jest dobrze określona. Funkcja f jest różnowartościowa, bo jeśli dwa ciągi c_1 i c_2 różnią się dla $n \in \mathbb{N}$ to jedna z relacji $f(c_1)$ i $f(c_2)$ będzie zawierać parę $\langle 2n, 2n+1 \rangle$, a druga $\langle 2n+1, 2n \rangle$. A więc moc $\phi^{-1}(\{p\})$ jest co najmniej taka jak moc $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, czyli \mathfrak{C} .

2: Zauważmy, że w każdym przedziale $[n, n+1)$ są tylko trzy elementy zbioru B nie będące postaci $n+1 - \frac{\pi}{k}$. Są to liczby $n+2 - \frac{\pi}{2}$, $n+2 - \frac{\pi}{3}$, i $n+4 - \pi$. Wynika stąd, że w każdym przedziale $[n, e]$, gdzie $n \in \mathbb{N}$, $e \in \mathbb{R}$, oraz $n \leq e < n+1$, jest tylko skończenie wiele elementów B .

2a: Załóżmy, że \mathcal{B} nie jest dobrze ufundowany, czyli że istnieje nieskończony łańcuch malejący $A = \{a_i \in B \mid i \in \mathbb{N}\}$ gdzie $a_{i+1} < a_i$ dla każdego $i \in \mathbb{N}$. Element a_0 jest na pewno większy od zera, bo jest tylko pięć elementów \mathcal{B} mniejszych od zera (są to $1 - \pi$, $1 - \frac{\pi}{2}$, $1 - \frac{\pi}{3}$, $2 - \pi$, i $3 - \pi$). Rozpatrzmy przedziały postaci $[k, k+1)$ dla $k \in \mathbb{N}$, $k < a_0$. Jest ich skończenie wiele, a więc musi istnieć takie $n \in \mathbb{N}$, że zbiór $A \cap [n, n+1)$ jest nieskończony. Niech a_k będzie elementem o najmniejszym indeksie wśród wszystkich elementów zbioru A w przedziale $[n, n+1)$. Wtedy $A \cap [n, n+1) \subseteq [n, a_k]$, ale w przedziale $[n, a_k]$ jest tylko skończenie wiele elementów B , a więc tym bardziej skończenie wiele elementów A . Sprzeczność.

2b: Nie, podzbiór $\{n - \pi \mid n \in \mathbb{N} - \{0\}\}$ nie ma żadnego ograniczenia górnego, a więc nie ma też kresu.

2c: Tak, niech $P \subseteq B$ i $P \neq \emptyset$. Jeśli P ma element największy, to jest to oczywiście jego kres górny. W przeciwnym przypadku P musi być nieskończony. Ponieważ P jest ograniczony z góry, to istnieje największe takie n , że iloczyn $P \cap [n, n+1)$ jest niepusty. W istocie ten iloczyn jest nieskończony, bo inaczej zbiór P miałby element największy. Pokażemy, że wtedy najmniejszym ograniczeniem górnym zbioru P jest $b = n + 2 - \frac{\pi}{4}$, czyli najmniejszy element B większy lub równy $n+1$. Oczywiście b jest ograniczeniem górnym P . A jeśli $e \in B$ i $e < b$ to $e < n+1$, więc albo $e \leq n$, albo w przedziale $[n, e]$ jest tylko skończenie wiele elementów B (a więc również skończenie wiele elementów P). Takie e nie może być ograniczeniem górnym P , a więc $\sup P = b$.

2d: Nie, bo porządek $\langle \mathbb{Q}, \leq \rangle$ nie ma elementu najmniejszego, a \mathcal{B} ma: $1 - \pi$.