Podstawy matematyki – praca domowa nr 6
Termin oddania: 28 listopada 2011

1. W zbiorze $(\mathbb{N}\times\mathbb{N})^{\mathbb{N}}$ określimy relację $\equiv$

   $\phi_1 \equiv \phi_2$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego n zachodzi
   $$\pi_1(\phi_1(n))-\pi_2(\phi_1(n)) = \pi_1(\phi_2(n))-\pi_2(\phi_2(n)),$$

   gdzie π_1, π_2 oznaczają rzutowanie odpowiednio na pierwszą i drugą współrzędną produktu, a odejmowanie $(-)$ jest obliczane w liczbach całkowitych.

   (a) Czy istnieje takie $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}\times\mathbb{N}$, że klasa $[\phi]_\equiv$ jest skończona?
   (b) Czy klasa $[\lambda n.\langle 0, n\rangle]_\equiv$ jest równoliczna z $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$?
   (c) Czy klasa $[\lambda n.\langle 2011, 2011\rangle]_\equiv$, jest równoliczna z $\mathbb{N}$?
   (d) Czy iloraz $(\mathbb{N}\times\mathbb{N})^{\mathbb{N}}/_\equiv$ jest równoliczny z $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$?

Jak zwykle każdą odpowiedź należy poprzeć uzasadnieniem.

Rozwiązania

1a: Nie. Dla każdego $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ klasa $[\phi]_\equiv$ jest nieskończona. Wynika to z tego, że dla każdego $k \in \mathbb{N}$ funkcja $\phi_k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ określona wzorem $\phi_k(n) = \langle \pi_1(\phi(n))+k, \pi_2(\phi(n))+k\rangle$ jest w relacji $\equiv$ z funkcją ϕ. Rzeczywiście mamy tutaj dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ zależność

$$\pi_1(\phi(n)) - \pi_2(\phi(n)) = \pi_1(\phi(n)) + k - (\pi_2(\phi(n)) + k) = \pi_1(\phi_k(n)) - \pi_2(\phi_k(n)).$$

1b: Tak. Określimy $f : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to [\lambda n.\langle 0, n\rangle]_\equiv$ wzorem $f(\psi) = \lambda n.\langle \psi(n), \psi(n) + n\rangle$. Zauważmy, że rzeczywiście $f(\psi) \in [\lambda n.\langle 0, n\rangle]_\equiv$ dla każdego ψ. Mamy bowiem dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$:

$$\pi_1(f(\psi)(n)) - \pi_2(f(\psi)(n) = \psi(n) - (\psi(n) + n) = -n = 0 - n = \pi_1(\langle 0, n\rangle) - \pi_2(\langle 0, n\rangle).$$

Pokażemy teraz, że f jest bijekcją.

Funkcja f jest różnowartościowa, ponieważ dla różnych $\psi_1, \psi_2 \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ istnieje takie $n \in \mathbb{N}$, że $\psi_1(n) \neq \psi_2(n)$. Zatem pierwsze współrzędne par $f(\psi_1)(n)$ i $f(\psi_2)(n)$ są różne.

Funkcja f jest „na", gdyż dowolne $\psi \in [\lambda n.\langle 0, n\rangle]_\equiv$ da się przedstawić w postaci $f(\psi_0)$, gdzie $\psi_0 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ jest określona wzorem $\psi_0(n) = \pi_1(\psi(n))$.

Skoro f jest bijekcją, to klasa $[\lambda n.\langle 0, n\rangle]_\equiv$ jest równoliczna z $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

1c: Nie. Pokażemy to przez sprzeczność. Gdyby klasa $[\lambda n.\langle 2011, 2011\rangle]_\equiv$ była równoliczna z $\mathbb{N}$, to istniałaby bijekcja $f_1 : [\lambda n.\langle 2011, 2011\rangle]_\equiv \to \mathbb{N}$. Zwróćmy teraz uwagę na zbiór $A = \{\sigma_B : \mathbb{N} \to \mathbb{N}\times\mathbb{N} \mid B \subseteq \mathbb{N}\}$, gdzie

$$\sigma_B(n) = \begin{cases} \langle 1, 1\rangle, & \text{gdy } n \in B, \\ \langle 0, 0\rangle & \text{gdy } n \notin B. \end{cases}$$

Po pierwsze zauważmy, że A jest równoliczne z $\mathsf{P}(\mathbb{N})$. Świadczy o tym bijekcja $f_0 : \mathsf{P}(\mathbb{N}) \to A$ określona wzorem $f_0(B) = \sigma_B$. Ta funkcja jest „na", gdyż dowolna funkcja σ_B jest otrzymywana jako $f_0(B)$, i jest różnowartościowa, ponieważ dla dwóch różnych $B_1, B_2 \subseteq \mathbb{N}$ mamy $\sigma_{B_i}(n_0) = \langle 1, 1\rangle \neq \langle 0, 0\rangle = \sigma_{B_{3-i}}(n_0)$, o ile $n_0 \in B_i$ i $n_0 \notin B_{3-i}$.

Po drugie zauważmy, że $A \subseteq [\lambda n.\langle 2011, 2011\rangle]_\equiv$, bo dla każdego B oraz n mamy

$$\begin{gathered}\pi_1(\sigma_B(n)) - \pi_2(\sigma_B(n)) = c - c = 0 = 2011 - 2011 = \\ \pi_1((\lambda n.\langle 2011, 2011\rangle)n) - \pi_2((\lambda n.\langle 2011, 2011\rangle)n),\end{gathered}$$

gdzie $c = 0$ lub $c = 1$.

A zatem klasa $[\lambda n.\langle 2011, 2011\rangle]_\equiv$ ma nieprzeliczalny podzbiór A, którego obraz $f_1(A)$ jest zawarty w $\mathbb{N}$, a więc przeliczalny. To niemożliwe, bo funkcja f_1 jest różnowarościowa.

1d: Tak. Pokażemy najpierw, że zbiór $(\mathbb{N} \times \mathbb{N})^\mathbb{N}/_\equiv$ jest równoliczny z $\mathbb{Z}^\mathbb{N}$. W tym celu zdefiniujemy funkcję $f : \mathbb{Z}^\mathbb{N} \to (\mathbb{N} \times \mathbb{N})^\mathbb{N}/_\equiv$ w ten sposób, że $f(\psi) = [\phi_\psi]_\equiv$, gdzie $\phi_\psi(n) = \langle |\psi(n)|, |\psi(n)| - \psi(n)\rangle$.

Funkcja f jest różnowartościowa. Rzeczywiście, niech $\psi_1, \psi_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ będą różne. Wtedy istnieje takie $n \in \mathbb{N}$, że $\psi_1(n) \neq \psi_2(n)$. Stąd wynika, że $\phi_{\psi_1} \not\equiv \phi_{\psi_2}$, czyli $f(\psi_1) \neq f(\psi_2)$. Istotnie, dla argumentu n mamy

$$\begin{gathered}\pi_1(\phi_{\psi_1}(n)) - \pi_2(\phi_{\psi_1}(n)) = |\psi_1(n)| - (|\psi_1(n)| - \psi_1(n)) = \psi_1(n) \neq \\ \neq \psi_2(n) = |\psi_2(n)| - (|\psi_2(n)| - \psi_2(n)) = \pi_1(\phi_{\psi_2}(n)) - \pi_2(\phi_{\psi_2}(n)).\end{gathered}$$

Funkcja f jest „na". Rzeczywiście, jeśli dla klasy abstrakcji $[\sigma]_\equiv$ określimy funkcję $\psi^\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ wzorem $\psi^\sigma(n) = \pi_1(\sigma(n)) - \pi_2(\sigma(n))$, to $f(\psi^\sigma) = [\sigma]_\equiv$. Wystarczy udowodnić, że $\phi_{\psi^\sigma} \equiv \sigma$. Weźmy dowolne $n \in \mathbb{N}$. Wtedy istotnie:

$$\pi_1(\phi_{\psi^\sigma}(n)) - \pi_2(\phi_{\psi^\sigma}(n)) = |\psi^\sigma(n)| - (|\psi^\sigma(n)| - \psi^\sigma(n)) = \psi^\sigma(n) = \pi_1(\sigma(n)) - \pi_2(\sigma(n)).$$

Jak wiadomo $\mathbb{Z}$ jest równoliczne z $\mathbb{N}$, więc równoliczne są także zbiory $\mathbb{Z}^\mathbb{N}$ i $\mathbb{N}^\mathbb{N}$. A zatem iloraz $(\mathbb{N} \times \mathbb{N})^\mathbb{N}/_\equiv$ jest równoliczny z $\mathbb{N}^\mathbb{N}$.