

### Klasówka z logiki, 7 kwietnia 2005

Rozważamy trzy algebry  $\mathcal{O} = \langle O, \oplus \rangle$ ,  $\mathcal{T} = \langle T, \oplus \rangle$  i  $\mathcal{K} = \langle K, \oplus \rangle$ , gdzie zbiory  $O$ ,  $T$  i  $K$  to odpowiednio odcinek, trójkąt i kwadrat. Operacja  $\oplus$  jest zawsze określona tak samo:  $A \oplus B$  to środek odcinka  $AB$ , [przy czym  $A \oplus A = A$ ].

1. Udowodnić, że każdy [niepusty] wypukły podzbiór zbioru  $T$  jest podalgebrą w  $\mathcal{T}$ . Czy wszystkie podalgebry są wypukłe?
2. Czy algebra  $\mathcal{O}$  jest izomorficzna z jakimś ilorzadem algebry  $\mathcal{T}$ ?
3. Udowodnić, że  $HSP(\{\mathcal{O}\}) = HSP(\{\mathcal{T}\}) = HSP(\{\mathcal{K}\})$ .
4. Niech  $\mathcal{W}$  będzie algebrą wolną w klasie  $HSP(\{\mathcal{O}\})$  o dwóch wolnych generatorach. Udowodnić, że  $\mathcal{W}$  jest nieskończona.
5. Z części (3) wynika, że w algebrach  $\mathcal{O}$ ,  $\mathcal{T}$  i  $\mathcal{K}$  prawdziwe są te same równania. Wywnioskować stąd, że odcinki łączące połowy przeciwległych boków dowolnego czworokąta dzielą się nawzajem na połowy.
6. Udowodnić, że żadne dwie spośród algebr  $\mathcal{O}$ ,  $\mathcal{T}$  i  $\mathcal{K}$  nie są izomorficzne.

### Odpowiedzi:

1. Jeśli podzbiór  $P$  jest wypukły to odcinek łączący dwa punkty z  $P$  jest zawarty w  $P$ . Tym bardziej więc środek tego odcinka należy do  $P$ . Ale podalgebra generowana przez dwa różne punkty nie jest wypukła, bo jest przeliczalna.

2. Tak. Rzutowanie trójkąta na odcinek zachowuje operację  $\oplus$ , jest więc homomorfizmem. A zatem  $\mathcal{O}$  jest izomorficzne z ilorazem  $\mathcal{T}$  przez jądro tego homomorfizmu.

3. Z części (2) wynika, że  $\mathcal{O} \in H(\{\mathcal{T}\})$  a stąd  $HSP(\{\mathcal{O}\}) \subseteq HSP(\{\mathcal{T}\})$ . Dalej  $\mathcal{T} \in S(\{\mathcal{K}\})$ , bo trójkąt  $\mathcal{T}$  jest podobny do pewnego trójkąta zawartego w  $\mathcal{K}$ . (Podobieństwo zachowuje środki odcinków, więc jest izomorfizmem). Stąd  $HSP(\{\mathcal{T}\}) \subseteq HSP(\{\mathcal{K}\})$ . Wreszcie kwadrat jest produktem dwóch odcinków, więc  $\mathcal{K} \in P(\{\mathcal{O}\})$  i mamy też  $HSP(\{\mathcal{K}\}) \subseteq HSP(\{\mathcal{O}\})$ .

4. Do naszej klasy należy odcinek  $(0, 1)$  z operacją  $x \oplus x' = \frac{1}{2}(x + x')$  (jest izomorficzny z  $\mathcal{O}$ ). Jeśli generatorom algebry wolnej przyporządkujemy liczby 0 i 1 to obrazem homomorfizmu rozszerzającego to przyporządkowanie jest nieskończona podalgebra złożona ze wszystkich liczb o skończonym rozwinięciu dwójkowym. A więc algebra wolna też musi być nieskończona.

5. Wiemy już, że odcinek  $\mathcal{O}$  jest izomorficzny z przedziałem  $(0, 1)$ , gdzie operacja  $\oplus$  to średnia arytmetyczna. Zatem w  $\mathcal{O}$  prawdziwe jest równanie  $(x \oplus y) \oplus (z \oplus v) = (x \oplus v) \oplus (y \oplus z)$ . Wybierzmy teraz kwadrat  $\mathcal{K}$  tak, aby cały nasz czworokąt był w nim zawarty i niech  $x, y, v, z$  będą wierzchołkami tego czworokąta. Teza wynika stąd, że w  $\mathcal{K}$  powyższe równanie też jest prawdziwe.

6. W algebrze  $\mathcal{O}$  są dwa takie punkty  $C$ , które nie są postaci  $A \oplus B$  dla  $A, B \in \mathcal{O}$ ,  $A, B \neq C$ . W algebrze  $\mathcal{T}$  są takie trzy, a w  $\mathcal{K}$  cztery.