

Egzamin z logiki, II termin, 6 września 2005

1. Skonstruować w rachunku sekwentów dowody formuł

(a) $((p \rightarrow q) \rightarrow r) \rightarrow ((p \rightarrow r) \rightarrow r)$;

(b) $\neg(p \rightarrow \neg q) \rightarrow p \wedge q$.

2. Jedynym symbolem sygnatury Σ jest dwuargumentowy symbol funkcyjny g . Rozważamy algebry postaci $\mathcal{N}_g = \langle \mathbb{N}, g \rangle$, gdzie g jest funkcją dwuargumentową. Czy formuła $\exists yz(x \neq y \wedge x \neq z \wedge g(x, y) = g(z, x))$

(a) jest prawdziwa w pewnej algebrze \mathcal{N}_g ?

(b) jest spełnialna, ale nie prawdziwa w pewnej algebrze \mathcal{N}_g ?

(c) jest spełnialna w każdej algebrze \mathcal{N}_g ?

Czy klasa wszystkich algebr, w których nasza formuła jest prawdziwa, jest definiowalna równościowo?

3. Teraz jedynym symbolem sygnatury Σ jest dwuargumentowy symbol relacyjny R . Przez φ_n , dla $n > 0$, oznaczmy formułę

$$\forall x_1 \dots x_n (R(x_1, x_2) \vee R(x_2, x_3) \vee \dots \vee R(x_{n-1}, x_n) \vee R(x_n, x_1)).$$

W szczególności φ_1 to formuła $\forall x_1 R(x_1, x_1)$. Zbadać, które z formuł $\varphi_n \rightarrow \varphi_m$, dla $m, n > 0$ są tautologiami.

4. Czy prawdziwe jest następujące twierdzenie: *Jeżeli istnieją algebry wolne w klasie \mathfrak{K} o zbiorach wolnych generatorów dowolnej mocy, to klasa \mathfrak{K} jest definiowalna równościowo?*

Rachunek sekwentów

Oslabianie:	$\frac{\Gamma \vdash \Sigma}{\Gamma, \alpha \vdash \Sigma} \text{(LO)}$	$\frac{\Gamma \vdash \Sigma}{\Gamma \vdash \alpha, \Sigma} \text{(PO)}$	
Wymiana:	$\frac{\Gamma, \varphi, \psi, \Delta \vdash \Sigma}{\Gamma, \psi, \varphi, \Delta \vdash \Sigma} \text{(LW)}$	$\frac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi, \psi, \Sigma}{\Gamma \vdash \Delta, \psi, \varphi, \Sigma} \text{(PW)}$	
Skracanie:	$\frac{\Gamma, \varphi, \varphi \vdash \Sigma}{\Gamma, \varphi \vdash \Sigma} \text{(LS)}$	$\frac{\Gamma \vdash \varphi, \varphi, \Sigma}{\Gamma \vdash \varphi, \Sigma} \text{(PS)}$	
Negacja:	$\frac{\Gamma \vdash \alpha, \Sigma}{\Gamma, \neg \alpha \vdash \Sigma} \text{(LN)}$	$\frac{\Gamma, \alpha \vdash \Sigma}{\Gamma \vdash \neg \alpha, \Sigma} \text{(PN)}$	
Koniunkcja:	$\frac{\Gamma, \alpha \vdash \Sigma}{\Gamma, \alpha \wedge \beta \vdash \Sigma} \text{(LK)}$	$\frac{\Gamma, \beta \vdash \Sigma}{\Gamma, \alpha \wedge \beta \vdash \Sigma} \text{(L\&)}$	$\frac{\Gamma \vdash \alpha, \Sigma \quad \Gamma \vdash \beta, \Sigma}{\Gamma \vdash \alpha \wedge \beta, \Sigma} \text{(PK)}$
Alternatywa:	$\frac{\Gamma, \alpha \vdash \Sigma \quad \Gamma, \beta \vdash \Sigma}{\Gamma, \alpha \vee \beta \vdash \Sigma} \text{(LA)}$	$\frac{\Gamma \vdash \alpha, \Sigma}{\Gamma \vdash \alpha \vee \beta, \Sigma} \text{(PA)}$	$\frac{\Gamma \vdash \beta, \Sigma}{\Gamma \vdash \alpha \vee \beta, \Sigma} \text{(PA)}$
Implikacja:	$\frac{\Gamma \vdash \alpha, \Sigma \quad \Gamma, \beta \vdash \Sigma}{\Gamma, \alpha \rightarrow \beta \vdash \Sigma} \text{(LI)}$	$\frac{\Gamma, \alpha \vdash \beta, \Sigma}{\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta, \Sigma} \text{(PI)}$	
Kwantyfikator ogólny:	$\frac{\Gamma, \varphi[x:=t] \vdash \Sigma}{\Gamma, \forall x \varphi \vdash \Sigma} \text{(L\forall)}$	$\frac{\Gamma \vdash \varphi[x:=y], \Sigma}{\Gamma \vdash \forall x \varphi, \Sigma} \text{(P\forall)}$	
Kwantyfikator szczegółowy:	$\frac{\Gamma, \varphi[x:=y] \vdash \Sigma}{\Gamma, \exists x \varphi \vdash \Sigma} \text{(L\exists)}$	$\frac{\Gamma \vdash \varphi[x:=t], \Sigma}{\Gamma \vdash \exists x \varphi, \Sigma} \text{(P\exists)}$	
Cięcie:	$\frac{\Gamma \vdash \alpha, \Sigma \quad \Gamma, \alpha \vdash \Sigma}{\Gamma \vdash \Sigma} \text{(Ciach!)}$		

Reguły (P \forall) i (L \exists) mają następujące ograniczenie: zmienna y nie może występować wolno w żadnej formule należącej do $\Gamma \cup \Sigma$.

Rozwiązania

Zadanie 1a:

$$\begin{array}{c}
 \frac{p \vdash p}{\frac{p \vdash q, p, r}{\vdash p \rightarrow q, p, r}} \quad \frac{r \vdash r}{r \vdash p, r} \\
 \frac{\frac{p \vdash q, p, r}{\vdash p \rightarrow q, p, r} \quad \frac{r \vdash p, r}{r \vdash p, r}}{\frac{(p \rightarrow q) \rightarrow r \vdash p, r}{(p \rightarrow q) \rightarrow r, r \vdash r}} \\
 \frac{\frac{(p \rightarrow q) \rightarrow r, p \rightarrow r \vdash r}{(p \rightarrow q) \rightarrow r \vdash (p \rightarrow r) \rightarrow r}}{\vdash ((p \rightarrow q) \rightarrow r) \rightarrow ((p \rightarrow r) \rightarrow r)}
 \end{array}$$

Zadanie 1b:

$$\begin{array}{c}
 \frac{p \vdash p}{p, q \vdash p} \quad \frac{q \vdash q}{p, q \vdash q} \\
 \frac{p, q \vdash p \wedge q}{p \vdash \neg q, p \wedge q} \\
 \frac{p \vdash \neg q, p \wedge q}{\vdash p \rightarrow \neg q, p \wedge q} \\
 \frac{\vdash p \rightarrow \neg q, p \wedge q}{\neg(p \rightarrow \neg q) \vdash p \wedge q} \\
 \frac{\neg(p \rightarrow \neg q) \vdash p \wedge q}{\vdash \neg(p \rightarrow \neg q) \rightarrow p \wedge q}
 \end{array}$$

Zadanie 2:

1. Tak, na przykład jeśli g jest funkcją stałą. Równość $g(x, y) = g(z, x)$ jest wtedy spełniona, niezależnie od wartości zmiennych y i z ,
2. Tak, na przykład dla $g(m, n) = \begin{cases} n, & \text{gdy } m \cdot n = 0; \\ 3, & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$
 Formuła nie jest spełniona przez wartościowanie $\varrho(x) = 0$, bo wtedy warunki $x \neq y$ i $g(x, y) = g(z, x)$ wykluczają się. W pozostałych przypadkach formuła jest spełniona.
3. Nie, na przykład jeśli g jest rzutem na pierwszą współrzędną.

Klasa algebr, w których ta formuła jest prawdziwa, nie jest definiowalna równościowo, bo nie jest np. zamknięta ze względu na podalgebry. Istotnie, jeśli g jest stale równa 1, to $\{1\}$ jest podalgebrą \mathcal{N}_g . W tej podalgebrze formuła nie jest prawdziwa, bo nie ma tam elementów różnych od 1.

Zadanie 3: Formuła $\varphi_n \rightarrow \varphi_m$ jest tautologią wtedy i tylko wtedy gdy n jest podzielne przez m . Przypuśćmy najpierw, że $n = k \cdot m$, i że $\mathcal{A} \models \varphi_n$. Niech $a_1, \dots, a_m \in \mathcal{A}$. Formuła $R(x_1, x_2) \vee R(x_2, x_3) \vee \dots \vee R(x_{n-1}, x_n) \vee R(x_m, x_1)$ jest spełniona przez wartościowanie $\rho(x_i) = a_i$, ponieważ formuła $R(x_1, x_2) \vee R(x_2, x_3) \vee \dots \vee R(x_{n-1}, x_n) \vee R(x_n, x_1)$ jest spełniona przez wartościowanie $\rho(x_i) = a_{i \bmod m}$.

Rozpatrzmy teraz strukturę $\mathcal{A}_m = \langle \{1, \dots, m\}, R_m \rangle$, gdzie $A_m = \{1, \dots, m\}$ oraz $R_m = \mathcal{A}_m^2 - \{\langle 1, 2 \rangle, \dots, \langle m-1, m \rangle, \langle m, 1 \rangle\}$. Oczywiście $\mathcal{A}_m \not\models \varphi_m$. Pokażemy, że $\mathcal{A}_m \models \varphi_n$ dla wszystkich n , niepodzielnych przez m . Stąd otrzymamy, że $\varphi_n \rightarrow \varphi_m$ nie jest tautologią.

W przeciwnym razie mamy ciąg n elementów a_1, a_2, \dots, a_n , w którym żadne dwa kolejne (oraz ostatni z pierwszym) nie są w relacji R_m . Z określenia R_m wynika, że różnica pomiędzy kolejnymi elementami jest zawsze 1 (modulo m) a liczba a_j powtarza się co m kroków. Tak samo różnica $a_1 - a_n$ jest jedyнкą modulo m . A zatem n jest podzielne przez m .

Zadanie 4: Nie. Rozpatrzmy na przykład klasę \mathfrak{K} złożoną ze wszystkich algebr wolnych w klasie \mathfrak{P} wszystkich półgrup z jednością. Oczywiście algebra wolna w \mathfrak{P} jest też wolna w \mathfrak{K} , więc \mathfrak{K} ma algebry wolne o dowolnej liczbie generatorów. Zauważmy teraz, że $\text{Eq}(\mathfrak{K}) = \text{Eq}(\mathfrak{P})$. Istotnie, dowolne równanie prawdziwe w w algebrze wolnej o nieskończonej liczbie generatorów jest prawdziwe w całej klasie \mathfrak{P} , zachodzi więc inkluzja \subseteq . (Inkluzja odwrotna jest oczywista.) A zatem klasa \mathfrak{K} nie jest definiowalna równościowo, mielibyśmy bowiem wtedy $\mathfrak{K} = \text{Mod}(\text{Eq}(\mathfrak{K})) = \text{Mod}(\text{Eq}(\mathfrak{P})) = \mathfrak{P}$. A przecież nie każda półgrupa jest wolna.