Egzamin z rachunku lambda, 29 stycznia 2010

1. Które z następujących termów są typowalne w rachunku lambda z typami prostymi? W jaki sposób? A które w innych systemach z typami?

   (a) $\lambda xyz.\, z(xy)(yx)$?

   (b) $\lambda xyz.\, x(xy)(xy)$?

   (c) $\lambda xyz.\, x(xy)(zy)$?

2. Napisać takie termy:

   (a) Term Id typu $\omega_{p\to p} \to \omega_p$ definiujący na liczebnikach Churcha funkcję identycznościową (tj. taki, że $\mathrm{Id}\,\mathbf{n} \twoheadrightarrow \mathbf{n}$, dla dowolnego n.)

   (b) Term H definiujący funkcję $h(n) = n^2 - 2n + 5$ w rachunku lambda bez typów.

3. Niech $\Phi = \lambda tnxy.\, x(t(\mathbf{succ}\, n)y)$. Drzewo Böhma termu $\mathbf{Y}\Phi\mathbf{0}$ ma taką własność: prawie wszystkie zmienne występujące w wierzchołkach drzewa są związane lambda-abstrakcjami znajdującymi się o 1 poziom wyżej („w odległości 1"). Podać przykład termu, w którym „odległość" między lambdą i związaną przez nią zmienną jest prawie zawsze równa 2.

4. Skonstruować taki term M, że $ML =_\beta$ **true** oraz $MR =_\beta$ **false**, gdzie

   - $L = \lambda xy.\, x(\lambda z.\, zx(\lambda u.\, xxu))y$;
   - $R = \lambda x.\, x(\lambda z.\, z(\lambda y.\, xy)(\lambda u.\, x(xz)u)$.

Rozwiązania

1: Jeśli przez $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$ oznaczymy poszukiwane typy zmiennych x, y, z, to term (a) prowadzi do układu równań $\alpha_x = \alpha_y \to \beta$, $\alpha_y = \alpha_x \to \gamma$, skąd dostajemy równanie $\alpha_x = (\alpha_x \to \gamma) \to \beta$, które nie ma rozwiązania. Term (a) nie ma więc typu prostego. Ale w rachunku z pozytywnymi typami rekurencyjnymi ten term ma typ $\alpha \to (\alpha \to r) \to (q \to r \to s) \to s$, gdzie $\alpha = \mu p.\, (p \to r) \to q$.

Dla termu (b) dostajemy równania $\alpha_x = \alpha_y \to \beta = \beta \to \beta \to \gamma$, skąd wynika, że $\beta = \beta \to \gamma$ i znowu nie ma rozwiązania. Tym razem jednak typowanie rekurencyjne nie jest pozytywne (typ β występuje na negatywnej pozycji w $\beta \to \gamma$).

Term (c) jest typowalny w typach prostych. Mamy tu równania $\alpha_x = \alpha_y \to \beta$, $\alpha_x = \beta \to \delta \to \gamma$, $\alpha_z = \alpha_y \to \delta$, które można rozwiązać, przyjmując $\alpha_y = \beta = \delta \to \gamma$, $\alpha_x = (\delta \to \gamma) \to \delta \to \gamma$, $\alpha_z = (\delta \to \gamma) \to \delta$. Term (c) ma wszystkie typy $((\delta \to \gamma) \to \delta \to \gamma) \to (\delta \to \gamma) \to ((\delta \to \gamma) \to \delta) \to \delta$.

Termy (a)–(c) są postaciami normalnymi, są więc typowalne w systemie z typami iloczynowymi. W polimorficznym rachunku lambda każdemu z nich można przypisać typ $\forall p\, p \to \forall p\, p \to \forall p\, p \to q$.

2a: Jedna z możliwości: $\mathrm{Id} = \lambda n^{\omega_{p\to p}} f^{p\to p} x^p.\, n(\lambda g^{p\to p} z^p.\, f(gz))\mathbf{I}^{p\to p} x$.

2b: Zacznijmy od operacji $G = \lambda p.\, \langle \lambda fx.\, f(f(p\,\mathbf{true}\,f\,x)), \lambda fx.\, p\,\mathbf{true}\,f(p\,\mathbf{false}\,f\,x)\rangle$. Dla $p = \langle \mathbf{m}, \mathbf{n}\rangle$ mamy $Gp \twoheadrightarrow \langle \mathbf{m+2}, \mathbf{m+n}\rangle$. Dlatego k-krotna iteracja G, zaczynająca się od pary $\langle \mathbf{1}, \mathbf{4}\rangle$ daje w wyniku $\langle \mathbf{1+2k}, \mathbf{h(k{+}1)}\rangle$. Trzeba jeszcze dobrze zacząć i zdekodować wynik, na przykład w ten sposób: $H = \lambda n.\, n(\lambda p.\, p\,\mathbf{true}\,(\lambda z.\, Gp)\,\langle \mathbf{1}, \mathbf{4}\rangle)\,\langle \mathbf{0}, \mathbf{5}\rangle \mathbf{false}$. Sens: zaczynając od $p := \langle \mathbf{0}, \mathbf{5}\rangle$ wykonujemy pętlę `for` $i = 1$ `to` n `do if` $p\,\mathbf{true} = 0$ `then` $\langle \mathbf{1}, \mathbf{4}\rangle$ `else` Gp, a wynik rzutujemy na 1. współrzędną.

3: Drzewo Böhma termu $\mathbf{Y\Phi 0}$ ma tylko jedną gałąź: $\lambda x_0 x_1.\, x_0(\lambda x_2.\, x_1(\lambda x_3.\, x_2 \ldots$ Związek między poddrzewem $T_n(x_n)$ zaczynającym się od λx_{n+1} i poddrzewem $T_{n+1}(x_{n+1})$ zaczynającym się od λx_{n+2}, możemy zapisać tak: $T_n(x_n) = \lambda x_{n+1}.\, x_n(T_{n+1}(x_{n+1}))$. To prowadzi do równania stałopunktowego $T = \lambda nxy.\, x(T(\mathbf{succ}\, n)y)$, czyli $T = \Phi\, T$, którego rozwiązaniem jest $\mathbf{Y}\Phi$.

Aby skonstruować takie M, że $\mathrm{BT}(M) = \lambda x_0 x_1 x_2 . x_0(\lambda x_3.\, x_1(\lambda x_4.\, x_2 \ldots$, postępujemy podobnie, otrzymując równanie $T = \lambda nxyz.\, x(T(\mathbf{succ}\, n)yz)$. Szukanym termem jest $M = \mathbf{Y}(\lambda tnxyz.\, x(t(\mathbf{succ}\, n)yz))\mathbf{0}$.

4: Niech $P = \lambda xy.\, \langle x, y\rangle$ (czyli $P = \lambda xyz.\, zxy$), oraz $\mathbf{true} = \lambda xy.\, x$ i $\mathbf{false} = \lambda xy.\, y$. Szukanym termem jest na przykład $M = \lambda x.\, xP\,\mathbf{I}\,\mathbf{true}\,\mathbf{false}\,\mathbf{I}\,\mathbf{true}\,\mathbf{true}\,(\lambda xyz.\, x)\,\mathbf{true}$.