Rachunek lambda — egzamin (II termin)

5 września 2003

1. Proszę napisać wypracowanie (na maksymalnie jedną stronę) na temat: *Co to jest refleksywne cpo i jak można z niego zrobić lambda-model?*

2. Dla dowolnego n proszę podać przykład takiego typu prostego τ_n długości $\mathcal{O}(n)$, że każdy zamknięty term M w postaci normalnej, który jest typu τ_n ma długość co najmniej $\mathcal{O}(2^n)$. *(Wersja dla tych, którzy się będą nudzić: proszę opuścić słowa „w postaci normalnej".)*

3. Czy istnieje taki kombinator punktu stałego, któremu można przypisać typ w systemie typów iloczynowych $\lambda_{\cap\leq}$? A w systemie BCD (czyli w systemie $\lambda_{\cap\leq\omega}$)?

4. Proszę skonstruować term M o takiej własności: drzewo Böhma $BT(M)$ jest nieskończone i każdy jego wierzchołek ma więcej synów niż miał jego ojciec.

Rozwiązania

Zadanie 2: $\tau_n = (p_n \to p_n \to p_{n-1}) \to (p_{n-1} \to p_{n-1} \to p_{n-2}) \to \cdots \to (p_2 \to p_2 \to p_1) \to (p_1 \to p_1 \to p_0) \to p_n \to p_0$.

Zadanie 3: W systemie $\lambda_{\cap\leq}$ żaden kombinator punktu stałego nie ma typu, bo żaden taki kombinator nie ma postaci normalnej. Rzeczywiście, przypuśćmy, że kombinator punktu stałego $\mathbf{Ł}$ ma postać normalną. Oczywiście musi to być abstrakcja $\lambda y. \ldots$, bo $\mathbf{Ł}$ jest kombinatorem. Dla dowolnej zmiennej x mamy $x(\mathbf{Ł}x) = \mathbf{Ł}x$. Oznacza to, że po normalizacji term $\mathbf{Ł}x$ zaczyna się od x, a więc postać normalna $\mathbf{Ł}$ musi być taka: $\lambda y.y\mathbf{L}$.

Ale wstawiając to do równości $x(\mathbf{Ł}x) = \mathbf{Ł}x$ otrzymujemy $x(x\mathbf{L}') = x\mathbf{L}'$ gdzie $\mathbf{L}' = \mathbf{L}[y := x]$. To jest niemożliwe bo mamy tu dwie różne postaci normalne.

Natomiast w systemie BCD każdy kombinator punktu stałego ma typ ω.

Zadanie 4: Zacznijmy od tego, że operacja $\lambda n.n(\lambda y.yz)x$ zaaplikowana do liczebnika $\mathbf{n}$ daje w wyniku n-krotną aplikację $xz\ldots z$. Jeśli więc M_{n+1} ma drzewo, w którym korzeń ma $n+1$ synów, to korzeń drzewa $BT(\lambda x.\mathbf{n}(\lambda y.yM_{n+1})x)$ ma n synów, każdy postaci $BT(M_{n+1})$. Pozostaje tę konstrukcję ujednostajnić. Przyjmijmy $F = \lambda V \lambda n \lambda x.n(\lambda y.y(V(\mathbf{succ}\,n))x$ i niech $M = \mathbf{Y}F\mathbf{1}$. Łatwo widzieć, że $M =_\beta F(\mathbf{Y}F)\mathbf{1} =_\beta \lambda x.\mathbf{1}(\lambda y.y(\mathbf{Y}F\mathbf{2})x =_\beta \lambda x.x(\mathbf{Y}F\mathbf{2}) =_\beta \lambda x.x(\lambda x'.\mathbf{2}(\lambda y.y(\mathbf{Y}F\mathbf{3})x')) =_\beta \lambda x.x(\lambda x'.x'(\mathbf{Y}F\mathbf{3})(\mathbf{Y}F\mathbf{3})) =_\beta \cdots$