Egzamin z rachunku lambda, 31 stycznia 2012

1. Zbadać, czy $\mathbf{Y} =_\beta \mathbf{\Theta}$, gdzie:

$$\mathbf{Y} = \lambda f.\, (\lambda x.\, f(xx))(\lambda x.\, f(xx));$$
$$\mathbf{\Theta} = (\lambda xf.\, f(xxf))(\lambda xf.\, f(xxf)).$$

2. Skonstruować taki term M, że $ML =_\beta \mathbf{true}$ oraz $MR =_\beta \mathbf{false}$, gdzie

$$L = \lambda x.\, x(\lambda y.\, xx(yy(\lambda z.\, zxy)))x;$$
$$R = \lambda x.\, x(\lambda y.\, xx(yy(\lambda z.\, zyx)))x$$

3. Term F jest $\bullet$-*testem parzystości* (symbol $\bullet$ zastępuje β lub $\beta\eta$), gdy dla dowolnego n zachodzi $F\mathbf{n} =_\bullet \mathbf{0}$, gdy n jest parzyste i $F\mathbf{n} =_\bullet \mathbf{1}$, gdy n jest nieparzyste.

   (a) Skonstruować term F, który jest β-testem parzystości.
   (b) Czy istnieje β-test parzystości, który jest typu $\omega_p \to \omega_p$?
   (c) Skonstruować $\beta\eta$-test parzystości typu $\omega_\tau \to \omega_\tau$, gdzie $\tau = p \to p \to p$.

   Wskazówka: co to jest $\mathbf{n}(\lambda fxy.\, fyx)\mathbf{K}$?

4. Niech $\Gamma = \{a : p, b : q\}$. Skonstruować taki term M, że $\Gamma \vdash M : \tau$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\tau = ((p \to q) \to p) \to q \to p$.

Rozwiązania

1: Te dwa termy nie są β-równe. Gdyby tak było, to z twierdzenia Churcha-Rossera musiałby istnieć taki term M, że $\mathbf{Y} \twoheadrightarrow_\beta M$ i $\mathbf{\Theta} \twoheadrightarrow_\beta M$. Term M, jako redukt termu $\mathbf{Y}$ musi być postaci $\lambda f.\, f^k((\lambda x.\, f(xx))(\lambda x.\, f(xx)))$, co łatwo wynika przez indukcję.

Term $\mathbf{\Theta}$ redukuje się w jednym kroku tylko do $\lambda f.\, f(TTf)$, gdzie $T = \lambda xf.\, f(xxf)$, mamy więc $M = \lambda f.\, fP$, gdzie $TTf \twoheadrightarrow_\beta P$. Przez indukcję można pokazać, że wtedy $P = f^k(TTf)$ lub $P = f^k((\lambda f.\, fP')f)$, gdzie $TTf \twoheadrightarrow_\beta P'$. A więc $M = \lambda f.\, f^k(Nf)$ dla pewnego N, co oznacza, że $f = \lambda x.\, f(xx)$, sprzeczność.

2: Na przykład $\lambda X.\, X\mathbf{P}\mathbf{K}\mathbf{K}'\mathbf{K}'\mathbf{K}\,\mathbf{true}(\lambda z.\, \mathbf{false})\mathbf{K}$, gdzie $\mathbf{P} = \lambda xyz.\, zxy$, $\mathbf{K}' = \lambda xy.\, y$.

3a: Beztypowy β-test parzystości to na przykład term $\lambda n.\, n(\lambda fxy.\, fyx)\mathbf{K}\mathbf{0}\mathbf{1}$.

3b: Nie istnieje β-test parzystości typu $\omega_p \to \omega_p$, bo funkcja charakterystyczna parzystości nie jest wielomianem warunkowym.

Aby to udowodnić, należy zauważyć, że każdy wielomian warunkowy o zmiennych $\vec{x} = x_1, \ldots, x_n$ można przedstawić w postaci instrukcji warunkowej $\mathsf{if}\ x_i = 0\ \mathsf{then}\ f(\vec{x})\ \mathsf{else}\ g(\vec{x})$, gdzie f i g są wielomianami (o współczynnikach naturalnych) lub wielomianami warunkowymi. Dlatego test parzystości musiałby mieć postać $\mathsf{if}\ x = 0\ \mathsf{then}\ f(x)\ \mathsf{else}\ g(x)$, gdzie f i g są wielomianami. Wielomian g o współczynnikach naturalnych jest funkcją monotoniczną, więc $1 = g(1) \leq g(2) = 0$, sprzeczność.

3c: Na przykład $\lambda n \lambda fxy_1y_2.\, n(\lambda fxy.\, fyx)\mathbf{K}(xy_1y_2)(fxy_1y_2)$.

4: Na przykład $M = \lambda xy.\, \mathbf{K}a(\lambda zwv.\, w(x(\lambda u.\, \mathbf{K}b(v(wa)(wu)(zy)(zb)))))$. Ten term musi mieć typ postaci $\sigma \to \tau \to p$, gdzie σ jest typem zmiennej x, a τ jest typem zmiennej y. Aplikacje zy i zb wymuszają równość $\tau = q$. Podobnie, wszystkie wyrażenia, do których aplikowane jest w, muszą być typu p. Ponieważ $\mathbf{K}b\ldots$ ma typ q, więc wyrażenie $\lambda u.\, \mathbf{K}b(v(wa)(wu)(zy)(zb))$ jest typu $p \to q$, skąd wynika $\sigma = (p \to q) \to p$.