Egzamin poprawkowy z RPiS, 3 marca 2009: rozwiązanie zadania 3

Zadanie 3. *(10 punktów) Studenci ziewają na* $\frac{1}{4}$ *wszystkich wykładów, ale aż na* $\frac{3}{4}$ *wykładów nudnych (niestety nudne też się zdarzają).*

1. *(5 punktów) Przyjmijmy (tylko na potrzeby tego podpunktu!), że wykładów interesujących jest* 90%*. Ile wynosi prawdopodobieństwo tego, że wykład wybrany losowo spośród takich, na których studenci nie ziewają, jest interesujący?*

2. *(5 punktów) Ile może wynosić prawdopodobieństwo tego, że wykład wybrany losowo spośród takich, na których studenci nie ziewają, jest interesujący?*

Rozwiązanie Oznaczmy zdarzenia losowe:

- Z — studenci ziewają na wykładzie,
- N — wykłady nudne.

Z treści zadania wiemy, że:

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}(Z) = \frac{1}{4}, \\ &\mathbb{P}(Z \mid N) = \frac{3}{4}, \\ &\mathbb{P}(N) > 0 \text{ (nudne wykłady też się zdarzają).} \end{aligned} \tag{1}$$

Do policzenia jest

$$\mathbb{P}(N' \mid Z') = 1 - \mathbb{P}(N \mid Z').$$

Ze wzoru Bayesa mamy

$$\mathbb{P}(N \mid Z') = \frac{\mathbb{P}(Z' \mid N)\,\mathbb{P}(N)}{\mathbb{P}(Z')} = \frac{(1 - \mathbb{P}(Z \mid N))\,\mathbb{P}(N)}{1 - \mathbb{P}(Z)} = \frac{1}{3}\,\mathbb{P}(N).$$

Powyższe równości są poprawne ponieważ $\mathbb{P}(N) > 0$ (i w związku z tym prawdopodobieństwo warunkowe $\mathbb{P}(\cdot \mid N)$ jest dobrze określone). Czyli mamy

$$\mathbb{P}(N' \mid Z') = 1 - \frac{1}{3}\,\mathbb{P}(N). \tag{2}$$

a) Do wzorku (2) wstawiamy $\mathbb{P}(N) = \frac{1}{10}$ i otrzymujemy

$$\mathbb{P}(N' \mid Z') = \mathbf{\frac{29}{30}}.$$

b) Tym razem mamy $\mathbb{P}(N) = p$ i otrzymujemy

$$f(p) \overset{ozn.}{=} \mathbb{P}(N' \mid Z') = 1 - \frac{p}{3}. \tag{3}$$

Na pewno $p \in (0,1]$, bo jest prawdopodobieństwem i $\mathbb{P}(N) > 0$. Sprawdźmy czy to wszystkie ograniczenia na p?

Z treści zadania mamy

$$\mathbb{P}(Z \cap N) = \mathbb{P}(Z \mid N)\,\mathbb{P}(N) = \frac{3p}{4} \quad \text{oraz} \quad \mathbb{P}(Z) = \frac{1}{4}.$$

Stąd oraz z prawdopodbieństw całkowitych otrzymujemy, że przestrzeń probabilistyczna jest dzielona przez zdarzenia Z i Nzgodnie z wartościami prawdopodbieństwa w tabeli 1.

$\mathbb{P}$	N	N'	$\sum$
Z	$\frac{3p}{4}$	$\frac{1}{4} - \frac{3p}{4}$	$\frac{1}{4}$
Z'	$\frac{p}{4}$	$\frac{3}{4} - \frac{p}{4}$	$\frac{3}{4}$
$\sum$	p	$1-p$	

Tabela 1: Podział przestrzeni probabilistycznej przez zdarzenia Z i N. W komórkach wewnętrznych wartości prawdopodbieństwa iloczynu zdarzeń.

Wszystkie prawdopodobieństwa są dobrze określone dla $p \in (0,1]$, z wyjątkiem

$$0 \leqslant \mathbb{P}(Z \cap N') = \frac{1}{4} - \frac{3p}{4}.$$

Z powyższej nierówności otrzymujemy

$$p \leqslant \frac{1}{3}.$$

Mamy zatem, że dla dowolnego $p \in \left(0, \frac{1}{3}\right]$, dowolna przestrzeń probabilistyczna ze zdarzeniami losowymi i prawdopodobieństwami jak w tabeli 1, np. przestrzeń zdarzeń elementarnych $\{Z \cap N, Z \cap N', Z' \cap N', Z' \cap N\}$, jest realizacją treści zadania, tzn. spełnia równania (1). Dla $p \in \left(\frac{1}{3}, 1\right]$ nie da się określić $\mathbb{P}$ tak aby spełnione były równania (1), bo wtedy $\mathbb{P}(Z \cap N') < 0$ co jest sprzeczne z definicją miary probabilistycznej (funkcji prawdopodobieństwa $\mathbb{P}$).

Wracając do równania (3), z monotoniczności i ciągłości w 0 funkcji f otrzymujemy

$$f(p) = \mathbb{P}(N' \mid Z') \in \left[\mathbf{\frac{8}{9}}, \mathbf{1}\right).$$

Uwagi co do oceniania

- Pojedyncze punkty były obcinane za nieformalne wyprowadzenia wartości poszczególnych prawdopodobieństw. Nieformalne znaczy nie w terminach funkcji prawdopodobieństwa $\mathbb{P}$ oraz wprowadzonych zdarzeń.
- W podpunkcie b, za podanie wzoru (3) i nie rozważenie możliwych ograniczeń na p (ew. błędny wynik dla $p \in (0,1]$) dostawało się 1 punkt.