Zadania pisemne z Topologii I*, jesień 2013 (prowadzący H. Toruńczyk).

Wywieszane tu adania pisemne są znacznie łatwiejsze, niż wiele zadań zadanych do przemyślenia. Celem jest przede wszystkim umożliwienie rozwiązującym dowiedzenia się o możliwych usterkach (czy to rozumowania, czy też zapisu). Rozwiązania powinny być starannie i szczegółowo zapisane. Za zadania pisemne można dostać do 5 ze wszystkich 20p., które można uzyskać na ćwiczeniach. Przyjmowane są one tylko na POCZĄTKU zajęć czwartkowych; powinny być napisane wcześniej!

Uwaga 1. a) Na rezultaty udowodnione na wykładzie należy się powoływać, zamiast ich dowodzić. Natomiast pozostałe wykorzystywane wyniki powinny być starannie dowodzone, nawet jeśli sformułowane zostały we wskazówce.

b) p. Damian Sawicki udostępnia przykładowe rozwiązania na stronie

`http://students.mimuw.edu.pl/~ds292451/teaching/`

Polecam też Panstwa uwadze Jego końcowy komentarz do rozwiązania zadania 8.

Porcja 1 (na czwartek 14 XI; miało być na 7.XI).

Zadanie 1. Niech X_s ($s \in S$) będzie rodziną podzbiorów przestrzeni $(Y, \mathcal{T})$, a $f : Y \to Z$ taką funkcją w przestrzeń topologiczną $(Z, \mathcal{T}_Z)$, że każde z obcięć $f_{|X_s}$ jest ciągłe, gdy na X_s rozpatrzeć topologię podprzestrzeni. Dowieść, że jeśli $\bigcup_s X_s = Y$, to w każdym z następujących przypadków funkcja $f : (Y, \mathcal{T}) \to (Z, \mathcal{T}_Z)$ jest ciągła:

a) wszystkie zbiory X_s są otwarte w $(Y, \mathcal{T})$;

b) $\#S < \infty$ i wszystkie zbiory X_s są domknięte w $(Y, \mathcal{T})$.

Porcja 2 (na czwartek 14 XI).

Zadanie 2. : zadanie 4 ze str. 19 notatek do wykładu.

Zadanie 3. : zadanie 5 ze str. 19 notatek do wykładu.

Porcja 3 (na czwartek 21 XI).

Zadanie 4. Niech funkcja $\Phi : X \to 2^Y$ bedzie półciągła dolnie. (Patrz str. 27 w notatkach do wykładu.)

a) Udowodnić, że gdy zbiór $W \subset X \times Y$ jest otwarty, to wzór $x \mapsto \{y \in \Phi(x) : (x, y) \in W\}$ definiuje funkcję półciągłą dolnie. (Przypominam, że $\emptyset \in 2^Y$ i wartość ta może być przez Φ czy Ψ przyjmowana.)

b) Wywnioskować, że jeśli $\mathcal{T}_Y = \mathcal{T}(d)$ dla pewnej metryki d, to dla każdej funkcji ciągłej $f : X \to Y$, wzór $\Psi(x) = \Phi(x) \cap B_d(f(x), 1)$ definiuje funkcję półciągłą dolnie.

Zadanie 5. Niech $K \subset X$ będzie podprzestrzenią domkniętą, a funkcja $f : K \to Y$ będzie ciągła i ma wartości w zbiorze $Y_0 \subset Y$. Udowodnić, że wzór

$$\Phi(x) := \{f(x)\} \text{ dla } x \in K \text{ i } \Phi(x) := Y_0 \text{ dla } x \in X \setminus K$$

określa funkcję półciągłą dolnie.

Porcja 4 (na czwartek 28 XI).

Zadanie 6. Niech zbiór $F = \{f \in C([-2, 2]) : f(-2) = -1 \text{ i } f(2) = 1\}$ będzie rozpatrywany z topologią podprzestrzeni przestrzeni $(C([-2, 2]), d_{\sup})$. Dla $f \in F$ przyjmijmy $\varphi(f) = \operatorname{diam}(f^{-1}(0))$, gdzie $\operatorname{diam}(A) := \sup\{|a - b| : a, b \in A\}$ to średnica zbioru A.

a) Podać przykład funkcji f_0 i g_0 takich, że funkcjonał φ jest ciągły w f_0 i nieciągły w g_0, lub udowodnić, że odpowiednia funkcja f_0 czy g_0 nie istnieje.

b) Określić zbiór punktów przestrzeni F, w których funkcjonał φ jest ciągły.

Porcja 5 (na czwartek 5 XII).

Niech X i Y_s ($s \in S$) będą przestrzeniami topologicznymi. Powiemy, że rodzina funkcji $(f_s : X \to Y_s)_{s\in S}$ oddziela punkty od zbiorów domkniętych, jeśli dla każdego zbioru domkniętego $K \subset X$ i punktu $x \in X \setminus K$ zachodzi $f_s(x) \notin \overline{f_s(K)}$ dla pewnego $s \in S$ (domknięcie brane w przestrzeni Y_s).

W tej definicji dopuszczamy, by rodzina składała się tylko z jednego przekształcenia.

Zadanie 7. a) Niech przekształcenie $f : X \to Y$ oddziela punkty od zbiorów domkniętych. Udowodnić, że jeśli X ma własność (T1), tzn. zbiory jednopunktowe w X są domknięte, to f jest 1-1 i przekształcenie $f^{-1} : f(X) \to X$ jest ciągłe, gdy $f(X)$ traktować jako podprzestrzeń przestrzeni Y. (Wskazówka: rozpatrzeć wpierw przypadek, gdy $f(X) = Y$.)

b) Udowodnić, że jeśli rodzina $(f_s : X \to Y_s)_{s\in S}$ oddziela punkty od zbiorów domkniętych, to przekształcenie $X \ni x \mapsto (f_s(x))_{s\in S} \in \prod_{s\in S} Y_s$ oddziela punkty od zbiorów domkniętych.

Porcja 6 (na czwartek 12 XII).

Zadanie 8. Zadanie 4.1 w [BCPP]. (W (A) proszę poprawić „... i $A \cap B = ...$” na „... i $\overline{A} \cap B = ...$”.)

W związku z kolokwium, nie daję zadań na 19 XII.

Porcja 7 (na czwartek 9 I 2014).

Zadanie 9. = części b) i c) zadania 1 na str. 47 notatek (część a) rozwiązano na wykładzie).

Zadanie 10. =zadanie 6.4 w [BCPP].

Porcja 8 (na czwartek 16 I 2014). Zadania te grają rolę w §VI.4.

Zadanie 11. Udowodnić, że gdy zbiór A jest domknięty w $\mathbb{R}^n$, to zawiera brzeg (w $\mathbb{R}^n$) każdej składowej swego dopełnienia $\mathbb{R}^n \setminus A$.

Zadanie 12. = zadanie 1 w §VI.4 notatek.

Porcja 9 (na czwartek 23 I 2014).

Proszę rozwiązywać dwa zadania, wybrane z poniższych trzech. (Oczywiście, najkorzystniej jest wybrać te dwa, których rozwiązań są Państwo najmniej pewni – bo można w ten sposób niepewność usunąć.) Wolno jest korzystać, bez dowodzenia tego, ze wszystkiego co jest w notatkach z wykładu –jeśli umieją Państwo wskazać miejsce.

Zadanie 13. Dla pętli $f : S^1 \to \mathbb{C}$ dowieść, że funkcja $p \mapsto \mathrm{ind}(f, p)$ jest stała na każdej składowej zbioru $\mathbb{C} \setminus \mathrm{im}(f)$. Ponadto, na składowej nieograniczonej funkcja ta jest zerowa. (Wskazówka: przykład 1a) w §1.)

Zadanie 14. Dowieść, że dla $k < n - 1$ każde przekształcenie z S^k w $\mathbb{R}^n_*$ jest nieistotne. Wolno przyjąć, że dla $l < n$ każde przekształcenie ze zbioru zwartego $A \subset \overline{B^l}$ w $\mathbb{R}^n_*$ można przedłużyć do przekształcenia z $\overline{B^l}$ w $\mathbb{R}^n_*$.

Zadanie 15. We wstędze Moebiusa i płaszczyźnie rzutowej wskazać nierozcinającą krzywą Jordana, w przypadku wstęgi różną od krzywej brzegowej. („Wskazać” oznacza tu: ulokować ją na rysunkach z §V.1; należy też ściśle uzasadnić nierozcinanie.)