Kolokwium z Topologii I* 19 XII 2012

Każdą oddawaną kartkę należy czytelnie podpisać i opatrzeć numerem rozwiązywanego zadania (może być tylko jedno na kartce).

Proszę dawać wyczerpujące wyjaśnienia i uzasadnienia, w tym jawnie wskazywać na wykorzystywane rezultaty. Sposób redakcji (kompletność uzasadnień, czytelność przedstawienia) mogą mieć wpływ na ocenę.

Z poniższych 5 zadań proszę wybrać 4, które będą oceniane do 25p. każde. Wolno rozwiązywać też pozostałe zadanie; wtedy najniżej ocenione zadanie przeliczone będzie do skali 0-10p, a punktacja innych będzie zachowana.

1. Niech podzbiory A, B przestrzeni topologicznej X będą *oddzielone*, tzn. takie, że każdy z nich jest rozłączny z domknięciem drugiego: $\overline{A} \cap B = \emptyset = A \cap \overline{B}$. Dowieść, że zbiór $\overline{A} \cap \overline{B}$ ma puste wnętrze.

2. Dla $f \in C([0,1])$ przyjmujemy $\varphi(f) = \sup f^{-1}(\sup f([0,1]))$.

a) Podać przykład funkcji f_0 i g_0 takich, że funkcjonał $\varphi : (C([0,1]), d_{\sup}) \to (\mathbb{R}, d_e)$ jest ciągły w f_0 i nieciągły w g_0, lub udowodnić, że odpowiednia funkcja f_0 czy g_0 nie istnieje.

b) Określić zbiór punktów przestrzeni $(C([0,1]), d_{\sup})$, w których funkcjonał φ jest ciągły.

3. *Krzywą algebraiczną* w $\mathbb{R}^2$ nazywamy zbiór rozwiązań równania $\sum_{k,l=0}^{n} c_{kl} x^k y^l = 0$, gdzie $n \in \mathbb{N}$ i współczynniki rzeczywiste c_{kl} nie są wszystkie równe 0. Udowodnić, że płaszczyzny $\mathbb{R}^2$ nie można pokryć przeliczalnie wieloma krzywymi algebraicznymi.

4. Niech $A_1 \supset A_2 ...$ będą niepustymi, domkniętymi podzbiorami zupełnej przestrzeni metrycznej (X, d). Udowodnić, że jeśli każdy zbiór A_n jest sumą skończenie wielu zbiorów o średnicach $\leq 1/n$, to zbiór $\bigcap_n A_n$ jest niepusty i zwarty.

5. Niech A będzie zwartą podprzestrzenią przestrzeni topologicznej $(X, \mathcal{T}_X)$, a B zwartą podprzestrzenią przestrzeni $(Y, \mathcal{T}_Y)$. Niech W będzie podzbiorem przestrzeni $X \times Y$, który jest otwarty w topologii produktowej i zawiera $A \times B$. Dowieść, że:

a) Dla każdego punktu $a \in A$ istnieją zbiory $U_a \in \mathcal{T}_X, V_a \in \mathcal{T}_Y$ takie, że $a \in U_a$, $B \subset V_a$ i $U_a \times V_a \subset W$.

b) Istnieją zbiory $U \in \mathcal{T}_X,\ V \in \mathcal{T}_Y$ takie, że $A \times B \subset U \times V \subset W$.