Przypomnienie:
$f \in H(V)$, gdzie $V \supset \{z : |z| > r\}$ –otoczenie nakłute punktu ∞ w $\widetilde{\mathbb{C}}$.

Definicja. Powiemy, że f ma **w nieskończoności** (tzn. w pkcie $p = \infty \in \widetilde{\mathbb{C}}$):
osobliwość usuwalną (czy: **pozorną**), gdy $\exists \lim_{z\to\infty} f(z) \in \mathbb{C}$;
biegun, gdy $\lim_{z\to\infty} f(z) = \infty$;
osobliwość istotną, gdy $\nexists \lim_{z\to\infty} f(z) \in \widetilde{\mathbb{C}}$.

Uwaga 1. Przy $j : \widetilde{\mathbb{C}} \to \widetilde{\mathbb{C}}$ oznaczającym homografię $j(z) = 1/z$, rodzaj osobliwości funkcji f w ∞ jest taki sam, jak funkcji $f \circ j$ w zerze. Stąd i z definicji w §IV.3 wynika

Wniosek 1. *Rozwińmy f w pierścieniu $|z| > r$ w szereg Laurenta $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n z^n$.*
a) Jeśli f ma w nieskończoności osobliwość pozorną, to $c_n = 0$ dla $n > 0$.
b) Jeśli f ma w nieskończoności biegun, to $c_n = 0$ dla p.w. $n > 0$.
c) Implikacje odwrotne też są prawdziwe. □

@@@@@@@@@@@@@@@@

Wniosek 2. *a) Twierdzenie Casoratiego–Sochockiego–Weierstrassa z §3 pozostaje prawdziwe, gdy $p = \infty$.*

b) (f ma w punkcie $p = \infty$ osobliwość pozorną)$\Leftrightarrow \lim_{z\to\infty} \frac{f(z)}{z} = 0$.

Dowód. a). Wystarcza skorzystać z uwagi 1, bo

(V_0 jest nakłutym otoczeniem nieskończoności)$\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ ($j(V_0)$ jest nakłutym otoczeniem zera).

b).

(f ma osobliwość pozorną w $p = \infty$)$\Leftrightarrow$ ($f \circ j$ ma ją w $p = 0$)$\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ ($\lim_{w\to 0} wf(1/w) = 0$) $\Leftrightarrow \lim_{z\to\infty} f(z)/z = 0$.

(W środkowej równoważności wykorzystano twierdzenie 1 w §3.) $\boxminus$

Definicja. Funkcja f jest **meromorficzna** w zbiorze otwartym $U \subset \widetilde{\mathbb{C}}$, gdy

- f jest holomorficzna w U poza pewnym zbiorem $S(f)$, dyskretnym w U,

i

- f nie ma osobliwości istotnej w żadnym punkcie $p \in S(f)$.

(Zakładamy, że $\infty \in S(f)$ jeśli $\infty \in U$, by można było mówić o holomorficzności w $U \setminus S(f)$.)

Piszemy $f \in M(U)$.

Przykład. $\exp \notin M(\widetilde{\mathbb{C}})$, choć $\exp \in H(\widetilde{\mathbb{C}} \setminus \{\infty\})$.
(Bo exp ma w ∞ osobliwość istotną, patrz wniosek 1).

Uwaga 2. a) Funkcja $f \in M(U)$ ma w każdym punkcie $p \in U$ granicę w $\widetilde{\mathbb{C}}$. Wzór $g(z) := \lim_{w\to z} f(w)$ określa funkcję $g : U \to \widetilde{\mathbb{C}}$ taką, że:

- zbiór $g^{-1}(\infty)$ jest dyskretny w U, a g jest ciągła w U i holomorficzna w $U \cap \mathbb{C}$ poza zbiorem $g^{-1}(\infty) \cap \mathbb{C}$.

Odwrotnie, funkcja $g : U \to \widetilde{\mathbb{C}}$, spełniająca te warunki, wyznacza funkcję $f = g_{|U\cap\mathbb{C}} \in M(U)$, przy czym $S(f) = g^{-1}(\infty) \cup (U \cap \{\infty\})$.

b) Można więc na funkcje $f \in M(U)$ patrzeć jako na <u>pewne</u> funkcje ciągłe z U w $\widetilde{\mathbb{C}}$.

Definicja. Przy oznaczeniach wniosku 1, liczbę $-c_{-1}$ nazywamy **residuum funkcji f w nieskończoności**.

Twierdzenie 1 (Cauchy'ego o residuach, wersja dla $\widetilde{\mathbb{C}} \setminus D$)**.** *Gdy $D \subset \mathbb{C}$ jest dyskiem, a funkcja f jest holomorficza w $\widetilde{\mathbb{C}} \setminus D$ poza zbiorem skończonym S, rozłącznym z $\overline{D}$, to $\int_{\partial D} f = -2\pi\mathrm{i} \sum_{p \in S} \mathrm{res}_p f$.*

Dowód. D_1 – dysk tak duży, by $\overline{D} \cup (S \setminus \{\infty\}) \subset D_1$.

Sosujemy tw. o residuach do pierścienia $P = D_1 \setminus \overline{D}$:

$$\int_{\partial P} f = 2\pi\mathrm{i} \sum_p \mathrm{res}_p f$$

gdzie sumujemy po wszystkich punktach $p \in S \cap P = S \setminus \{\infty\}$.

A że $\int_{\partial P} = \int_{\partial D_1} - \int_{\partial D}$, to $\int_{\partial D} f = -2\pi\mathrm{i} \sum_p \mathrm{res}_p f + \int_{\partial D_1} f$.

Teza wynika z równości $\int_{\partial D_1} f = 2\pi\mathrm{i} c_{-1}$ (wzór Laurenta–Cauchy'ego). □

Wniosek 3. *Gdy funkcja f jest holomorficzna w $\mathbb{C}$ poza zbiorem skończonym, to suma jej residuów (włączając residuum w nieskończoności) jest równa zeru.*

Pierwsze twierdzenia o funkcjach meromorficznych:

Twierdzenie 2. *Gdy* $f \in H(\mathbb{C})$ *i istnieje granica* $\lim_{z\to\infty} f(z) \in \widetilde{\mathbb{C}}$, *to* f *jest wielomianem.*

Dowód. Z założenia, f rozwija się w $\mathbb{C}$ w szereg Maclaurina $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$. Ponieważ w nieskończoności jest biegun lub osobliwość pozorna, to $c_n = 0$ dla prawie wszystkich $n > 0$, patrz wniosek 1, części a) i b). Stąd wynika teza. $\square$

Twierdzenie 3. *Funkcja, meromorficzna w całej sferze* $\widetilde{\mathbb{C}}$, *jest sumą wielomianu i skończenie wielu ułamków prostych właściwych – a więc jest funkcją wymierną.*

Powyżej, **funkcją wymierną** nazywamy iloraz dwóch wielomianów.
Ułamek prosty właściwy to funkcja $c/(z-p)^n$, gdzie $p, c \in \mathbb{C}$ i $n \in \mathbb{N}$.

Dowód twierdzenia. Rozważana funkcja, którą nazwijmy f, ma w zwartej przestrzeni $\widetilde{\mathbb{C}}$ pewien skończony zbiór P_0 biegunów.
Niech $P = P_0 \setminus \{\infty\}$ oraz

$$Gf \overset{def}{=} \sum_{p\in P} G_p f, \quad \text{łączna część osobliwa funkcji } f.$$

Wiemy, że $f - Gf$ przedłuża się do funkcji $g \in H(\mathbb{C})$.
Każda z funkcji $G_p f$, a przez to i Gf, jest skończoną sumą ułamków prostych właściwych. (Gra rolę to, że f ma w p biegun.)
Stąd $\lim_{z\to\infty}(Gf)(z) = 0$ i istnieje $\lim_{z\to\infty} g(z) \in \widetilde{\mathbb{C}}$, równa $\lim_{z\to\infty} f(z)$.
Z twierdzenia 2, g jest wielomianem, a $f = g + Gf$ szukanym rozkładem. $\square$

Twierdzenie 4. *Funkcja, różnowartościowa i holomorficzna w* $\mathbb{C}$ *poza zbiorem dyskretnym, jest homografią (ściślej: przedłuża się do homografii).*

Dowód. *

Zadanie 1. $\operatorname{res}_\infty f = \operatorname{res}_0 g$, gdzie $g(z) := -\frac{1}{z^2} f(\frac{1}{z})$.

I KONSEKWENCJE i DOPEŁNIENIA TEORII CAUCHY'ego

1 Zasada stałej krotności, zasada otwartości, zasada maksimum.

Twierdzenie 1 (zasada stałej krotności). *Niech funkcja f będzie holomorficzna w otoczeniu punktu $p \in \mathbb{C}$, będącego n–krotnym pierwiastkiem równania $f(z) = f(p)$ (tzn. będącego zerem n–krotnym funkcji $f - f(p)$). Jeśli $n < \infty$, to istnieje otoczenie U punktu p, przekształcane przez f na pewien dysk $D(f(p), \varepsilon)$ tak, że dla $w \in D(f(p), \varepsilon) \setminus \{f(p)\}$ równanie $f(z) = w$ ma dokładnie n pierwiastków w U, każdy krotności 1. Ponadto, takie otoczenie U można obrać dowolnie małe.*

Dowód. Zakładamy, że $f(p) = 0$ (inaczej zastąpimy f przez $f - f(p)$).

Dla $r > 0$ dostatecznie małego, f i f' nie zerują się w $\overline{D}(p, r) \setminus \{p\}$. (Zasada izolowanych zer.)

W szczególności, $\varepsilon := \frac{1}{2} \inf\{|f(z)| : |z - p| = r\} > 0$.

Przy $U := D(p, r) \cap f^{-1}(D(0, \varepsilon))$ zauważamy, że:

a) Gdy $|w| < \varepsilon$, to $f - w$ i f mają tyle samo zer w $\overline{D}(p, r)$, z uwzględnieniem krotności. (Twierdzenie Rouchégo.) Oznaczmy tę liczbę zer przez k.

b) Jedynym zerem funkcji f w $\overline{D}(p, r)$, i to n–krotnym, jest p. Stąd $k = n$.

c) Gdy ponadto $w \neq 0$, to każde zero funkcji $f - w$ w $\overline{D}(p, r)$ jest jednokrotne (bo leży poza $\{p\}$, a $f'(z) \neq 0$ dla $z \in \overline{D}(p, r) \setminus \{p\}$).

Ponieważ zera funkcji $f - w$ są to pierwiastki równania $f(z) = w$, więc ε i $U \subset D(p, r)$ są jak żądano. □

Wniosek 1. *Niech funkcja f będzie holomorficzna w otoczeniu punktu p. Jeśli $f'(p) \neq 0$, to f przekształca pewne otoczenie punktu f różnowartościowo na otoczenie puntu $f(p)$. Imlikacja odwrotna też jest prawdziwa.* ⊟

(Bo $f'(p) \neq 0 \Leftrightarrow p$ jest jednokrotnym pierwiastkiem równania $f(z) = f(p)$.)

Twierdzenie 2 (zasada otwartości). *Gdy $U \subset \mathbb{C}$ jest obszarem i funkcja $f \in H(U)$ nie jest stała, to $f(U)$ jest obszarem, a przekształcenie f jest otwarte.*

Dowód. Dla każdego zbioru otwartego $V \subset U$ i punktu $p \in V$, twierdzenie 1 daje otoczenie $U_p \subset V$ takie, że $f(U_p)$ jest otoczeniem punktu $f(p)$.

Zbiór $f(V)$ jest więc otoczeniem każdego swego punktu, a zbiór $f(U)$ jest też spójny, jako obraz zbioru spójnego przy funkcji ciągłej. □

Twierdzenie 3 (zasada maksimum)**.** *Przy założeniach twierdzenia 2, funkcja $|f|$ nie przyjmuje maksimum w U, zaś minimum przyjmuje w swych miejscach zerowych (jeśli je ma).*

Dowód. Niech $p \in U$. Jak już wiemy, zbiór $f(U)$ zawiera pewien dysk o środku w $f(p)$. Oczywiście, do dysku tego należy punkt w taki, że $|w| > |f(p)|$. Zatem $|f(p)| < \sup_{z\in U}|f(z)|$, dla każdego $p \in U$. Tak samo, gdy $f(p) \neq 0$, to $|f(p)| > \inf_{z\in U}|f(z)|$. □

Uwaga 1. a) Z dowodu wynika, że przy założeniach twierdzenia 2,

i) funkcja $|f|$ nie ma w U punktów <u>lokalnego</u> maksimum, a punktami jej lokalnego minimum są jej miejsca zerowe.

ii) Tak samo, funkcje $\operatorname{Re} f$ i $\operatorname{Im} f$ nie mają w U punktów lokalnego ekstremum.

b) Niekiedy wygodniej jest i) czy ii) stosować w takiej postaci: jeśli $f \in H(U)$ i któraś z funkcji $|f|, \pm \operatorname{Re} f, \pm \operatorname{Im} f$ ma w U lokalne maksimum, to f jest stała. (Nadal, U jest obszarem.)

c) Stąd i z twierdzenia o przyjmowaniu kresów przez funkcję ciągłą na zbiorze zwartym wynika, że gdy funkcja f jest ciągła na domknięciu <u>ograniczonego</u> obszaru $U \subset \mathbb{C}$ i holomorficzna w U, to funkcje $|f|, \pm \operatorname{Im} f, \pm \operatorname{Re} f$ swój kres górny przyjmują na brzegu zbioru U. (Dla niestałej funkcji f przyjmują go bowiem w punktach zbioru zwartego $\overline{U}$, lecz nie w U.)

Twierdzenie 4 (zasada maksimum dla funkcji harmonicznych)**.** *Rzeczywista funkcja harmoniczna, określona w obszarze i mająca w nim punkt lokalnego ekstremum, jest stała.*

Wniosek 2. *Dwie funkcje, harmoniczne w obszarze ograniczonym i równe i ciągłe w punktach jego brzegu, są w tym obszarze równe. Tak samo jest z funkcjami holomorficznymi.*

Dowód. Do różnicy funkcji stosujemy twierdzenie 4 lub 3, odpowiednio. ⊟

Oto nieoczekiwane zastosowanie geometryczne zasady maksimum:

Lemat 1 (Schwarza o dysku). *Niech $D = D(0,1)$ i niech funkcja $f \in H(D)$ będzie taka, że $f(0) = 0$ i $f(D) \subset D$. Wówczas prawdziwe są nierówności $|f'(0)| \le 1$ i $|f(z)| \le |z|$ dla $z \neq 0$; ponadto, albo wszystkie te nierówności są ostre, albo $f(z) = kz$ dla wszystkich $z \in D$ i pewnej stałej k o module 1. (W ostatnim przypadku, f jest obrotem wokół 0.)*

Dowód. Z $f(0) = 0$ wynika, że $f(z) = zg(z)$, gdzie $g \in H(D)$.

Przy tym, gdy $|z| = r < 1$, to $|g(z)| \le 1/r$ (bo $|f(z)| < 1$).

Z zasady maksimum, $|g(z)| \le 1/r$ dla $z \in D(0,r)$ i $r < 1$.

Stąd $|g| \le 1$ wobec dowolności $r < 1$.

Ponieważ $f'(0) = g(0)$ i $f(z) = zg(z)$ dowodzi to pierwszej części tezy i tego, że jeśli $|f'(0)| = 1$ lub $|f(z_0)| = |z_0|$ dla pewnego $z_0 \in D$, to $|g|$ osiąga w zerze lub w z_0 swe maksimum.

Funkcja g jest więc wtedy stała i $f(z) = kz$ dla k będącego jej wartością. $\square$

Dla $p \in D = D(0,1)$ rozważmy **przekształcenie Blaschkego** $b_p : \widetilde{\mathbb{C}} \to \widetilde{\mathbb{C}}$ dane wzorem

$$b_p(z) = \frac{z - p}{1 - \overline{p}z} \tag{1}$$

Wniosek 3. *Każde przekształcenie <u>bi</u>holomorficzne $f : D \to D$ jest postaci $z \mapsto k \cdot b_p(z)$, dla pewnych $p \in D$ i $k \in \partial D$. W szczególności, gdy ponadto $f(0) = 0$, to f jest obrotem.*

Dowód. Niech wpierw $f(0) = 0$.

Wtedy $|f(z)| \le |z|$ dla $z \in D$ (lemat Schwarza).

Tak samo $|f^{-1}(z)| \le |z|$, skąd $|f(z)| = |z|$ dla $z \in D$.

Z końcowej części lematu Schwarza wynika więc, że f jest obrotem wokół 0.

Przypadek ogólny: Niech $p = f^{-1}(0)$ i $g = f \circ b_p^{-1}$.

Ponieważ $b_p(p) = 0$, więc $g(0) = 0$.

g jest więc obrotem wokół 0 i $f = g \circ b_p = k \cdot b_p$, dla pewnego $k \in \partial D$. $\square$

2 Twierdzenie Liouville'a, nierówności Cauchy'ego, Zasadnicze Twierdzenie Algebry

Twierdzenie 1 (Liouville'a)**.** *Jedynymi ograniczonymi funkcjami* **całkowitymi** *(tzn., holomorficznymi w całej płaszczyźnie $\mathbb{C}$) są funkcje stałe.*

Dowód. Badaną funkcję rozwijamy w $\mathbb{C}$ w szereg Maclaurina: $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$

Dla $n \geq 0$ i $r > 0$ jest $|c_n| \leq Mr^{-n}$, przy $M := \sup|f|$. (Nierówności Cauchy'ego–Laurenta w §III.6.)

A że $M < \infty$, to $|c_n| \leq \inf_r M/r^n = 0$ dla $n \geq 1$, skąd $f = c_0$.

Uwaga 1. Funkcja exp, różna od stałej i holomorficzna w całej płaszczyźnie, jest ograniczona na każdej półpłaszczyznie $\operatorname{Re} z \leq c$.

Uwaga 2. Wykorzystane wyżej nierówności Laurenta – Cauchy'ego, wraz ze wzorami Cauchy'ego – Taylora ((9) i (10) w §III.6), dają następujące **nierówności Cauchy'ego**: gdy $f \in H(\overline{D}(p,r))$, to

$$|f^n(p)| \leq \frac{n!}{r^n}\|f\|_{\partial D(p,r)} \quad \text{dla } n \geq 0. \tag{2}$$

Twierdzenie 2 („Zasadnicze twierdzenie algebry")**.** *Niech* $f(z) = \sum_{n=0}^{n} c_k z^k$, *gdzie* $n \geqslant 1$ *i* $c_n \neq 0$. *Wówczas* $f(z_0) = 0$ *dla pewnego* $z_0 \in \mathbb{C}$.

Podamy trzy dowody, wykorzystujące własności funkcji analitycznych.

<u>Dowód, oparty na twierdzeniu Liouville'a.</u> W przeciwnym razie $1/f \in H(\mathbb{C})$; a że $\sup_{z\in\mathbb{C}}|1/f(z)| < \infty$ (bo $\lim_{z\to\infty} 1/f(z) = 0$), to $1/f = \text{const}$ na podstawie twierdzenia Liouville'a. Jest to sprzeczne z tym, że $n \geqslant 1$.

Dalsze dwa dowody jako zadania.

3 Twierdzenie Morery i konsekwencje

Twierdzenie 1 (Morery)**.** *Funkcja $f : U \to \mathbb{C}$, ciągła w zbiorze otwartym $U \subset \mathbb{C}$, jest holomorficzna wtedy i tylko wtedy, gdy $\int_{\partial\triangle} f = 0$ dla każdego (pełnego) trójkąta $\triangle \subset U$.*

Dowód. ($\Rightarrow$) Wynika z lematu Goursata.
($\Leftarrow$) Gdy $D \subset U$ jest dyskiem, to $f_{|D}$ jest pochodną funkcji holomorficznej (twierdzenia 2 w §III.4.).

Tym samym $f_{|D}$ jest funkcją holomorficzną. (Gra rolę analityczność funkcji holomorficznych.)

Ale gdy $p \in U$, to $p \in D \subset U$ dla pewnego dysku D. Stąd $\exists f'(p)$. $\square$

Oto przykładowe zastosowania twierdzenia Morery.

Twierdzenie 2 (Weierstrassa)**.** *Niech U będzie otwartym podzbiorem płaszczyzny $\mathbb{C}$ i niech $f_n \in H(U)$ dla $n \geq 1$. Jeśli ciąg (f_n) jest zbieżny niemal jednostajnie do funkcji $f : U \to \mathbb{C}$, to funkcja ta jest holomorficzna, zaś ciąg (f_n') jest zbieżny niemal jednostajnie do funkcji f'.*

Dowód. a) Ciągłość f wynika z uwagi 1 z §I.3.

Pozostaje sprawdzić, czy $\int_{\partial\triangle} f = 0$ dla dowolnego trójkąta $\triangle \subset U$.

Jednak $\int_{\partial\triangle} f_n = 0$ dla $n \in \mathbb{N}$, bo $f_n \in H(U)$.

Ponadto $\int_{\partial\triangle} f_n \to \int_{\partial\triangle} f$ na podstawie wniosku 1 w §III.1.

Zatem $\int_{\partial\triangle} f = 0$.

b) Pozostaje dowieść, że gdy $K \subset U$ jest zbiorem zwartym, to $\|f' - f_n'\|_K \to 0$.

Niech $r := \frac{1}{3}\operatorname{dist}(K, \mathbb{C} \setminus U)$ oraz $L := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{dist}(z, K) \leq r\}$.

Wtedy $L \subset U$ i $|f'(z) - f_n'(z)| \leq \frac{1}{r}\|f - f_n\|_L$ dla $z \in K$.
(Nierówność Cauchy'ego dla funkcji $f - f_n$, określonej na $\overline{D}(z, r) \subset L$.)

Ze zwartości L i założenia, $\|f - f_n\|_L \to 0$. Stąd $\|f' - f_n'\|_K \to 0$. $\square$

Twierdzenie 3. *Niech $L \subset \mathbb{C}$ będzie prostą, a $U \subset \mathbb{C}$ – zbiorem otwartym. Gdy funkcja $f : U \to \mathbb{C}$ jest holomorficzna w $U \setminus L$ i ciągła w U, to jest holomorficzna w U.* $\boxminus$

Twierdzenie 4 (Zasada symetrii)**.** *Niech obszar $U \subset \mathbb{C}$ będzie symetryczny względem okręgu T_1, a funkcja ciągła $f : U \to \mathbb{C}$ przeprowadza $T_1 \cap U$ w okrąg T_2. (Okręgi mogą być uogólnione.) Wówczas równoważne są warunki:*

a) funkcja f jest holomorficzna,

b) funkcja f jest holomorficzna na jednej z dwóch składowych zbioru $U \setminus T_1$ i przeprowadza pary punktów z U, symetryczne względem T_1, w pary symetryczne względem T_2.

Dowód gdy $T_1 = T_2 = \mathbb{R}$. b) $\Longrightarrow$ a).
Oznaczmy rozważaną składową przez U^+, a pozostałą przez U^-.
Ze względu na założoną własność symetrii, dla $z \in U^-$ jest $f(z) = \overline{f(\overline{z})}$.
Stąd funkcja f jest holomorficzna nie tylko w U^+, ale i w U^-.
Zatem $f \in H(U)$ na podstawie twierdzenia 3, zastosowanego przy $L = \mathbb{R}$.

a) $\Longrightarrow$ b). Zadajmy $g : U \to \mathbb{C}$ wzorem

$$g(z) = f(z) \text{ dla } z \in U \setminus U^- \text{ i } g(z) = \overline{f(\overline{z})} \text{ dla } z \in U \setminus U^+.$$

Funkcja g jest poprawnie określona i ciągła.
Jak udowodniono wyżej, $g \in H(U)$.
Ponadto bo $f(z) = g(z)$ dla $z \in U^+$, więc $f = g$ (zasada identyczności).
A że g spełnia żądany warunek symetrii, to spełnia go i f.

Przypadek ogólny. Sprowadzamy go do powyższego przeprowadzając okrąg T_i $(i = 1, 2)$ homografią h_i na prostą $\mathbb{R}$ i stosując powyższy przypadek szczególny do przekształcenia $g := h_2 \circ f \circ h_1^{-1}$. (Gra oczywiście rolę to, że homografie zachowują symetrię względem okręgów; patrz uwaga 1 w §II.3.) $\boxminus$

4 Twierdzenie Montela–Osgooda–Stieltjesa.

Twierdzenie 1 (Montela–Osgooda–Stieltjesa). *Gdy zbiór $U \subset \mathbb{C}$ jest otwarty i funkcje $f_n \in H(U)$, $n \geq 1$, są wspólnie ograniczone (tzn. istnieje stała M taka, że $|f_n| < M$ dla $n = 1, 2 \ldots$), to z ciągu (f_n) można wybrać podciąg zbieżny niemal jednostajnie.*

W dowodzie wykorzystamy

Lemat 1. *Gdy $f \in H(\overline{D}(p, r))$ i $|f| \leq M$, to*

$$|f(z_1) - f(z_2)| \leq \frac{2M}{r}|z_1 - z_2| \text{ dla } z_1, z_2 \in D(p, r/2).$$

Dowód twierdzenia 1 (w oparciu o lemat i twierdzenie Arzeli–Ascoli'ego).

Z lematu 1 wynika *jednakowa ciągłość* rodziny $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Niech $\mathcal{K}$ oznacza rodzinę wszystkich kul $\overline{D}(p, r) \subset U$ takich, że liczby $r, \mathrm{Re}(p), \mathrm{Im}(p)$ są wymierne.

Na podstawie tw. A-A, dla każdej kuli $K \in \mathcal{K}$ i każdego podciągu (g_n) ciągu (f_n), można z (g_n) wybrać podciąg, zbieżny jednostajnie na K.

Ponieważ rodzina $\mathcal{K}$ jest przeliczalna, to metodą przekątniową można z (f_n) wybrać podciąg, zbieżny jednostajnie na każdej kuli $K \in \mathcal{K}$.

Podciąg ten jest zbieżny niemal jednostajnie w $U = \bigcup_{K \in \mathcal{K}} \mathrm{Int} K$. □

Dowód lematu. Ustalmy punkty $z_1, z_2 \in D(p, r/2)$.

Wtedy $[z_1, z_2] \subset D(p, r/2)$, skąd $D(w, r/2) \subset D(p, r)$ dla $w \in [z_1, z_2]$.

Z nierówności Cauchy'ego (2) wynika, że $|f'(w)| \leq \frac{1}{r/2} M$ dla $w \in [z_1, z_2]$.

Ponieważ $|f(z_1) - f(z_2)| \leq |z_1 - z_2| \sup\{|f'(w)| : w \in [z_1, z_2]\}$, więc ostatecznie $|f(z_1) - f(z_2)| \leq \frac{2M}{r}|z_1 - z_2|$. □

5 Rozwinięcia funkcji meromorficznych w sumy i iloczyny.

Zadania z §IV.6 pozwalają wkorzystać twierdzenie o residuach do wyznaczania sum $\sum_{n\in} h(n)$ i $\sum_{n\in}(-1)^n h(n)$, poprzez całkowanie funkcji $h(w)\operatorname{ctg}(\pi w)$ wzgl. $h(w)/\sin(\pi w)$ po brzegach kwadratów $|\operatorname{Re} w|, |\operatorname{Im} w| \leq N + 0.5$, dla dużych N. Traktując zmienną $z \notin \mathbb{Z}$ jako paratmetr, uzyskujemy tożsamości

$$\pi \operatorname{ctg}(\pi z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2} = \frac{1}{z} + \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} (\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n}); \tag{3}$$

$$\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(z-n)^2}$$

przy czym środkową równość uzyskujemy łącząc w pary składniki $\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n}$ i $\frac{1}{z+n} - \frac{1}{n}$. (Gra rolę bezwględna zbieżność środkowego szeregu.) Ostatnią równość otrzymujemy różniczkując drugi szereg, w oparciu o tw. Weierstrassa.

Definicja. Niech $(g_s)_{s\in S}$ będzie rodziną funkcji, z kórych każda jest określona na (zależnym od s) podzbiorze zbioru U. Powiemy, że szereg $\sum_{s\in S} g_s$ jest **niemal normowo zbieżny w** U, jeśli dla każdego zbioru zwartego $K \subset U$ tylko skończenie wiele funkcji g_s nie jest określonych wszędzie w K i suma $\sum_t ||g_t||_K$ K–norm pozostałych funkcji jest skończona.

Gdy $U = \mathbb{C}$, wystarcza ograniczyć się do zbiorów $K = \overline{D}(0, r)$, dla $r \in \mathbb{N}$.

Przykład 1. Powyższe szeregi są niemal normowo zbieżne w $\mathbb{C}$.

N.p., dla szeregu $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(z-n)^2}$ wynika to stąd, że $|z - n| \geq |r - n|$ gdy $|z| \leq r$ i $n \notin [-r, r]$, zaś $\sum_{n>r} \frac{1}{(r-n)^2} < \infty$.

Uwaga 1. a) W porównaniu z §I.3 opuszczono założenie, że funkcje g_s są określone wszędzie w U. Mimo tego, nadal możemy zmieniać kolejność sumowania szeregu i różniczkować jego sumę „wyraz po wyrazie” na każdym zbiorze otwartym, w którym określone i holomorficzne są wszystkie funkcje g_s.

b) Niech szereg $\sum_{s\in S} g_s$ będzie niemal normowo zbieżny w U. Jeśli wszystkie funkcje g_s są określone i holomorficzne w zbiorze U poza jego dyskretnym podzbiorem P, to funkcja $f := \sum_s g_s$ też jest taka. (Patrz wyżej.)

c) Jeśli ponadto $P = S$ i dla każdego punktu $p \in P$ funkcja g_p jest holomomorficzna w $U \setminus \{p\}$, to funkcja $f = \sum_p g_p$ jest holomorficzna w $U \setminus P$ i $G_p f = G_p g_p$ dla $p \in P$ –bo $f = g_p + h_p$, gdzie funkcja $h_p := \sum_{q \neq p} g_q$ okazuje się być holomorficzna w otoczeniu $U \setminus (P \setminus \{p\})$ punktu p.

Uwaga ta ma ważną konsekwencję:

Twierdzenie 1 (Mittag–Lefflera). *Dla $p \in P$, gdzie P jest zbiorem dyskretnym w $\mathbb{C}$, niech będzie dana funkcja f_p, holomorficzna w nakłutym otoczeniu punktu p. Wtedy istnieje funkcja $f \in H(\mathbb{C} \setminus P)$ taka, że $G_p f = G_p f_p \, \forall p \in P$.*

Dowód. Niech $D_n = \{z : |z| < n\}$. Obierzmy liczby $\varepsilon_p > 0$ tak, by $\sum_{p \in P} \varepsilon_p < \infty$. Dla $p \in P \setminus \overline{D}_1$ niech $n(p) := \max\{n \in \mathbb{N} : n < |p|\}$.

Funkcja $G_p f_p$ jest holomorficzna w $\overline{D}_{n(p)}$, więc można obrać sumę częściową W_p jej szeregu Maclaurina tak, by $||G_p f_p - W_p||_{\overline{D}_{n(p)}} < \varepsilon_p$. (Gdy $|p| \leq 1$, przyjmujemy $w_p = 0$.)

POnieważ dla $n \geq 2$ zachodzi $\sum_{|p|>n} ||G_p f_p - W_p||_{\overline{D}_n} \leq \sum_p \varepsilon_p < \infty$, to szereg funkcji $g_p := G_p f_p - W_p$ jest niemal normowo zbieżny w $\mathbb{C}$.

Jego suma f ma żądane własności, na podstawie uwagi 1c). (Korzystamy z tego, że $G_p g_p = G_p f_p$.) □

Uwaga 2. Gdy funkcje f_p są meromorficzne, to otrzymana funkcja f –też, a równość $f = \sum_p (G_p f_p - w_p)$ z dowodu twierdzenia jest przedstawieniem f w postaci sumy szeregu funkcji wymiernych (zbieżnego niemal normowo).

UWAGA: TU SKOŃCZYŁEM WYKŁAD 12.

WYKŁAD 13 (OSTATNI) PODEJMĘ NA STR. 17. PROSZĘ JEDNAK o ZAZANAJOMIENIE SIĘ ZE SFORMUŁOWANIEM TWIERDZENIA RIEMANNA NA STR. 18.

Przedstawienia takie wykorzystać można do rozłożenia funkcji meromorficznej w nieskończony iloczyn funkcji wymiernych.

Badać będziemy **iloczyny nieskończone** (czyli wyrażenia) $\prod_{n=1}^{\infty}(1 + f_n)$, gdzie f_n to funkcje holomorficzne, określone w pewnym obszarze U.

Definicja. Iloczyn $\prod_{n=1}^{\infty}(1+f_n)$ jest **bezwzględnie zbieżny** w U (odpowiednio: **niemal normowo zbieżny** w U), gdy szereg $\sum_n f_n$ ma tę własność.

Uwaga. Niech $\Pi_0 = 1$ i $\Pi_n := (1+f_1)...(1+f_n)$ dla $n \geq 1$. Gdy szereg $\sum_n f_n$ jest niemal normowo zbieżny, to szereg $\Pi_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(\Pi_n - \Pi_{n-1})$ –też.

Jego sumę $\Pi = \lim_n \Pi_n : U \to \mathbb{C}$ również oznaczymy $\prod_{n=1}^{\infty}(1+f_n)$.

Wtedy $\Pi \in H(U)$ i krotność punktu p jako zera funkcji Π jest sumą, po n, jego krotności jako zera funkcji $1+f_n$. ⊟

Przykład 2. Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}z^2$ jest niemal normowo zbieżny w $\mathbb{C}$, a funkcje $\frac{1}{n^2}z^2$ są całkowite, więc funkcja $\Pi(z) := z\prod_{n=1}^{\infty}(1-\frac{1}{n^2}z^2)$ też jest całkowita. By ją jawnie wyznaczyć znajdziemy pochodną logarytmiczną Π'/Π.

$\Pi'/\Pi = \lim_n \Pi_n'/\Pi_n$ (na $\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$), gdzie $\Pi_n := z(1-z^2)...(1-\frac{1}{n^2}z^2)$.

Ale pochodna logarytmiczna iloczynu jest sumą pochodnych logarytmicznych, więc $\Pi_n'/\Pi_n = \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{n}\frac{2z}{z^2-k^2} \to \pi\,\mathrm{ctg}(\pi z)$ (patrz (3).

Funkcje Π i $\sin(\pi z)$ mają więc tę samą pochodną logarytmiczną na $\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$.

Stąd już wynika, że $\sin(\pi z) = C\cdot\Pi(z)$ dla pewnej stałej C.

Porównanie współczynników przy z rozwinięcia Maclaurina obu stron prowadzi do równości $C = \pi$.

Tak samo będzie przy innym porządku czynników $1-\frac{1}{n^2}z^2$:

$$\sin(\pi z) = \pi z\prod_{n=1}^{\infty}(1-\frac{1}{n^2}z^2) \text{ dla } z\in\mathbb{C}. \tag{4}$$

Przy $z = 1/2$, z (4) otrzymujemy **tożsamość Wallisa**: $\frac{2}{\pi} = \prod_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)(2n+1)}{(2n)^2}$.

By użyć iloczynów nieskończonych do konstrukcji funkcji o zadanych zerach, Weierstrass wprowadził następujące **czynniki Weierstrassa**:

$$E_n(z) := (1-z)\exp(z+\frac{1}{2}z^2+...+\frac{1}{n}z^n).$$

Zachodzi dla nich (patrz zadanie 4 w §II.1)

$$E_n^{-1}(0) = \{1\} \;\text{ i }\; |E_n(z)-1| < |z|^{n+1} \text{ gdy } |z|<1. \tag{5}$$

$$E_n^{-1}(0) = \{1\} \text{ i } |E_n(z) - 1| < |z|^{n+1} \text{ gdy } |z| < 1. \tag{5}$$

Twierdzenie 2 (Weierstrassa). *Dla każdego zbioru P, dyskretnego w $\mathbb{C}$, i układu $(n_p)_{p\in P}$ liczb naturalnych, istnieje funkcja $g \in H(\mathbb{C})$, mająca zera tylko w punktach zbioru P, przy czym taka, że $k(p) = n_p$ dla $p \in P$. (Tu, $k(p)$ oznacza krotność p jako zera funkcji g.)*

Dowód. Dla $p \in P' := P \setminus \{0\}$ obierzmy $l_p \in \mathbb{N}$ tak, by

$$\sum_{p\in P'} n_p(r/|p|)^{l_p+1} < \infty \;\forall r > 0$$

(Jest o możliwe, bo $r/|p| < 1/2$ dla prawie wszystkich $p \in P$.)

Z (5) wynika, że $\sum_{p\in P'} n_p||E_{l_p}(z/p) - 1||_{D(0,r)} < \infty$ dla każdego $r > 0$,

Iloczyn $z^{n_0}\Pi_{p\in P'}(E_{l_p}(z/p))^{n_p}$, gdzie $n_0 = 0$ gdy $0 \notin P$, jest więc niemal normowo zbieżny do szukanej funkcji. (Kolejność czynników jest dowolna.)

Uwaga 4. Nierzadko, żądane w dowodzie liczby l_p można bez trudu wskazać. Gdy $P \subset \mathbb{Z}$ i $n_p = 1$ dla wszystkich p, to wystarcza wziąć $l_p = 1$.

N.p., iloczyn $\prod_{n\neq 0}(1 - \frac{z}{n})\exp(\frac{z}{n})$ jest niemal normowo zbieżny.

W oparciu o (4) można też wyznaczyć jego wartość:

$\prod_{0<|n|\leq k}(1 - \frac{z}{n})\exp(\frac{z}{n}) = \prod_{n=1}^{k}(1 - \frac{z^2}{n^2}) \xrightarrow[k\to\infty]{} \frac{1}{\pi z}\sin(\pi z)$, tzn.

$$\prod_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} (1 - \frac{z}{n})\exp(\frac{z}{n}) = \frac{\sin(\pi z)}{\pi z} \tag{6}$$

Wniosek 1 (twierdzenie Poincarégo). *Funkcja, meromorficzna w płaszczyźnie $\mathbb{C}$, jest ilorazem dwóch funkcji całkowitych (tzn. holomorficznych w $\mathbb{C}$).*

Dowód. Niech $f \in M(\mathbb{C})$.

Na podstawie twierdzenia Weierstrassa istnieje funkcja $g \in H(\mathbb{C})$, mająca zera tylko w biegunach funkcji f, przy czym $k_g(p) = |k_f(p)|$ dla każdego bieguna p.

Funkcja $h := f \cdot g$ ma tylko osobliwości pozorne, więc można ją traktować jako funkcję całkowitą, dla której $f = h/g$. □

Uwaga 5. Funkcji g, o które chodzi w twierdzeniu Weierstrassa, jest wiele, lecz są one wyznaczone z dokładnością do czynnika e^h, gdzie $h \in H(\mathbb{C})$.

6 Funkcja Γ Eulera jako funkcja meromorficzna.

Dla każdej liczby naturalnej z i dostatecznie dużych n jest $\frac{(z+1)...(z+n)}{n!} = \frac{(n+1)...(n+z)}{z!} \approx \frac{n^z}{z!}$, skąd wynika istnienie poniższej granicy i równość $z! = z\Gamma(z)$ (czy: $(z-1)! = \Gamma(z)$), gdzie

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!n^z}{z(z+1)...(z+n)} \tag{7}$$

Pokażemy, że zbieżność prawej strony, i to niemal jednostajna, ma miejsce w $\mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, ...\}$ –co pozwala rozszerzyć funkcję $z \mapsto z!$ na ten zbiór. W tym celu dla $z \in \mathbb{C}$ napiszmy

$$\frac{z(z+1)...(z+n)}{n^z n!} = z\frac{\prod_{k=1}^n (1+\frac{z}{k})\mathrm{e}^{-\frac{z}{k}}}{\exp(z\ln n)} \cdot \exp(z(\frac{1}{1} + ... + \frac{1}{n})).$$

Przypomnijmy też, że ciąg $\frac{1}{1} + ... + \frac{1}{n} - \ln n$ ma granicę $\gamma = 0.57\ldots$ (to **stała Eulera–Mascheroniego**). Stąd $\lim_n \exp(z(\frac{1}{1} + ... + \frac{1}{n}))/\exp(z\ln n) = \mathrm{e}^{\gamma z}$; a że iloczyny częściowe $\prod_{k=1}^n (1+\frac{z}{k})\mathrm{e}^{-\frac{z}{k}}$ tworzą ciąg niemal jednostajnie zbieżny do $\prod_{k=1}^\infty (1+\frac{z}{k})\exp(-z/k)$, por. uwagę 3 w §5, to

$$\lim_{n\to\infty} \frac{z(z+1)...(z+n)}{n^z n!} = z\mathrm{e}^{\gamma z} \prod_{k=1}^{\infty} (1+\frac{z}{k})\mathrm{e}^{-\frac{z}{k}} \quad \text{(zbieżność n.j.)},$$

przy czym funkcja graniczna po prawej jest holomorficzna i zeruje się tylko w punktach $0, -1, -2, ...$, gdzie ma zera jednokrotne. To dowodzi, że w (6) zbieżność jest niemal jednostajna w $\mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, ...\}$, a graniczna funkcja Γ jest meromorficzna, nie przyjmuje wartości 0 i ma bieguny proste w $0, -1, -2, ...$. Uzyskaliśmy też **wzór Eulera–Weierstrassa**

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z\mathrm{e}^{\gamma z} \prod_{k=1}^{\infty} (1+\frac{z}{k})\mathrm{e}^{-\frac{z}{k}} \quad , \tag{8}$$

podczas gdy (7) to **wzór Eulera–Gaussa**. Odnotujmy tożsamości, znane Eulerowi:

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \quad \text{i} \quad -z\Gamma(z)\Gamma(-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)} = \Gamma(z)\Gamma(1-z). \tag{9}$$

Pierwsza łatwo wynika z (7), druga – z (8) i (6), a trzecia z poprzednich dwóch.

II Wybrane aspekty topologiczne i geometryczne

1 Przekształcenia biholomorficzne.

Definicja. Niech $U, V \subset \mathbb{C}$, przy czym zbiór U jest otwarty. Przekształcenie $f : U \to V$ nazwiemy **biholomorficznym**, jeśli jest ono bijektywne i holomorficzne.

Uwaga 1. Jeśli U jest obszarem i przekształcenie $f : U \to V$ jest biholomorficzne, to:

i) $f'(p) \neq 0$ dla każdego $p \in U$. (Patrz wniosek 1 w §VI.1.)

ii) V jest obszarem i f jest homeomorfizmem U na V.

(Ciągłość f^{-1} wynika z otwartości f, patrz twierdzenie 2 w §VI.1.)

iii) Przekształcenie f^{-1} jest holomorficzne. (Patrz ii) i uwaga 1 w §II.5.)

Uwaga 2. Gdy U jest obszarem w $\mathbb{C}$ i ciąg różnowartościowych funkcji $f_n \in H(U)$ jest niemal jednostajnie zbieżny, to graniczna funkcja f bądź jest różnowartościowa (i wtedy przekształca U biholomorficznie na $f(U)$), bądź stała. Bo jeśli $f \neq \text{const}$ i dla pewnego w równanie $f(z) = w$ ma ≥ 2 rozwiązania, to na podstawie twierdzenia Hurwitza z §V.2 jest tak przy f zastąpionym przez f_n, dla dostatecznie dużych n – wbrew różnowartościowości funkcji f_n. $\square$

Twierdzenie 1. *Gdy $f : U \to V$ jest przekształceniem biholomorficznym i $z_0 \in U$, to*

i) granica $\mu = \lim_{p,q \to z_0} |f(p) - f(q)|/|p - q|$ istnieje i jest różna od zera.

ii) f zachowuje miarę kąta między drogami, tzn. miara kąta między drogami γ_1, γ_2 w ich wspólnym początku z_0 jest równa mierze kąta między drogami $f \circ \gamma_1$ i $f \circ \gamma_2$ w ich wspólnym początku $f(z_0)$.

ii) udowodniono na początku semestru; dowód i) jest prosty.

2 Przekształcenia dysku.

Lemat Schwarza, przekształcenia Blaschkego

–już było.

3 Przykłady biholomorficznych przekształceń na dysk.

–już było.

4 Twierdzenie Cauchy'ego o równości całek (wersja homotopijna)

Twierdzenie 1 (Cauchy'ego o równości całek). *Kawałkami gładkie pętle $\lambda, \mu : [a, b] \to U$, swobodnie homotopijne w zbiorze $U \subset \mathbb{C}$, spełniają warunek*

$$\int_\lambda f = \int_\mu f \quad \textit{dla każdej funkcji } f \in H(U).$$

Ponieważ całka po drodze stałej jest równa zeru, więc wynika stąd

Wniosek 1. *Droga zamknięta γ, homotopijna w zbiorze $U \subset \mathbb{C}$ z pętlą stałą, ma własność Cauchy'ego w U (tzn. $\int_\gamma f = 0$ dla każdej funkcji $f \in H(U)$).*

Dowód twierdzenia Cauchy'ego. Ustalmy $f \in H(U)$. Możemy zakładać, że U jest zbiorem otwartym. (Inaczej przedłużymy f do pewnej funkcji $\widetilde{f} \in H(\widetilde{U})$, gdzie $\widetilde{U} \subset \mathbb{C}$ jest zbiorem otwartym, i zastąpimy U przez $\widetilde{U}$, a f przez $\widetilde{f}$.)

Z założenia, istnieje funkcja ciągła $\Gamma : [0, 1] \times [a, b] \to U$ taka, że

$$\Gamma(0, t) = \lambda(t) \text{ i } \Gamma(1, t) = \mu(t)\ \forall t \in [a, b], \text{ oraz } \Gamma(s, a) = \Gamma(s, b)\ \forall s \in [0, 1].$$

Ponieważ prostokąt $[0, 1] \times [a, b]$ jest zwarty, więc funkcja ta jest jednostajnie ciągła, a jej obraz $\mathrm{im}(\Gamma) = \Gamma([0, 1] \times [a, b])$ jest zwarty. Wynika stąd, że liczba

$$\varepsilon \overset{def}{=} \mathrm{dist}(\mathrm{im}(\Gamma), \mathbb{C} \setminus U)$$

jest dodatnia, oraz istnieje liczba $\delta > 0$ taka, że

$$\max(|s - s'|, |t - t'|) < \delta \Rightarrow |\Gamma(s, t) - \Gamma(s', t')| < \varepsilon.$$

Podzielmy prostokąt $[0, 1] \times [a, b]$ odcinkami $\{s_i\} \times [a, b]$ i $[0, 1] \times \{t_i\}$, $i = 0, \ldots, n$, na prostokąciki o średnicy $< \delta$. (Zakładamy, że $s_0 = 0$, $s_n = 1$, $t_0 = a$, $t_n = b$.) Niech

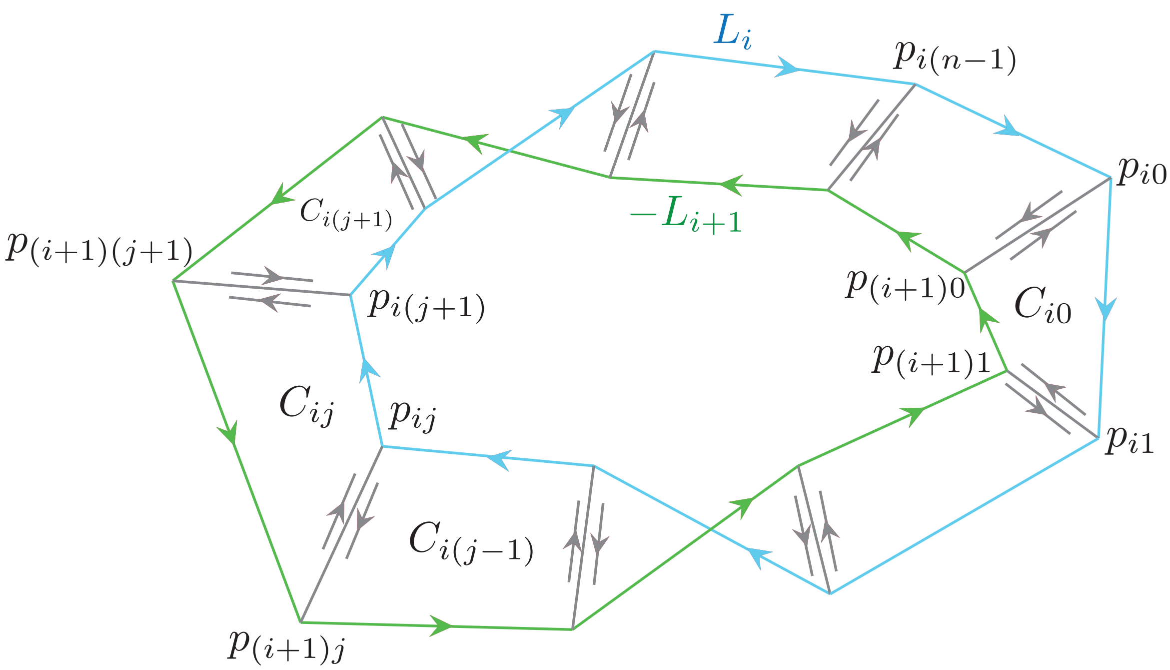
$$p_{ij} = \Gamma(s_i, t_j)$$

i rozważmy następujące łamane:

$$L_i = [p_{i0}, p_{i1}, \dots, p_{in}] \quad \text{i} \quad C_{ij} = [p_{ij}, p_{i,j+1}, p_{i+1,j+1}, p_{i+1,j}, p_{ij}].$$

Wszystkie wierzchołki łamanej C_{ij} leżą w dysku $D(p_{ij}, \varepsilon) \subset U$. Cała łamana C_{ij} leży więc w tym dysku i $\int_{C_{ij}} f = 0$, na mocy twierdzenia 1 w §III.5. Dodajmy te równości przy i ustalonym, lecz j przebiegającym $0, \dots, n-1$; otrzymamy zależności (patrz rysunek)

$$\int_{L_i} f - \int_{L_{i+1}} f = 0 \ \text{ dla } \ i = 0, \dots, n-1. \tag{*}$$



Tak więc $\int_{L_0} f = \dots = \int_{L_n} f$. Twierdzimy, że podobnie

$$\int_\lambda f = \int_{L_0} f \qquad \text{oraz} \qquad \int_\mu f = \int_{L_n} f \tag{**}$$

Istotnie, tym razem pętla $\lambda_{|[t_j, t_{j+1}]} \# [p_{0,j+1}, p_{0j}]$ przebiega w dysku $D(p_{0j}, \varepsilon) \subset U$, skąd całka funkcji f po niej jest równa zeru. Całki po $\lambda_{|[t_j, t_{j+1}]}$ i po $[p_{0j}, p_{0,j+1}]$ są więc równe i po dodaniu tych n równości otrzymujemy pierwszą zależność w (**). Dowód drugiej jest analogiczny.

5 Twierdzenie Riemanna o holomorficznej równoważności płaskich obszarów jednospójnych.

Definicja. Zbiór $U \subset \mathbb{C}$ jest **jednospójny**, jeśli jest łukowo spójny i każda pętla w U jest w U homotopijna z pętlą stałą.

Przykład. Każdy zbiór gwiaździsty (a więc i każdy zbiór wypukły) jest jednospójny. Istotnie, gdy $\gamma : [a, b] \to U$ jest pętlą w takim zbiorze U, zaś $z_0 \in U$ punktem występującym w definicji gwiaździstości, to wzór $\gamma_s(t) := sz_0 + (1-s)\gamma(t)$ zadaje homotopię pętli, łączącą $\gamma = \gamma_0$ z pętlą stale równą z_0. Tak samo, zbiór U jest łukowo spójny.

Twierdzenie 1. *Gdy U jest niepustym obszarem w $\mathbb{C}$, różnym od $\mathbb{C}$, to równoważne są warunki:*

a) obszar U jest jednospójny;

b) $\int_\gamma f = 0$ dla każdej funkcji $f \in H(U)$ i każdej drogi zamkniętej γ w U;

c) każda funkcja $f \in H(U)$ ma funkcję pierwotną;

d) każda funkcja holomorficzna $f : U \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ma gałąź logarytmu;

e) każda funkcja holomorficzna $f : U \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ma gałąź argumentu;

f) każda funkcja holomorficzna $f : U \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ma dla każdego $w \in \mathbb{C}$ gałąź swej w–tej potęgi;

g) każda różnowartościowa funkcja holomorficzna $f : U \to \mathbb{C}\setminus\{0\}$ ma gałąź pierwiastka kwadratowego;

R) istnieje biholomorficzne przekształcenie obszaru U na dysk $\{z : |z| < 1\}$.

$a) \Rightarrow b)$ –wynika z wniosku 1 w §4.

$R) \Rightarrow a)$ –wynika stąd, że jednospójność jest zachowywana przez homeomorfizmy, a dysk D jest jednospójny.

Implikacje b)$\Rightarrow c) \Rightarrow d) \Rightarrow e) \Rightarrow f) \Rightarrow g)$ bądź są oczywiste, bądź zostały omówione wcześniej

Lemat 1. *Niech punkt* $p \in U$ *i przekształcenie biholomorficzne* $h : U \to h(U) \subsetneq D$ *spełniają warunek* $h(p) = 0$. *Jeśli zachodzi g), to istnieje przekształcenie biholomorficzne* $f : U \to f(U) \subset D$ *takie, że*

$$f(p) = 0 \quad i \quad |f'(p)| > |h'(p)|. \tag{1}$$

* Dowód implikacji $g) \Rightarrow R)$ w twierdzeniu. Podzielimy go na 4 części.

1. Przeprowadzimy U biholomorficznie na obszar, który nie jest gęsty w $\mathbb{C}$.

W ślad za P. Koebem, ustalmy w tym celu $q \in \mathbb{C} \setminus U$ i niech f będzie gałęzią pierwiastka kwadratowego z funkcji $\mathrm{id}_U - q$. Zbiór $V = f(U)$ jest otwarty i wobec tego zbiór $-V = \{-v : v \in V\}$ –też. Pozostaje zauważyć, że $V \cap (-V) = \emptyset$. Jeśliby jednak $f(a) = -f(b)$ dla pewnych $a, b \in U$, to $a - q = (f(a))^2 = (f(b))^2 = b - q$, skąd $a = b$ i $f(a) = -f(a)$. Jest to niemożliwe, bo wówczas $0 = (f(a))^2 = a - q$, wbrew temu, że $q \notin U$ i $a \in U$.

2. Plan dalszego rozumowania pochodzi od L. Fejera i F. Riesza.

Ustalmy punkt $p \in U$ i oznaczmy przez $\mathcal{F}$ zbiór wszystkich różnowartościowych przekształceń $f \in H(U)$, dla których $f(p) = 0$ i $f(U) \subset D$.

$\mathcal{F} \neq \emptyset$, bo do $\mathcal{F}$ należy złożenie $h \circ f_0$ dowolnego różnowartościwego przekształcenia $f_0 \in H(U)$, którego obraz jest rozłączny z pewnym dyskiem D_0 (patrz wyżej), z homografią h, przeprowadzającą D_0 na $\widetilde{\mathbb{C}} \setminus \overline{D}$, a $f_0(p)$ na 0.

Dla $f \in \mathcal{F}$ zachodzi $f'(p) \neq 0$, patrz uwaga 1i) w §1.

3. Twierdzimy, że $|h'(p)| = M := \sup\{|f'(p)| : f \in \mathcal{F}\}$ dla pewnego $h \in \mathcal{F}$.

Istotnie, istnieją $f_1, f_2, \dots \in \mathcal{F}$ dla których $\lim_{n\to\infty} |f_n'(p)| = M$. Na mocy twierdzeń Montela–Osgooda–Stieltjesa i Weierstrassa, można z ciągu (f_n) wybrać podciąg zbieżny niemal jednostajnie do funkcji $h \in H(U)$ takiej, że $|h'(p)| = M$. Stąd $h'(p) \neq 0$ i funkcja h, nie będąc stałą, przekształca obszar U biholomorficznie na zbiór otwarty $h(U)$. (Korzystamy z uwag 1 i 2 w §1.) A że zbiór ten jest zawarty w $\overline{D}$, to jest zawarty i w $\mathrm{Int}(\overline{D}) = D$.

4. Jeśliby $h(U) \neq D$, to z lematu wynikałoby istnienie przekształcenie $f \in \mathcal{F}$ takiego, że $|f'(p)| > |h'(p)|$, wbrew wyborowi h. Zatem $h(U) = D$ i h jest szukanym przekształceniem. (Jest ono 1-1, bo należy do $\mathcal{F}$.) □

Uwaga 1. Płaszczyzna $\mathbb{C}$ nie jest holomorficznie równoważna z dyskiem D, bo każda funkcja holomorficzna $\mathbb{C} \to D$ jest stała (co wynika z twierdzenia Liouville'a).

@@@@@@@@@@@@@@

Lemat 2. *Niech punkt $p \in U$ i przekształcenie biholomorficzne $h : U \to h(U) \subsetneq D$ spełniają warunek $h(p) = 0$. Jeśli zachodzi g), to istnieje przekształcenie biholomorficzne $f : U \to f(U) \subset D$ takie, że*

$$f(p) = 0 \quad i \quad |f'(p)| > |h'(p)|. \tag{2}$$

Dowód. * (C. Caratheodory'ego, nawiązujący do poniższego pomysłu P. Koebego.) Obierzmy punkt $q \in D \setminus h(U)$ i homografię h_0, przeprowadzającą D na D, a q na 0. (Można za h_0 przyjąć przekształcenie Blaschkego b_q, patrz przykład w §2.) Wtedy $0 \notin h_0 \circ h(U)$ i z założenia istnieje gałąź f_0 pierwiastka kwadratowego z $h_0 \circ h$. Na koniec, niech homografia f_1 przeprowadza D na D, a $f_0(p)$ na 0. Za szukane przekształcenie f przyjmiemy złożenie

$$f := f_1 \circ f_0.$$

Żądanej nierówności $|f'(p)| > |h'(p)|$ można dowieść, wyliczając $f'(p)$. Można jednak ominąć wszelkie rachunki, jak niżej.

Przyjmijmy $F(z) = z^2$ dla $z \in \widetilde{\mathbb{C}}$. Z definicji, $F \circ f_0 = h_0 \circ h$, wobec czego

$$h = G \circ f, \quad \text{gdzie } G := h_0^{-1} \circ F \circ f_1^{-1} : \widetilde{\mathbb{C}} \to \widetilde{\mathbb{C}}.$$

Ponieważ $h(p) = 0 = f(p)$, więc $G(0) = 0$. Ponadto, G przeprowadza D w D (bo czynią to h_0^{-1}, f_1^{-1} i F), lecz nie różnowartościowo (bo $f_1^{-1}(D) = D$ i $F_{|D}$ nie jest 1-1). Zatem $G_{|D}$ nie jest obrotem i z lematu Schwarza wynika, że $|G'(0)| < 1$. Stąd $|h'(p)| = |G'(0)||f'(p)| < |f'(p)|$. □