FAN: wybór zadań przygotowawczych do egzaminu. styczeń 2014r.

Egzamin będzie z całości materiału – również i tej jego części, która objęta była poprzednimi zadaniami przygotowawczymi i samym kolokwium. Poniższy wybór dotyczy w większości tylko przykładowych zadań rachunkowych, dotyczących materiału omawianego po kolokwium, lub przykładowych zadań teoretycznych. Znak @ towarzyszy zadaniom wziętym z egzaminów lub kolokwiów z ubiegłych lat.

@@@@@@@@@@@@@@@

Całki niewłaściwe a twierdzenie o residuach. (Patrz np. strony 43-46 notatek.)

Wyznaczyć następujące całki niewłaściwe, w tym uzasadnić ich istnienie:

1. U Krzyża zad. 3.7.1 (którakolwiek część).

2. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin \pi x}{x^2+2x+5} dx$. (Wskazówka: wykorzystać to, że $\sin = \mathrm{Im}(\exp)$ na osi rzeczywistej; użyć lematu Jordana.)

3. Obliczyć $\int_0^{\infty} \frac{x^{1/3}}{(1+x^2)^2} dx$. (Wskazówka: całkować po zorientowanych brzegach zbiorów $\{z : \varepsilon < |z| < R, \mathrm{Im} z > 0\}$ lub $\{z : \varepsilon < |z| < R, \mathrm{Arg}_{[0,2\pi)}(z) \in (\delta, 2\pi - \delta)\}$; następnie przejść do granicy przy $\delta \to 0$ (przy drugim zbiorze) i $\varepsilon \to 0, R \to \infty$.)

4. Obliczyć $\int_0^{\infty} \frac{\log x}{x^2-1} dx$. (Wskazówka: całkować po zorientowanym brzegu zbioru $\{z : \varepsilon < |z| < R, \mathrm{Arg}_{[0,2\pi)}(z) \in (0, \pi/2)\}$; przejść do granicy przy $\varepsilon \to 0, R \to \infty$.)

Sumowanie szeregów a twierdzenie o residuach.

Obliczyć, uzasadniając też istnienie sumy następujących szeregów:

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{w}{w+n^2}$, dla $w \notin \mathbf{i}\mathbb{N}$. (Wskazówka: twierdzenie 4 na str. 45 notatek do wykładu.)

6. @ $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2+1}$. (Rozwiązać wpierw zadanie 1 na str. 45 notatek.)

Twierdzenie o residuach z uwzględnieniem residuum w nieskończoności.

7. U Krzyża, zadania 3.4.16+3.5.7

Zasady izolowanych zer i identyczności; zasada symetrii.

8. W następujących przypadkach zbadać, czy istnieje funkcja holomorficzna w otoczeniu zera, taka, że dla dostatecznie dużych n zachodzi

a) $f(1/n) = f(-1/n) = 1/n^2$.

b) $f(1/n) = f(-1/n) = 1/n^3$.

c)* $4n^2(f(1/2n))^2 + nf(1/n) = n^2(f(1/n))^2 - nf(-1/n) + 1$.

Jeśli żądana funkcja istnieje, wskazać ją i zbadać, jaka jest postać takich funkcji na dysku $|z| < 1$.

9. To samo, gdy warunek na f jest taki: $f'(1/n) + f(1/n) = 0$.

10. U Krzyża zadanie 7.2.1.

11. U Krzyża zadanie 7.2.2.

Zasada argumentu i twierdzenia Rouchégo. („Liczba zer” uwzględnia krotności.)

12. Zbadać liczbę zer wielomianu $4z^5 + 5z^2 + 1$ w kole $|z| \le 1$ i w pierścieniu $1 < |z| < 2$.

c) Powtórzyć to dla wielomianu $z^6 - 5z^4 + 3z^3 - 1$ i pierścienia $1 < |z| < 3$.

13. Niech $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Dowieść, że dla dostatecznie dużych n równanie $\mathrm{tg}(z) = cz$ ma $2n+1$ rozwiązań w kwadracie $|\mathrm{Re}z| \le \pi n, |\mathrm{Im}z| \le \pi n$. Posłużyć się twierdzeniem Rouchégo jak następuje: przyjąć $f(z) = \mathrm{tg}(z) - cz, g(z) = cz$, dowieść, że $N_{f,K} = N_{g,K}$, gdzie K to nasz dostatecznie duży kwadrat, i wyznaczyć sumę $B_{f,K}$ rzędów biegunów funkcji f w K. (Por. zadanie 3.9.16 u Krzyża.)

14. @ Wyznaczyć liczbę pierwiastków wielomianu $f = z^7 + 6z^4 + 1$ w półpłaszczyźnie $\mathrm{Re}(z) > 0$.

Naszkicujemy dwa rozwiązania. Zorientowany brzeg półkola $\{z : |z| \le R \text{ i } \mathrm{Re}(z) \ge 0\}$ przedstawmy jako $\lambda\#\mu$, gdzie $\lambda(t) = -\mathbf{i}t$ ($t \in [-R, R]$) i $\mu(t) = Re^{\mathbf{i}t}$ ($t \in [-\pi/2, \pi/2]$).

Pierwsze rozwiązanie. Dla dużych R można $f \circ \mu$ połączyć z drogą μ^7 homotopią w $\mathbb{C} \setminus \{0\}$; homotopię określamy wzorem $[0,1] \times [-\pi/2, \pi/2] \ni (s,t) \mapsto f_s \circ \mu(t)$, gdzie $f_s(z) = z^7 + s(6z^4 + 1)$. (To, że wartość 0 nie jest przyjmowana wynika stąd, że $|6z^4 + 1| < |z|^7$ dla dużych $|z| = R$.) Natomiast $f \circ \lambda$ przyjmuje wartości w $\{z : \mathrm{Re}(z) \ge 1\}$, bo dla $z = -\mathbf{i}t \in \mathrm{im}(\lambda)$ zachodzi $f(z) = \mathbf{i}t^7 + 6t^4 + 1$. W szczególności, f nie ma pierwiastków na osi $\mathrm{Re}(z) = 0$.

Powyższa homotopia w punktach zbioru $[0,1] \times \{\pm\pi/2\}$ przyjmuje wartości poza prostą $\mathrm{Im}(z) = 0$. Wobec tego pętla $f \circ (\lambda\#\mu)$ jest w $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ homotopijna z pętlą $\gamma := (f \circ \lambda)\#L_1\#\mu^7\#L_2$, gdzie L_1 i L_2 to pewne drogi w $\{z : \mathrm{Im}(z) \ne 0\}$. Indeks $\mathrm{ind}(\gamma, 0)$ można wyznaczyć stosując twierdzenie z §IV.5 przy $p = -2R^7, q = 0$ – wystarczy zauważyć, że półprosta $(-\infty, 0]_{\mathbb{R}}$ nie przecina obrazów dróg L_1, L_2 i $f \circ \lambda$, zaś obraz drogi μ^7 przecina w jednym punkcie $-R^7$, równym $(\mu(t_j))^7$ dla czterech wartości $t_j \in [-\pi/2, \pi/2]$ (mianowicie, dla $t_j = \frac{\pi}{7}(-1 + 2j)$, $j = -1, 0, 1, 2$); przy tym (przy oznaczeniach twierdzenia z §IV.5) wszystkie liczby ε_j są równe 1. Por. ćwiczenie w §IV.5; warto też naszkicować schematyczny rysunek pętli γ.

Stąd dla dużych R, $\mathrm{ind}(\gamma, 0) = 4$ i tym samym $\mathrm{ind}(f \circ (\lambda\#\mu), 0) = 4$. Są więc cztery pierwiastki w $\{z : |z| < R \text{ i } \mathrm{Re}(z) > 0\}$, na podstawie twierdzenia o residuach.

Drugie rozwiązanie. W otoczeniu krzywej $\mathrm{im}(\mu)$ określić można gałąź logarytmu g funkcji f wzorem $g(z) = 7\mathrm{Log}(z) + \mathrm{Log}(1 + \frac{6}{z^3} + \frac{1}{z^7})$. Tak więc $e^{g(z)} = f(z)$ dla z z otoczenia półokręgu $(Re^{\mathbf{i}t})_{t \in [-\pi/2, \pi/2]}$, co dla tych z daje $f'(z)/f(z) = g'(z)$ i wobec tego $\int_\mu \frac{f'}{f} = g(iR) - g(-iR) = 7\mathrm{Log}(-iR^7) - 7\mathrm{Log}(iR^7) + o(R)$. (Tu Log może być dowolną gałęzią logarytmu, określoną w otoczeniu rozważanego półokręgu –n.p. określoną poza $(-\infty, 0]_{\mathbb{R}}$.) Podobnie można oszacować $\int_\lambda \frac{f'}{f}$ – gra rolę to, że f przyjmuje na $\mathrm{im}(\lambda)$ wartości w $\{z : \mathrm{Re}z > 0\}$, a tam określona jest ta sama gałąź Log. Otrzymamy, że przy $R \to \infty$, liczba $\frac{1}{2\pi \mathbf{i}}(\int_\lambda \frac{f'}{f} + \int_\mu \frac{f'}{f})$ dąży do $7/2 + 1/2 = 4$ i teza znów wynika z zasady argumentu.

Uwaga. W różnych grupach dyskutowane mogły być różne podejścia (w tym inne od powyższych). U Krzyża jest kilka podobnych zadań, z obszernymi rozwiązaniami (od 3.9.2 do 3.9.8); rozwiązaniu 3.9.7 towarzyszy pouczający rysunek.

15. Dowieść, że wszystkie zera wielomianu $z^5 - z + 16$ leżą w pierścieniu $1 < |z| < 2$, przy czym w pierwszej ćwiartce dokładnie dwa. (U Krzyża zadanie 3.9.6).

16. a) Dowieść, że wielomian $z^4 + \mathbf{i}z^3 + 1$ ma jeden pierwiastek w pierwszej ćwiartce.
b) Ile pierwiastków w tej ćwiartce ma wielomian $z^{99} + z + 1$?

17. Dowieść, że wielomian $\sum_{k=0}^n$ ma przy $c_n \neq 0$ wszystkie swe pierwastki w kole $|z| < M + 1$, gdzie $M = \max\{|c_k|/|c_n| : k = 0, ..., n-1\}$. (W razie kłopotu z dowodzeniem, dlaczego tak można obrać M, patrz wskazówka na str. 57 notatek.)

18. Niech $f(z) = e^z - 4z^4$. Ile zer, z uwzględnieniem ich krotności, ma fukcja f w dysku $D = D(0,1)$? Ile ma ich w półpłaszczyźnie $\mathrm{Re}z < 0$? Czy f ma zera wielokrotne?

Inne tematy (w tym lemat Schwarza, zasada maksimum).

19. @ Udowodnić, że różna od identyczności funkcja, holomorficznie przekształcająca dysk $|z| < 1$ w siebie, ma w nim najwyżej jeden punkt stały. (Wskazówka: lemat Schwarza.)

20. Dla $p, q \in D$ przyjmijmy $\delta(p,q) := |b_p(q)| = \frac{|p-q|}{|1-\overline{p}q|}$. Dowieść, że gdy przekształcenie $f : D \to D$ jest homomorficzne, to:
a) $\delta(f(p), f(q)) \leq \delta(p,q)$ dla wszystkich $p, q \in D$. (Wskazówka: zauważyć, że prawa strona nie zmieni się, gdy p i q zastąpic przez ich obrazy przy $g := b_p$, a prawa – gdy $f(p)$ i $f(q)$ zastąpić przez ich obrazy przy $h := b_{f(p)}$. W ten sposób wyjściową nierówność sprawadzić do analogicznej dla $F := h \circ f \circ g^{-1}$, jednak przy $p = 0 = F(p)$.)
b) $|f'(p)| \leq (1 - |f(p)|^2)/(1 - |p|^2)$ dla wszystkich $p \in D$.
c) Jeśli w a) w miejsce nierówności $\leq$ zachodzi równość dla pewnych $p \neq q$ (odp. dla pewnego p), to przekształcenie f jest biholomorficzne. Odwrotnie, gdy jest ono biholomorficzne, to obie strony nierówności są równe jako funkcje.

21. a) Jakie nierówności otrzymujemy wyżej, gdy $p = 0$?
b) Co można powiedzieć o funkcji holomorficznej $f : D \to D$, jeśli $|f'(0)| \geq 1$?

22. a) Znaleźć homografię f, przeprowadzającą dysk $|z| < 1$ na półpłaszczyznę

$\mathrm{Re}(z) > 1/2$ tak, że obrazem zera jest jedynka.

b) Znaleźć postać wszystkich homografii h o wymienionych wyżej własnościach. (Odp. $h(z) = 1/(kz+1)$, gdzie $|k| = 1$. Wskazówka: jakie własności ma $f^{-1} \circ h$?)

c) Przy oznaczeniach z b), jaką maksymalną wartość może przyjmować $\mathrm{Im}(h(1/2))$? (Wskazówka: $h(1/2)$ leży w obrazie okręgu $|k| = 1$ przy homografii $k \mapsto 2/(2+k)$.)

23. Wzmocnić twierdzenie Liouville'a następująco: gdy obraz $f(\mathbb{C})$ funkcji $f \in H(\mathbb{C})$ nie jest zbiorem gęstym w $\mathbb{C}$, to $f = \mathrm{const}$. (Wskazówka: złożyć f z homografią.)

24. @ Udowodnić, że funkcja $f \in H(\mathbb{C})$ jest stała, jeśli:

a) funkcja e^f jest ograniczona, lub

b) funkcja $\mathrm{Re}(f)$ jest ograniczona z góry lub z dołu.

25. @ Znaleźć wszystkie funkcje $f \in H(\mathbb{C} \setminus \{0, 2\})$, spełniające poniższe 3 warunki:

1. f ma biegun rzędu 2 w zerze i rzędu 1 w dwójce;
2. f jest ograniczona w pierścieniu $|z| > 10$;
3. $f(1) = 3$ i $f'(1) = 6$;
4. $\int_{|z|=1} f = 2\pi\mathbf{i}$ i $\int_{|z|=10} f = 0$. (Wskazówka: rozłożyć f na sumę ułamków prostych, korzystając z §V.4)

26. Niech funkcja f, holomorficzna w nakłutym otoczeniu punktu $p \in \mathbb{C}$, rozwija się w nim w szereg Laurenta $\sum_{n=-2}^{\infty} c_n (z-p)^n$. Wyznaczyć $\mathrm{res}_p(f \cdot f)$ przez współczynniki c_n.

27. Niech γ będzie krzywą zamkniętą w $\mathbb{C} \setminus D(0, r)$. Udowodnić, że $\ell(\gamma) \geq 2\pi r |\mathrm{ind}(\gamma, 0)|$.

28. Niech funkcje f i g będą holomorficzne w otoczeniu punktu $p \in \mathbb{C}$, przy czym $g(p) = g'(p) = 0$ i $g''(p) \neq 0$.

a) Wyrazić $\mathrm{res}_p(f/g)$ przez $f(p), f'(p), g''(p)$ i $g'''(p)$.

b) Zbadać, czy f/g może mieć w p osobliwość istotną, zaś jeśli ma tam biegun, to którego może być rzędu. Dać uzasadnienia i odpowiednie przykłady.

Dodatkowe zadania dotyczące materiału sprzed kolokwium.

29. a) Dowieść, że na $\mathbb{C} \setminus [0, 1]$ istnieje gałąź pierwiastka z funkcji $h(z) = \frac{1-z}{z}$. (Wskazówka: zbadać, czym jest $h([0, 1])$.)

b) Dowieść, że na tym zbiorze istnieje gałąź pierwiastka z funkcji $z(1 - z)$. (Wskazówka: a) wraz z rozwiązaniem jednego z zadań z kolokwium.)

30. Rozważmy kwadrat o środku w 0 i boku równoległym do osi rzeczywistej. Dowieść, że jeśli długość $2N + 1$ jego boku jest liczbą nieparzystą, to na brzegu kwadratu funkcje $\mathrm{ctg}(\pi z)$ i $1/\sin(\pi z)$ są (co do modułu) ograniczone stałą niezależną od N.

31. @ Rozwinąć funkcję $f(z) = 1/(z^2+1)(z+2)$ w szereg Laurenta na maksymalnych pierścieniach o środku w 0, które nie zawierają jej punktów osobliwych.

32. Niech
$$g(z) = \frac{z^2 + 2\cos z - 2}{e^z - z^2 - 1} \quad \text{i} \quad f(z) = \frac{g(z)}{z^5} \qquad (z \neq 0).$$

a) Dowieść, że funkcję g można przedłużyć do funkcji $\widetilde{g}$, holomorficznej w otoczeniu zera i wyznaczyć współczynniki $c_0, \dots, c_4$ rozwinięcia Maclaurina $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ funkcji $\widetilde{g}$.

b) Wyznaczyć część główną rozwinięcia Laurenta funkcji f wokół zera, residuum tej funkcji w zerze oraz rodzaj osobliwości w zerze (czy istotna, czy pozorna, czy biegun, i którego rzędu).

33. @ Niech $f \in H(D)$, gdzie D to dysk $|z| < 1$. Dowieść, że:

a) $\sum_{j=0}^{n} f^{(j)}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (\sum_{j=0}^{n} f^{j+k}(0)) z^k / k!$ dla $n \in \mathbb{N}$ i $z \in D$.

b) Jeśli szereg funkcyjny $\sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}$ jest zbieżny w punkcie $z = 0$, to jest zbieżny niemal jednostajnie w D.

34. @ Niech $f(z) = e^{iz}/(z - i)(z^2 + 1)$. Obliczyć $\int_\Gamma f$, gdy

a) Γ to dodatnio zorientowany okrąg $|z| = 2$,

b) Γ to łamana $[w_0, w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6, w_0]$, o następujących wierzchołkach $w_0 = 4i,\ w_1 = 2+2i,\ w_2 = -2-2i,\ w_3 = 2-2i,\ w_4 = -3+3i,\ w_5 = 5+3i, w_6 = -1$.

35. Znaleźć ogólną postać homografii, przeprowadzających okrąg $|z| = 3$ w siebie, okrąg $|z| = 1$ na prostą, a punkt 9 na zero.

Wybór przykładowych zadań teoretycznych.

1. a) Udowodnić, że funkcja, meromorficzna w całej sferze $\widetilde{\mathbb{C}}$, jest funkcją wymierną. (Jest to twierdzenie 3 na str. 53 notatek.)

b) Udowodnić porzedzające twierdzenie 2 ze str. 53.

2. Udowodnić, że obraz spójnego zbioru otwartego w $\widetilde{\mathbb{C}}$ przy niestałej funkcji meromorficznej jest zbiorem otwartym w $\widetilde{\mathbb{C}}$.

3. a) Udowodnić, że jeśli funkcja f rozwija się w pierścieniu $|z| > r$ w szereg Laurenta $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n z^n$ i spełnia warunek $\lim_{z \to \infty} z^k f(z) = 0$ dla pewnego $k \in Z$, to $c_n = 0$ dla $n \leq -k$ i wobec tego $|f(z)| \leq C/|z|^{k+1}$ dla pewnej stałej C i dostatecznie dużych $|z|$.

b) Wzmocnić twierdzenie Liouville'a następująco: jeśli $f \in H(\mathbb{C})$ i $|f(z)| \leq C|z|^s$ dla pewnych $s, C \geq 0$ i wszystkich dostatecznie dużych $|z|$, to f jest wielomianem stopnia $\leq \lfloor s \rfloor$.

4. Dowieść, że gdy funkcja f jest holomorficzna w $\mathbb{C}$ poza zbiorem skończonym, to suma jej residuów, włączając residuum w nieskończoności, jest równa zeru. (To też udowodniono w notatkach do wykładu, ale nie napiszę, gdzie.)

5. @ Udowodnić, że gdy $f, g \in H(\mathbb{C})$ są takie, że $f \circ g$ jest wielomianem, to f i g są wielomianami. (Wskazówka: zadanie 1b) wyżej.)

6. @ Zbadać, czy istnieją niestałe funkcje holomorficzne z $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ w $\{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$. (Wskazówka: wyniki z §V.3 i §V.4.)

7. Niech funkcja f będzie holomorficzna w ograniczonym obszarze U i ciągła w jego domknięciu $\overline{U}$. Dowieść, że:

a) Jeśli funkcja $|f|$ jest stała na brzegu $\mathrm{Bd}(U) := \overline{U} \setminus U$ zbioru U, to f jest stała na U lub ma w U miesce zerowe.

b) Jeśli $|f(w)| > |f(z_0)|$ dla wszystkich $w \in \mathrm{Bd}(U)$ i pewnego $z_0 \in U$, to f ma w U miejsce zerowe.

c) Funkcja $|f|$ swe maksimum na $\overline{U}$ przyjmuje w punktach zbioru $\mathrm{Bd}(U)$.

8. Niech funkcja f będzie niestała i holomorficzna w dysku $|z| < 1$. Udowodnić, że funkcja $\varphi(r) := \sup_{|z|=r} |f(z)|$ jest ściśle rosnąca na $[0, 1)$. (U Krzyża zadanie 6.1.6.)

9. a) Niech U będzie zbiorem otwartym w $\mathbb{C}$. Udowodnić, że gdy funkcja f, holomorficzna w U poza zbiorem dyskretnym, ma w z_0 osobliwość istotną, to jej złożenie $g \circ f$ z funkcją $g \in M(U)$ nie ma w z_0 bieguna ani osobliwości pozornej.

b) Tak samo jest, gdy U jest zbiorem otwartym w $\widetilde{\mathbb{C}}$.

10. Dowieść, że funkcja $f : U \to \mathbb{C}$, określona i ciągła w zbiorze otwartym $U \subset \mathbb{C}$, jest holomorficzna wtedy i tylko wtedy, gdy jej kwadrat $f \cdot f$ jest funkcją holomorficzną.

11. Niech funkcja f, meromorficzna w zbiorze otwartym $U \subset \mathbb{C}$, ma w nim tylko skończenie wiele biegunów. Dowieść, że $f = h/w$, gdzie $h \in H(U)$ i w jest wielomianem.

<u>Wybór przykładowych tematów egzaminu z teorii.</u>

Podaję jako przykłady tematy z egzaminu prof. Pola sprzed 3 lat:

1. a) Sformułować twierdzenie Morery.

b) Udowodnić twierdzenie Weierstrassa o granicy niemal jednostajnie zbieżnego ciągu funkcji holomorficznych.

2. a) Podać definicję indeksu drogi zamkniętej względem punktu.

b) Sformułować zasadę argumentu.

3. a) Podać definicję obszarów jednospójnych i sformułować twierdzenie Riemanna o przekształceniach konforemnych.

b) Udowodnić lemat Schwarza o holomorficznych przekształceniach dysku w siebie.

FAN: wybór zadań przygotowawczych do kolokwium. listopad 2013r.

Przypominam, że kolokwium odbędzie się w czwartek 5 XII, godz. 14.30–17.30, w salach 3180 i 3160.

1. a) Wyrazić w postaci $a + b\mathbf{i}$ następujace liczby zespolone:

$$(1+\mathbf{i}\sqrt{3})^6, \quad (\tfrac{1+\mathbf{i}\sqrt{3}}{1-\mathbf{i}})^4, \quad \cos(\tfrac{\pi}{2} - \mathbf{i}\ln 2).$$

b) Udowodnić, że gdy $|z| = r > 0$, to $\mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \frac{r^2}{z})$.

c) Udowodnić, że jeśli szereg $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ jest zbieżny i $|\arg(u_k)| \le c < \pi/2$ dla wszystkich k, to szereg $\sum_k |u_k|$ jest zbieżny.

d) Udowodnić, że gdy $t = \ln(x + \sqrt{x-1}\sqrt{x+1})$, to $\cosh(t) = x$.

e) Zbadać, dla jakich z rzeczwiste są liczby $\cos(z), \sin(z), \frac{\sin(z)}{\cos(z)}$. Jaki jest zbiór wartości funkcji $\mathrm{tg} := \sin / \cos$?

f) Dla $z = x + \mathbf{i}y$, gdzie $x, y \in \mathbb{R}$, dowieść równości $|\sin z|^2 = \sin^2 x + \mathrm{sh}^2 y = \mathrm{ch}^2 y - \cos^2 x$ oraz $|\cos z|^2 = \mathrm{sh}^2 y + \cos^2 x = \mathrm{ch}^2 y - \sin^2 x$.

2. Wyznaczyć koło zbieżności szeregu (mowa o maksymalnym kole otwartym):

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} z^n$; b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} z^n$; c) $\sum_{n=1}^{\infty} (n + a^n) z^n$.

3. Wyznaczyć koło zbieżności i sumę szeregu:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} n(z+2)^n$; b) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2(z-1)^n$; c) $\sum_{n=1}^{\infty} n^3 z^n$.

4. Wyznaczyć, w których punktach istnieje pochodna zespolona funkcji

a) $f(z) = z\mathrm{Re}(z)$, b) $f(x+iy) = \frac{x}{x^2+y^2} - \mathbf{i}\frac{y}{x^2+y^2}$.

5. Niech $f(z) = \frac{1}{2}(z + z^{-1})$ dla $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Udowodnić, że funkcja f przekształca w sposób różnowartościowy zbiory $\{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$ i $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\}$ na $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$, zaś zbiór $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) > 0\}$ na $(\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}) \cup (-1, 1)$. (Wskazówka: wyznaczyć obraz $f(\partial X)$ brzegu ∂X rozważanego zbioru X i dowieść, że dla $w \notin f(\partial X)$ równanie $z + z^{-1} = 2w$ ma dwa rozwiązania z_1, z_2; z nich jedno należy do X, bo $z_1 z_2 = 1$.)

6. Udowodnić, że funkcja $f(z) := z/(1-z)^2$ bijektywnie przeprowadza dysk $|z| < 1$ na $\mathbb{C} \setminus (-\infty, -1/4]_{\mathbb{R}}$.

7. Udowodnić, że funkcja tg bijektywnie przeprowadza pas $|\mathrm{Re} z| < \pi/4$ na dysk $|z| < 1$.

8. a) Przeprowadzić biholomorficznie soczewkę $D(0, \sqrt{2}) \cap D(1, 1)$ na półpłaszczyznę $\mathrm{Im} z > 0$.

b) Przeprowadzić biholomorficznie dysk $|z| < 1$ na płaszczyznę $\mathbb{C}$ z wyjętymi dwiema współiniowymi półprostymi $[2, \infty)_{\mathbb{R}}$ i $(-\infty, -2]_{\mathbb{R}}$.

c) Przeprowadzić biholomorficznie soczewkę $D(-1, 2) \cap D(1, \sqrt{2})$ na dysk $|z| < 1$ tak, by obrazem zera było zero.

9. Jaka jest postać homografii, przeprowadzających okrąg $|z| = 1$ na siebie?

10. Wyznaczyć punkt symetryczny do $2+\mathbf{i}$ względem okręgu o środku w $\mathbf{i}$ i promieniu 3.

11. Udowodnić, że każdy okrąg, przechodziący przez dwa punkty, położone symetrycznie względem danego okregu C, jest ortogonalny do C. Sformułować i udowodnić twierdzenie odwrotne.

12. Niech ℓ_1 będzie gałęzią logarytmu, określoną w $\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]_{\mathbb{R}}$ i przyjmującą wartość 0 w punkcie 1, zaś ℓ_2 – gałęzią logarytmu, zdefiniowaną w $\mathbb{C}\setminus[0,\infty)_{\mathbb{R}}$ i przyjmującą w punkcie -1 wartość $\pi\mathbf{i}$.

a) Obliczyć $\ell_1(z)$ i $\ell_2(z)$ dla $z=\mathbf{i},-\mathbf{i},1-\mathbf{i}$;

b) Wyznaczyć $\lim_{y\to 0}\ell_n(x+\mathbf{i}y)-\ell_n(x-\mathbf{i}y)$ dla $n=1,2$ i $x\neq 0$.

13. W poniższych przypadkach zbadać, czy istnieje funkcja holomorficzna f taka, że $\mathrm{Re}f=u$, a jeśli tak, to wyrazić ją wzorem jako funkcję zmiennej zespolonej z, gdy:

a) $u(x,y)=x^3-3xy^2-3x$, b) $u(x,y)=e^x\sin y$, c) $u(x,y)=\frac{\sin x\cos x}{\cos^2 x+\mathrm{sh}^2 y}$, d) $\mathrm{u}(x,y)=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$, gdzie każda z tych funkcji rozpatrywana jest na zbiorze $U=\mathbb{C}$;

e) u jest jak w d), a $U=\{z:\mathrm{Im}z>0\}$.

Tu, $x:=\mathrm{Re}(z)$ i $y:=\mathrm{Im}(z)$, lecz odpowiedź nie powinna wykorzystywać $\mathrm{Re}(z),\mathrm{Im}(z)$ czy $|z|$.

14. Udowodnić, że gdy funkcja f jest holomorficzna i nie przyjmuje wartości 0, to funkcja $\log|f|$ jest harmoniczna.

15. Niech funkcja f będzie holomorficzna i ograniczona w półpłaszczyźnie $\mathrm{Im}(z)>0$. Udowodnić, że na każdym zbiorze $\mathrm{Im}(z)>c$, gdzie $c>0$, jest ona jednostajnie ciągła. (Wskazówka: formuła Cauchy'ego.)

16. Obliczyć następujące całki (okrąg $|z|=2$ jest zorientowany dodatnio):

a) $\int_{|z|=2}\frac{\cos(z)}{e^{\mathbf{i}z}}dz$; b) $\int_{|z|=2}(e^{\sin(z)}+\overline{z})dz$; c) $\int_0^{2\pi}\frac{1}{2+\cos t}dt$; d) $\int_0^{2\pi}(\cos^3 t+\sin^2 t)dt$; e) $\int_0^{\pi}\mathrm{tg}(t+\mathbf{i})dt$.

17. Niech $f(z)=\frac{1}{z^4}(1+z)\mathrm{ctg(z)}$. (Tu, $\mathrm{ctg}=\cos/\sin$.)

a) Wyznaczyć część główną rozwinięcia Laurenta funkcji f wokół zera.

b) Wyznaczyć wszystkie izolowane punkty osobliwe funkcji f, leżące w dysku $|z|<5$. Dla każdego takiego punktu, określić rodzaj osobliwości: czy jest pozorna, czy istotna, czy też jest biegunem, i jakiego rzędu.

c) Obliczyć $\mathrm{res}_p f$ dla każdego punktu osobliwego p, znalezionego w b).

d) Obliczyć $\int_\Gamma f-\int_\Lambda f$, gdzie Γ to okrąg $|z|=5$, a Λ to okrąg $|z-3/2|=2$ (oba zorientowane dodatnio).

18. a) Rozwinąć w szereg Maclaurina funkcje $1/(z-1),1/(z-2)$ i $1/(z^2-3z+2)$ i podać promienie zbieżności otrzymanych szeregów. (Wskazówka: jaki jest związek ostatniej funkcji z poprzednimi?)

b) Rozwinąć w szereg Laurenta wokół $\mathbf{i}$ funkcję $\mathrm{Log}(z)/(z-\mathbf{i})$, gdzie Log oznacza gałąź logarytmu na otoczeniu punktu $\mathbf{i}$, przyjmującą w $\mathbf{i}$ wartość $\pi\mathbf{i}/2$. Jaki jest pierścień zbieżności tego szeregu? (Mowa o maksymalnym otwartym pierścieniu.)

19. Niech $I_R = \int_{|z|=R} \frac{z^2+9}{z^4+3z^2+2} dz$ dla $R > 2$.

a) Udowodnić, że $|I_R| \leq 2\pi R(R^2+9)/(R^2-1)(R^2-2)$.

b) Udowodnić, że $I_R = 0$ dla $R > 2$.

20. Niech $\gamma(t) = t - \mathbf{i}\sin(t)$ dla $t \in [-\pi, \pi]$.

a) Udowodnić, że każda z funkcji $1/(z+1)$ i $1/(z-1)$ ma funkcję pierwotną w obszarze, zawierającym obraz drogi γ. (Obszary mogą być różne dla różnych funkcji.) Wskazać proponowane obszary i funkcje pierwotne, w tym funkcje wyrazić wzorami nie używającymi znaku całki.

b) Wyznaczyć $\int_\gamma f$, gdzie $f(z) = 2z/(z^2-1)$.

c) Czy $\int_\lambda f = \int_\gamma f$ dla każdej drogi λ z $-\pi$ do π, omijającej -1 i 1? (Odpowiedź uzasadnić i w przypadku odpowiedzi negatywnej wskazać przykład poświadczającej to drogi; starać się też unikać zbędnych rachunków.)

21. Dowieść, że gdy Γ jest ćwiartką okręgu $|z| = 2$, prowadzącą od 2 do $2\mathbf{i}$, to $|\int_\Gamma e^{-iz^2} dz| < 5$. Czy istnieje kontur Λ od 2 do $2\mathbf{i}$, dla którego $|\int_\Lambda e^{-iz^2} dz| = 6$?

22. Niech funkcja f będzie holomorficzna w $\mathbb{C}$ i ograniczona. Dla danych $a, b \in \mathbb{C}$ dowieść, że $\lim_{r\to\infty} \int_{|w|=r} \frac{f(w)}{(w-a)(w-b)} dw = 0$ i używając twierdzenia o residuach dowieść, że funkcja f jest stała (twierdzenie Liouville'a).

23. Niech funkcja f będzie holomorficzna w $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ i ograniczona w $\{z : |z| > 1\}$. Udowodnić, że $f(z) = \frac{1}{2\pi\mathbf{i}} \int_{|z|=1} \frac{zf(w)}{w(z-w)} dw$ gdy $|z| > 1$. Jaka jest wartość prawej strony, gdy $|z| < 1$?

24. Niech $\gamma_r : [0, \pi] \to \mathbb{C}$ oznacza półokrąg $\gamma_r(t) = re^{it}$. Wyznaczyć granicę, jeśli istnieje (por. zadanie 2 z §III.2 notatek do wykładu):

$$\lim_{r\to 0}\left(\int_{\gamma_r} \frac{e^{iz}}{z} dz\right).$$

25. Niech $z \in \mathbb{C}$, $|z| \neq 1$. Zbadać istnienie granicy i jeśli istnieje, wyznaczyć ją

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(e^{2\pi ik/n})}{1 - ze^{-2\pi ik/n}}.$$

26. Udowodnić, że gdy funkcja f jest holomorficzna na odcinku $[a, b] \subset \mathbb{C}$, to $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = t_1 f'(z_1) + t_2 f'(z_2) + t_3 f'(z_3)$ dla pewnych $t_i \in [0, 1]$ i $z_i \in [a, b]$ takich, że $\sum_{i=1}^{3} t_i = 1$.

Zadania, będące powtórzeniem niektórych (ważnych) fragmentów wykładu:

A. Dowieść, że w pierścieniu $P = \{z : 1/2 < |z| < 2\}$ nie istnieje gałąź argumentu.

B. Dowieść, że gdy funkcja holomorficzna f nie przyjmuje żadnej wartości nieujemnej, to $f = g^2$ dla pewnej funkcji holomorficznej g.