# 1 Przykłady biholomorficznych przekształceń na dysk.

**Definicja.** Przekształcenie $f$ nazywamy **biholomorficznym**, jeśli jest bijektywne i zarówno $f$, jak i $f^{-1}$ są holomorficzne. (Dowiedziemy później, że holomorficzność $f^{-1}$ można pominąć, bo wynika ona z pozostałych warunków; obecnie można już z tego korzystać.) Zbiory otwarte $U, V \subset \mathbb{C}$ nazywamy **holomorficznie równoważnymi**, jeśli istnieje biholomorficzne przekształcenie holomorficzne jednego znich na drugi.

Jest widoczne, że holomorficzna równoważność jest relacją równoważności. Przykłady obszarów holomorficznie równoważnych z dyskiem omawiane były na ćwiczeniach. Obejmują one: półpłaszczyzny, soczewki właściwe (w tym półkola i kąty), pasy i półpasy, przecięcia kątów z dyskiem zatoczonym z wierzchołka kąta, elipsy pełne, płaszczyzny z usuniętymi rozłącznymi dwiema półprostymi. Biholomorficzne przekształcenie każdego z tych zbiorów na dysk lub półpłaszczyznę można jawnie wskazać, wykorzystując omawiane w §II.2–II.5 własności homografii, funkcji wykładniczej i funkcji trygonometrycznych. Przypomnijmy pokrótce, jak takie przekształcenia budować.

Nazwijmy **dyskiem w** $\widetilde{\mathbb{C}}$ każdą z dwóch składowych zbioru $\widetilde{\mathbb{C}} \setminus T$, gdzie $T$ jest okręgiem w $\widetilde{\mathbb{C}}$. **Soczewką** w $\widetilde{\mathbb{C}}$ nazwiemy niepusty zbiór, będący częścią wspólną dwóch dysków w $\widetilde{\mathbb{C}}$, których brzegi się przecinają. Jeśli dyski te są półpłaszczyznami, to soczewka jest **pasem** (gdy brzegi półpłaszczyzn są równoległe) lub **kątem** (gdy nie są). Soczewka $S$ jest **właściwa**, gdy $\infty$ nie leży w jej domknięciu.

1) Przekształcenie soczewki właściwej na pas lub kąt. Rozważana soczewka $S$ jest przecięciem dwóch dysków, których brzegi oznaczymy $T_1$ i $T_2$. Obierzmy punkt $p \in T_1 \cap T_2$ i przeprowadźmy go homografią $h(z) = 1/(z-p)$ na $\infty$. Ponieważ okręgi $h(T_1)$ i $h(T_2)$ przechodzą przez $\infty$, więc są one prostymi, zaś $h(S)$ jest kątem lub pasem. Zauważmy, że $h(S) \subset \mathbb{C}$, gdyż $h^{-1}(\infty) = p \notin S$.

2) Przekształcenie pasa lub kąta na półpłaszczyznę. Kąt łatwo jest przeprowadzić na zbiór $K = \{z : 0 < \operatorname{Arg}(z) < \alpha\}$, gdzie $0 < \alpha \leq 2\pi$, a ten gałęzią funkcji $z \mapsto z^{\pi/\alpha}$ na półpłaszczyznę $\Pi_+ = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$. (Gałąź ta na $K$ istnieje, bo $K \cap [0, \infty) = \emptyset$, a na $\mathbb{C} \setminus [0, \infty)$ określona jest gałąź logarytmu.) Natomiast pas przeprowadźmy funkcją liniową na pas poziomy $\{z : 0 < \operatorname{Im} z < \alpha\}$, gdzie $\alpha \leq 2\pi$, a ten funkcją exp na kąt $\{z : 0 < \operatorname{Arg} z < \alpha\}$. Gdy zadbać o to, by $\alpha = \pi$, to w obrazie otrzymamy półpłaszczyznę $\Pi_+$; gdy zaś $\alpha = 2\pi$, to otrzymamy kąt pełny $\mathbb{C} \setminus [0, \infty)_{\mathbb{R}}$.

3) Przekształcenie wycinka koła lub półpasa. „Półpas" $\{z : 0 < \operatorname{Im} z < \alpha, \operatorname{Re} z < c\}$ przy przekształceniu exp przejdzie na wycinek koła $\{z : |z| < \mathrm{e}^c, 0 < \operatorname{Arg} z < \alpha\}$, a ten z kolei gałęzią funkcji $z \mapsto z^{\pi/\alpha}$ przeprowadzić możemy na półkole (a wiec na soczewkę).

4) Przekształcenie półpłaszczyzny na dysk. Gdy półpłaszczyzną jest $\Pi_+ = \{z : \operatorname{Im}(z) > 0\}$, zaś dysk jest jednostkowy i o środku w 0, to przekształcenie możemy zadać dowolnym ze wzorów opisanych w zadaniu 5a) w §II.2, np. $f(z) = (z - \mathrm{i})/(z + \mathrm{i})$.

5)* Przekształcenie płaszczyzny bez dwóch współliniowch półprostych domkniętych. Przez podobieństwo postaci $az+b$ sprowadzamy rzecz do przypadku, gdy półprostymi tymi są $L_1 = [1,\infty)_{\mathbb{R}}$ i $L_2 = (-\infty,-1]_{\mathbb{R}}$. Wtedy jednak przekształcenie Żukowskiego $f(z) = \frac{1}{2}(z+z^{-1})$ biholomorficznie przeprowadza $\mathbb{C}\setminus(L_1 \cup L_2)$ na półpłaszczyznę $\mathrm{Im}(z) > 0$; patrz zad. 3 w §I.1.

Każdy z powyższych zbiorów możemy na inny z nich przeprowadzić złożeniem opisanych przekształceń lub ich odwrotności. Należy też pamiętać o tym, że spośród użytych wyżej przekształceń, tylko funkcje wymierne (w tym funkcja Żukowskiego) przedłużają się w sposób ciągły na sferę Riemanna $\widetilde{\mathbb{C}}$, a tylko homografie są na $\widetilde{\mathbb{C}}$ różnowartościowe. Zaś gałęzie funkcji $z^s$, dla $s \notin \{0,1\}$, choć przedłużają się w sposób ciągły na punkt 0, to nie są różnowartościowe w żadnym jego otoczeniu.