FA, jesień 2013. Zadania domowe, grupa 3 (prowadzący H. Toruńczyk).

Uwaga a) W każdym zadaniu można korzystać z poprzednich jego części i innych zadań, nawet, jeśli się ich nie rozwiązało.

b) Gdy nie zaznaczono inaczej, zadania są ustne – nie wymaga się oddania na piśmie. Zgłaszać można rozwiązania całych zadań lub ich części, w tym nieomawianych dotąd zadań z serii ubiegłych. (Zadania, dyskutowane już na ćwiczeniach, staram się zaznaczyć plusem.) Zadania są bardzo nierównej trudności.

Proszę się nie zrażać duża ilością zadań–najwyżej pewne z nich „spadną" na dalsze ćwiczenia. Osoby, zgłaszające rozwiązanie jakiegoś zadania, proszę też o przygotowanie jego zwięzłej prezentacji – aby na ćwiczeniach wszyscy mogli z niej skorzystać, lecz by nie zabierała nadmiernie dużo czasu. Standardowe rachunki w czasie prezentacji można pomijać, lecz powinno być jasne, co należy policzyć i co z tego wychodzi; ponadto referujący powinien sam ocenić, które rachunki (czy rozumowania) są standardowe, a które zawierają istotne pomysły, wymagające przedstawienia.

Pierwsza porcja zadań (na poniedziałek, 14 X) i zadanie 0 z ćwiczeń.

0. + Niech $z_0 \in U \subset \mathbb{C}$, gdzie U jest zbiorem otwartym. Dla funkcji $f : U \to \mathbb{C}$ dowieść, że gdy istnieje pochodna $f'(z_0)$, to istnieje i pochodna funkcji $g(z) := \overline{f(\overline{z})}$ w punkcie $\overline{z_0}$.

1. Fragmenty zadania 21 w §1.1 u Krzyża: podać geometryczną interpretację geometryczną zbiorów liczb zespolonych: a) $\{z : \mathrm{Re}(\mathbf{i}z) \in [0,1)\}$, b) $\{z : \mathrm{Re}(z^2) > c\}$, gdzie $c > 0$; c) $\{z : |z| + \mathrm{Re}z \leq 1\}$.

2. + Dowieść, że gdy $\mathrm{Re}u < 0$ i $\mathrm{Re}v < 0$, to $|u - v| < |u + \overline{v}|$. (Zaleźć dowód analityczny i geometryczny.)

3. (To zadanie zaczęto) Dowieść, że gdy $|p| = P < 1$ i $|q| = Q < 1$, to $\frac{|P-Q|}{1-PQ} \leq \frac{|p-q|}{|1-\overline{p}q|} \leq \frac{P+Q}{1+PQ}$. (Wskazówka: mnożąc p i q przez liczbę P/p sprowadzić zadanie do przypadku, gdy $p = P$ i $q = Q(\cos\varphi + \mathbf{i}\sin\varphi)$. Wyrazić kwadrat środkowego członu nierówności jako funkcję zmiennej φ i dowieść, że ma ona ekstrema tylko gdy $\sin\varphi = 0$.)

4. Dla $z_1, ..., z_k \in \mathbb{C}$ jest $|\prod_n (1 + z_n) - 1| \leq \prod_n (1 + |z_n|) - 1 \leq \exp(\sum_n |z_n|) - 1$.

5. + (na bazie zadania z 53 Olimpiady Matematycznej). Na bokach ab i ac trójkąta abc zbudowano po jego zewnętrznej stronie kwadraty $abde$ i $acfg$. Punkty p i q to środki odcinków dg i ef. Dowieść, że odcinki pq i bc są równoległe i wyznaczyć możliwe wartości stosunku ich długości. Uogólnić to na przypadek, gdy $abde$ i $acfg$ są podobnymi trapezami równoramiennymi, z odpowiadającymi sobie przy podobieństwie podstawami ab i ac.

6. + a) Niepusty zbiór zadany w $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ równaniem $kx^2 + ky^2 + px + qy + c = 0$, gdzi $k, p, q, c \in \mathbb{R}$, jest prostą lub punktem lub okręgiem

b) Każdą prostą i każdy okrąg w $\mathbb{C}$ można zadać równaniem takiej postaci.

c) Wywnioskować, że przekształcenie $z \mapsto 1/z$ przeprowadza każdy zbiór, będący prostą lub okręgiem, na zbiór, który też jest prostą lub okręgiem.

7. * + Niech $f(z) = \frac{1}{2}(z + z^{-1})$ dla $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Udowodnić, że funkcja f przekształca w sposób różnowartościowy zbiory $\{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$ i $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\}$ na $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$, zaś zbiór $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) > 0\}$ na $(\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}) \cup (-1, 1)$. (Wskazówka: wyznaczyć obraz $f(\partial X)$ brzegu ∂X rozważanego zbioru X i dowieść, że dla $w \notin f(\partial X)$ równanie $z + z^{-1} = 2w$ ma dwa rozwiązania z_1, z_2; z nich jedno należy do X, bo $z_1 z_2 = 1$.)

Druga porcja zadań (na poniedziałek, 21 X) wraz z zadaniami z ćwiczeń 14 X.

1. + a) Ogólne przekształcenia Möbiusa są ciągłe (jako przekształcenia z $\widetilde{\mathbb{C}}$ do $\widetilde{\mathbb{C}}$).

b) Złożenie homografii i antyhomografii (w dowolnej kolejności) jest antyhomografią, podobnie jak odwrotność antyhomografii, a złożenie dwóch antyhomografii jest homografią. (Wskazówka: gdy f jest antyhomografią, to $f = s \circ h$, gdzie h jest homografią.)

c) Żadna homografia nie jest antyhomografią.

2. + Każde ogólne przekształcenie Möbiusa jest złożeniem kilku przekształceń, wśród których występują tylko podobieństwa płaszczyzny (przedłużone na $\widetilde{\mathbb{C}}$) i homografia $z \mapsto 1/z$.

Definicja. **Okręgiem w** $\widetilde{\mathbb{C}}$ jest każdy okrąg w $\mathbb{C}$ i każdy zbiór postaci $L \cup \{\infty\}$, gdzie L jest prostą.

3. + i) Ogólne przekształcenie Möbiusa przeprowadza okręgi w $\widetilde{\mathbb{C}}$ na okręgi w $\widetilde{\mathbb{C}}$.

ii) Każdy okrąg w $\widetilde{\mathbb{C}}$ można homografią przeprowadzić na oś $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

Definicja. Dla przekształcenia $f : \widetilde{\mathbb{C}} \to \widetilde{\mathbb{C}}$ przyjmijmy $\mathrm{Fix}(f) := \{p \in \widetilde{\mathbb{C}} : f(p) = p\}$.

4. + **Symetrią** względem okręgu $T \subset \widetilde{\mathbb{C}}$ nazywamy ogólne przekształcenie Möbiusa s_T, którego T jest zbiorem punktów stałych (tzn. $T = \mathrm{Fix}(s_T)$). Dowieść, że symetria s_T istnieje i jest jedyna,[1] na następującej drodze:

a) Gdy $T = \{\infty\} \cup \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im} z = 0\}$, to za s_T można przyjąć tylko odbicie $z \mapsto \overline{z}$ względem osi T. Gdy zaś $T = \{z : |z| = 1\}$, to $z \mapsto 1/\overline{z}$ spełnia żądany warunek. (Oba przekształcenia przedłużamy na ∞.)

b) Gdy $h : \widetilde{\mathbb{C}} \to \widetilde{\mathbb{C}}$ jest bijekcją, to $\mathrm{Fix}(h \circ f \circ h^{-1}) = h(\mathrm{Fix}(f))$.

c) Gdy ogólne przekształcenie Möbiusa h przeprowadza okrąg T_1 na T_2 i s_2 jest symetrią względem T_2, to $h^{-1} \circ s_2 \circ h$ jest nią względem T_1. Stąd i z a) uzyskać tezę w oparciu o **3** ii).

d) Dowieść też, że s_T jest **inwolucją**, tzn. złożenie $s_T \circ s_T$ jest identycznością.

Uwaga 1. Na ćwiczeniach odnotowano następującą konsekwencję części c): ogólne przekształcenie Möbiusa h przeprowadza pary punktów, symetryczne względem okręgu S, na pary symetryczne względem okręgu $h(S)$.

5. + a) Homografia h_A ma pewien punkt stały, a jeśli ma ich więcej niż 2 to jest identycznością, zaś macierz A jest postaci λI ($\lambda \in \mathbb{C}$).

b) Gdy homografie h_A i h_B w są równe w 3 punktach, to macierze A i B są proporcjonalne i $h_A = h_B$. (Wskazówka: przy $B = I$ wynika to z b); wykorzystać to, że $h_{XY} = h_X \circ h_Y$.)

c) Gdy h jest homografią i $\mathrm{Fix}(h) = \{\infty\}$, to $h(z) = z + b$ dla pewnego $b \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

d) Gdy h jest homografią i $\mathrm{Fix}(h) = \{0, \infty\}$, to $h(z) = az$ dla pewnego $a \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$.

6. (To zadanie chyba uznano za rozwiązane od strony rachunkowej, ale chyba też nie udzielono odpowiedzi na pytanie „dla jakich z szereg jest zbieżny na pewnym otoczeniu punktu z”– warto do tego powrócić.)

Dla następujących szeregów

a) $\sum_{n=1}^{\infty} nz^n$, b) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 z^n$, c) $\sum_{n=1}^{\infty} n^3 z^n$, d) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{z^n}{n(n-1)}$,

wyjaśnić, dla jakich z szereg jest zbieżny na pewnym otoczeniu punktu z, oraz dla tych z wyrazić sumę szeregu jawnym wzorem.

7. Zadanie 4.2.2 w zbiorze J. Krzyża.

8. Zadanie 4.2.4 w zbiorze J. Krzyża.

[1] W geometrii, s_T nazywane jest **inwersją względem** T, lecz w analizie zespolonej ten termin miewa inne znaczenie.

Trzecia porcja zadań (na poniedziałek, 28 X).

1. Na jaki zbiór homografia $h(z) = (z-i)/(z+i)$ przeprowadza „soczewkę", będącą częścią wspólną kół $|z-1| < \sqrt{2}$ i $|z+1| < \sqrt{2}$?

2. Niech p_1, p_2, p_3 i q_1, q_2, q_3 będą trójkami różnych liczb zespolonych. Wówczas:

a) Istnieje jedyna homografia h taka, że $h(p_1) = 0, h(p_2) = \infty$ i $h(p_3) = 1$; jest nią $h(z) = k(z-p_1)/(z-p_2)$, gdzie $k = (p_3-p_2)/(p_3-p_1)$.

b) Istnieje jedyna homografia h taka, że $h(p_i) = q_i$ dla $i = 1, 2, 3$. (Wskazówka: $h = h_2^{-1} \circ h_1$, gdzie h_1 i h_2 konstruuje się w oparciu o a).)

c) Gdy w jest obrazem danego punktu z przy powyższej homografii h, to $\frac{p_3-p_2}{p_3-p_1} \cdot \frac{z-p_1}{z-p_2} = \frac{q_3-q_2}{q_3-q_1} \cdot \frac{w-q_1}{w-q_2}$. (Wskazówka: $h_2 \circ h = h_1$.)

d)* Homografia zachowuje **dwustosunek** $[p_1, p_2, p_3, p_4] := \frac{p_3-p_1}{p_3-p_2} : \frac{p_4-p_1}{p_4-p_2}$ czwórki punktów.

3. * Niech s oznacza symetrię względem okręgu $T \subset \mathbb{C}$, mającego środek w p. Dowieść, że jeśli funkcja zespolona f ma pochodną $f'(q)$ w punkcie $q \neq p$, to funkcja $s \circ f \circ s$ ma ją w punkcie $s(q)$. (Wskazówka: zadania 0 w serii 1 oraz 3 i 4 w serii 2.)

4. a) Rozwinąć w szereg Maclaurina w otoczeniu zera funkcję $\frac{z}{1-z}$.

b) Obliczyć współczynnik przy z^3 szeregu Maclaurina funkcji $\sin(\frac{z}{1-z})$.

5. Niech $f(z) = \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}z + \frac{1}{3!}z^2 + ...$ Funkcję $1/f$ rozwijamy w szereg $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n$.

a) Wyznaczyć trzy pierwsze **liczby Bernoulliego** B_0, B_1, B_2.

b) Dowieść zależności rekurencyjnej $B_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k$ dla $n \geq 2$.

6. + a) Kiedy $\cos z \in \mathbb{R}$?

b) Jaki jest zbiór wartości funkcji $\mathrm{tg} := \sin / \cos$?

7. a) + Gdy $f \in \{\exp, \cos, \sin\}$, to $|f(z)| \leq e^{|z|}$ dla $z \in \mathbb{C}$.

b) + Rozważmy kwadrat o środku w 0 i boku równoległym do osi rzeczywistej. Dowieść, że jeśli długość $2N+1$ jego boku jest liczbą nieparzystą, to na brzegu kwadratu funkcja $\mathrm{ctg}(\pi z)$ jest (co do modułu) ograniczona stałą niezależną od N.

Czwarta porcja zadań (na poniedziałek, 4 XI).

1. Przeprowadzić bihlomorficznie wycinek koła $\{z : |z| < 1 \text{ i } \mathrm{Arg}z \in (0, \pi/3)\}$ na półkole $\{z : |z| < 1 \text{ i } \mathrm{im}(z) > 0\}$, a to półkole na koła $|z| < 1$. Przeprowadzić któryś z tych zbiorów biholomorficznie na pas $\{z : \mathrm{Im}z \in (0, 1)\}$. (Wskazówka: poczytać o funkcji wykładniczej i logarytmicznej; patrz też plik bihlom.pdf, wywieszony w takalogu Wyk.)

2. + Przeprowadzić biholomorficznie zbiór $\{z : \mathrm{Im}z < 1 \text{ i } |z| > 1\}$ na pas $\{z : 0 < \mathrm{Im}z < 1\}$ i na koło $|z| < 1$. (Wskazówka: zastanowić się, który punkt warto homografią przeprowadzić na ∞.)

3. Niech $D = \{z : |z| < 1\}$ i $\Pi_+ = \{z : \mathrm{Im}(z) > 0\}$.

a) Gdy homografia h przeprowadza Π_+ na D, to $h(z) = k(z-a)/(z-\bar{a})$, gdzie $a \in \Pi_+$ i $|k| = 1$. (Wskazówka: jeśli h ma wymaganą własność i $a = h^{-1}(0)$, to $h(\overline{a}) = \infty$ na podstawie uwagi 1 w serii 2.)

b) Gdy homografia h przeprowadza D na D, to $h(z) = k\frac{z-a}{1-z\overline{a}}$, gdzie $a \in D$ i $|k| = 1$. (Wskazówka: jak wyżej, lecz tym razem $h(1/\overline{a}) = \infty$.)

c) Odwrotnie, gdy homografia h jest opisana jednym z tych wzorów, to spełnia warunek $h(\Pi_+) = D$ czy $h(D) = D$, odpowiednio. (Wskazówka do przypadku, gdy wzór jest jak w b): z zadania z pierwszych ćwiczeń wynika, że $h(\partial D) = \partial D$ i $h(D) \subset D$.)

d)* Jaka jest postać homografii przeprowadzających Π_+ na Π_+?

4. Zadanie 4.5.3 u Krzyża: rozwinąć $(z^2-1)/((z+2)(z+3))$ w szereg Laurenta w pierścieniu i) $2<|z|<3$, ii) $|z|>3$.

UWAGA: więcej zadań nie daję – proszę przeczytać plik biholom.pdf w katalogu Wyk i przemyśleć zadania zaległe. Ogłaszam też KONKURSY na możliwie przejrzyste (pisemne) przedstawienie rozwiązań zadań 7b) i 3* z serii 3. Rozwiązania można przesyłać e-mailem do 12.00 w poniedziałek 4 XI.

Piąta porcja zadań (na poniedziałek, 18 XI.)

UWAGA: ponieważ 11 XI zajęć nie ma, to 12 XI DOPISZĘ JESZCZE SERIĘ 6 – też na 18 XI. Brakujące definicje są u Krzyża na str. 3. Utożsamiamy $x+\mathbf{i}y\in\mathbb{C}$ z $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

1. a) Udowodnić, że jeśli funkcja f jest analityczna w zbiorze U i $0\notin \mathrm{im}(f)$, to funkcja $\ln|f|$ jest harmoniczna w U. Czy jest jakiś związek tego zadania z wnioskiem 2 na str. 9 notatek?

b) Udowodnić, że jeśli funkcja u jest harmoniczna w U, to funkcja $u_x-\mathbf{i}u_y$ jest w U holomorficzna.

Poniższe zadania dotyczą znajdywania funkcji holomorficznej f o zadanej części rzeczywistej u lub urojonej v. Warunkiem koniecznym istnienia f jest harmoniczność u wzgl. v. Sposób znajdywania wynika z dowodu twierdzenia 3 na str. 30 notatek; omówię go na przykładzie. Niech $u=x^2-y^2+xy$. Wówczas $u_x=2x+y$, $u_y=-2y+x$. Jeśli żądana funkcja f istnieje, to $f'(x+\mathbf{i}y)=u_x(x,y)-\mathbf{i}u_y(x,y)=2x+y-\mathbf{i}(-2y+x)$. Warto prawą stronę jawnie wyrazić jako funkcję zmiennej $z=x+\mathbf{i}y$, bez użycia części rzeczywistej x i urojonej y. Często wygodnie jest wprost podstawić w tym celu $z=x$ i $y=0$ do poprzednich wzorów, bo $z=x+\mathbf{i}0$ na osi $y=0$. Otrzymamy wzór $f'(z)=2z-\mathbf{i}z$ na pochodną f'. Stąd wynika bez trudu, że $f(z)=(2-\mathbf{i})z^2+C$ jest „kandydatem” na szukaną funkcję f. Na koniec sprawdzamy, że jego częścią rzeczywistą jest $2x+y+\mathrm{Re}C$, tzn musimy jeszcze żądać, by stała C była czysto urojona, by otrzymać pełne rozwiązanie zadania: $f(z)=(2-\mathbf{i})z^2+c\mathbf{i}$, gdzie $c\in\mathbb{R}$.

Inny sposób polega na ułożeniu w oparciu o równania C-R układu $v_x=2x+y$, $v_y=2y-x$ i znalezieniu rozwiązania $v=2xy+\frac{1}{2}y^2-\frac{1}{2}x^2+c$, a następnie na wyrażeniu $u+\mathbf{i}v$ jako funkcji zmiennej $z=x+\mathbf{i}y$ (co ponownie można uzyskać przez opisane podstawienie). Warto pokusić się też o sprawdzenie, czy uzyskana funkcja ma żądaną własność. (Może się zdarzyć, że rozwiązań brak.)

2. Znaleźć postać ogólną funkcji holomorficznej $f=u+v\mathbf{i}$, wiedząc że (odpowiednio):
a) $u(x,y)=2xy+3x$, b) $v=e^x(y\cos y+x\sin y)+x+y$.

3. Proszę rozwiązać części i) i iii) lub ii) i iv) zadania 2.2.10 ze zbioru J. Krzyża.

4. Zadanie 2.2.13 ze zbioru Krzyża.

5. Przekształcić biholomorficznie zbiór $x>0, y>0$ na dysk $|z|<1$ tak, by punkt $(1,1)$ przeszedł na środek koła.

6. * a) (Denjoy, Wolff.) Nazwijmy przekształcenia $f,g:\widetilde{\mathbb{C}}\to\widetilde{\mathbb{C}}$ **homograficznie sprzężonymi**, jeśli $g=h\circ f\circ h^{-1}$ dla pewnej homografii h. Dowieść, że każda homografia jest tak sprzężona bądź z przesunięciem, bądź z przekształceniem, będącym złożeniem obrotu wokół 0 i jednokładności o środku w 0. (Wskazówka: **5** z serii 2 – lub tw. Jordana z GAL-u.)

b) Wywnioskować, że gdy homografia f nie jest (homograficznie) sprzężona z obrotem, to istnieją punkty $p,q\in\widetilde{C}$ takie, że $\lim_{n\to\infty}f^n(z)=p$ i $\lim_{n\to\infty}f^{-n}(z)=q$ dla każdego $z\in\widetilde{\mathbb{C}}$; jeśli przy tym $p=q$, to jest ona sprzężona z przesunięciem i vice versa. Jak scharakteryzować przypadek obrotu? (Tu, f^n i f^{-n} to n–te iteracje przekształceń f i f^{-1}, odpowiednio.)

Szósta porcja zadań (na poniedziałek, 18 XI.)

1. + Niech $f(z) = \frac{1}{z^4}(1+z)\mathrm{ctg(z)}$. (Tu, $\mathrm{ctg} = \cos/\sin$.)

a) Wyznaczyć część główną rozwinięcia Laurenta funkcji f wokół zera.

b) Wyznaczyć residuum funkcji f w każdym puncie dysku $|z-1-i| < 4$, w których funkcja f nie jest określona. (**Residuum** funkcji f w punkcie p to współczynnik przy $(z-p)^{-1}$ w jej rozwinięciu Laurenta w pierścieniu $|z-p| < \varepsilon,\ \ z \neq p$.)

Wskazówka: dla $p = 0$, na ćwiczeniach znaleziono całą część główną szeregu Laurenta, a więc trzeba wziąć jej odpowiedni współczynik. Gdy $p \neq 0$, patrz uwaga 2 na str. 12 notatek do wykładu.

2. + Powtórzyć poprzednie zadanie, przy a) $f(z) = \frac{e^z}{z^2(z-1)}$ i b) $f(z) = \frac{e^{\pi z}}{1+z^2}$

3. + Zadania 4.5.7 i 4.5.8 ii) z Krzyża –omówiono na ćwiczeniach.

4. + Niech $E_n(z) := (1-z)\exp(z + \frac{1}{2}z^2 + ... + \frac{1}{n}z^n)$ dla $z \in \mathbb{C}$ i $n \in \mathbb{N}$. Dowieść, że

a) $E_n'(z) = -z^n \exp(z + \frac{1}{2}z^2 + ... + \frac{1}{n}z^n)$.

b) Gdy $|z| < 1$, to $|E_n(z) - 1| \leq |z|^{n+1}$. (Wskazówka: z a) wywnioskować, że wszystkie współczynniki szeregu Maclaurina funkcji $-E_n'$ są nieujemne; dalej dowieść tego o $1 - E_n$ i o $\varphi(z) := (1-E_n(z))/z^{n+1}$, co da $|\varphi(z)| \leq \varphi(1) = 1$ gdy $|z| \leq 1$.)

5. a) Zadanie 3.1.10 ze zbioru Krzyża.

b) Udowodnić, że gdy f jest funkcją dwóch zmiennych rzeczywistych, ciągłą na okręgu $\partial D = \{z : |z| = 1\}$, to $\int_{\partial D} \frac{1}{\mathbf{i}z}\ f(\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z}), \frac{1}{2\mathbf{i}}(z-\frac{1}{z}))\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} f(\cos t, \sin t)\mathrm{d}t$.

6. Wyznaczyć następujące całki krzywoliniowe (gdzie można, starać się ułatwić sobie zadanie, korzystając z udowodnionych lub sformułowanych na wykładzie twierdzeń):

a) $\int_\Gamma \sin(2z+1)\mathrm{d}z$, gdzie Γ jest łamaną $[0, 1, \mathbf{i}]$.

b) $\int_\Gamma z\sin(z)dz$, gdzie Γ jest jak wyżej.

c) $\int_\Gamma \frac{1}{z-z_0}dz$, gdzie Γ jest dodatnio zorientowanym brzegiem kwadratu o wierzchołkach $z_0 \pm a \pm ai$ (wszystkie kombinacje znaków).

7. + a) Udowodnić twierdzenie Weierstrassa o wartości średniej: jeśli F jest funkcją pierwotną funkcji $f : U \to \mathbb{C}$ i odcinek $[u, w]$ jest zawarty w U, to ma miejsce równość $F(u) - F(w) = (u-w)z_0$ dla pewnego punktu z_0 z otoczki wypukłej zbioru $f([u, w])$. (Otoczką tą jest $\{t_1z_1 + ... + t_nz_n : n \in \mathbb{N}, z_1, ..., z_n \in f([u, w]), t_1, ..., t_n \in [0, 1]$ i $\sum_i t_i = 1\}$; można przyjąć bez dowodu, że jest to zbiór domknięty.)

b) Wywnioskować, że jeśli U jest zbiorem wypukłym, to funkcja holomorficzna $F : U \to \mathbb{C}$, spełniająca warunek $\mathrm{Re}(F'(z)) > 0$ dla każdego punktu $z \in U$, jest różnowartościowa.

c) Użyć tego do dowodu, że funkcja $z + e^z$ jest różnowartościowa w półpłaszczyźnie $\mathrm{Re}(z) < 0$.

Siódma porcja zadań (na poniedziałek, 25 XI.)

0. (Rozwiązano na ćwiczeniach.) Dowieść, że gdy wielomiany f i g spełniają warunek $\deg g > \deg f + 1$, to $\int_{\partial D} f/g = 0$ dla każdego dysku D, zawierającego wszystkie zera wielomianu g.

1. a) Udowodnić, że dla funkcji f, holomorficznej w kole $\overline{D}(z_0, r)$, zachodzi równość Gaussa o wartości średniej: $f(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it})dt$. (Wskazówka: wzór całkowy Cauchy'ego.)

b) Dowieść tej równości dla rzeczywistej funkcji u, harmonicznej w otoczeniu koła $\overline{D} := \overline{D}(z_0, r)$. (Wskazówka: $u = \mathrm{Re}f$ dla pewnej funkcji f, homorficznej w $\overline{D}$ – uzasadnienie podane jest w notatkach do wykładu, ale należy je umieć przedstawić.)

c) Wykorzystać b) do wyznaczenia $\int_0^{2\pi} \ln|re^{it} + z_0|dt$, gdzie $z_0 \in \mathbb{C}$ i $r < |z_0|$. (Por. zadanie 1a) serii 5.)

2. + Obliczyć $\int_\Gamma f(z)\mathrm{d}z$, gdy $f(z) = e^z \cos z \sin z/(1+z^2)$ i Γ jest zorientowanym dodatnio:

a) okręgiem o środku w $1+i$ i promieniu $3/2$. (Wskazówka: wzór całkowy Cauchy'ego.)
b) brzegiem prostokąta o wierzchołkach $-1/2, 1, 1+2i, (-1/2)+2i$.

3. Obliczyć + a) $\int_{\partial D(0,2)} \frac{2z^9+1}{z^{10}-1} \mathrm{d}z$, b) $\int_{\partial D(0,2)} \frac{z^{100}+2z^9}{z^{10}-1} \mathrm{d}z$
(Wskazówka: Istnieje związek między tymi całkami! W a) wykorzystać rozumowanie z zadania 0 –zastąpić okrąg $D(0,2)$ przez okrąg o dużym promieniu r. Ogólniej, można tak policzyć $\int_{\partial D(0,2)} \frac{g}{h}$ gdy wielomiany g, h sełniają warunek $\deg(g) = \deg(h) - 1$ i $h^{-1}(0) \subset D(0,2)$.)

4. + Funkcję $f(z) = z^{3/2}/[(z-1)^3 \sin(z-1)]$ rozwijamy wokół punktu $p = 1$ w szereg Laurenta w pierścieniu $D(p, \epsilon) \setminus \{p\}$. Wyznaczyć część główną tego rozwinięcia. Ile wynosi $\mathrm{res}_p f$?

Ósma porcja zadań (na poniedziałek, 2 XII.)

Proszę przejrzeć zadania zaległe i zadania przygotowawcze!

1. Wyznaczyć residua funkcji f w punktach, w których nie jest ona określona, gdy
a) $f(z) = \frac{\cos z}{(z-i)^2}$
b) $f(z) = \frac{z}{\cos z - 1}$
c) $f(z) = \exp(z + \frac{1}{z})$. (Odpowiedź może być wyrażona przy pomocy szeregu.)

2. Korzystając z twierdzenia o residuach, obliczyć $\int_\Gamma f$, gdy
a) $f(z) = 1/(1+z^4)$ i Γ jest zorientowanym dodatnio konturem o równaniu $x^2 + y^2 = 2x$,
b) $f(z) = 1/(z-1)^2(z^2+1)$ i Γ jest zorientowanym dodatnio konturem o równaniu $x^2+y^2 = 2x+2y$.

3. Obliczyć $\int_0^{2\pi} a(t)\mathrm{d}t$, gdy
a) $a(t) = c + \cos t$, gdzie $c > 1$,
b) $a(t) = \sin^2 t/(a + b\cos t)$, gdzie $a > b > 0$.

4. Niech funkcja f będzie holomorficzna w $\mathbb{C}$ i ograniczona. Dla danych $a, b \in \mathbb{C}$ dowieść, że $\lim_{r\to\infty} \int_{|w|=r} \frac{f(w)}{(w-a)(w-b)} dw = 0$ i używając twierdzenia o residuach lub twierdzenia Cauchy'ego dowieść, że funkcja f jest stała (twierdzenie Liouville'a).

Dziewiąta porcja zadań (na poniedziałek, 9 XII.)
W związku z klokwium daję mało zadań.

1. Przeczytać to, co jest na str. 43 notatek do wykładu, pomijając warunek ii) w twierdzeniu 1, i obliczyć całki niewłaściwe $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$, gdy
a) $f(x) = \frac{x}{x^4+6x^2+13}$
b) $f(x) = \frac{x^2}{(x^2+a^2)^3}$, gdzie $a > 0$,
c) $f(x) = \frac{e^{ax}}{1+e^x}$, gdzie $a \in (0,1)$.

2. Przeczytać też sformułowanie części ii) twierdzenia 1 i obliczyć $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+a^2}\mathrm{d}x$, gdzie $a > 0$. (Wskazówka: zająć się funkcją $g(z) = e^{iz}/(z^2+a^2)$; wówczas $f = \mathrm{Re}(g)$ na osi $\mathbb{R}$.)

Dziesiąta porcja zadań (na poniedziałek, 16 XII.)

1. W oparciu o twierdzenia 1–4 z §IV.6 notatek do wykładu, zbadać zbieżność i wartość następujących całek i sum szeregów:
a) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$, gdzie $f(x) = x^2/(x^2+1)(x^2+2x+2)$. (Odp.: $3\pi/5$.)

b) $\int_0^{2\pi} f(t)\mathrm{d}t$, gdzie $f(t) = \frac{\cos 3t}{5-4\cos t}$. (Odp.: $\pi/12$.)
c) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$, gdzie $f(x) = \frac{x\sin x}{x^2+4x+20}$.
d) $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-4}$.
e) $\sum_{n=1}^{\infty}(n^2 - w^2)^{-1}$, gdzie liczba $w \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ jest dana.
f) $\sum_{n\in\mathbb{Z}}(n-w)^{-2}$, gdzie liczba $w \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ jest dana.

2. Dla każdej z następujących funkcji, opisać wszystkie jej osobliwości izolowane w $\mathbb{C}$ (gdzie są, które są z nich są pozorne, które osobliwościami istotnymi, a które biegunami –i którego rzędu):
a) $f(z) = (2\cos z - 2 + z^2)^{-1}$ (tu wyjątowo zbadać tylko punkt osobliwy 0);
b) $f(z) = z^2(1+z^2)^{-1}\exp(1/z)$;
c) $f(z) = (1+e^z)/(1-e^z)$;
d) $f(z) = \exp(z/(1-z))$;
e) $f(z) = (e^z - 1)\exp(1/(1-z))$.

Jedenasta porcja zadań (na poniedziałek, 13.I. 2014r.)

Zadań daję dużo, bo jest bardzo długa przerwa, a po niej już bardzo niewiele ćwiczeń! Zadania podobne do poniższych mogą pojawić się na egzaminie i lepiej ich przemyślenia nie odkładać na ostatnie 2 ćwiczenia – tym bardziej, że jedne z nich wypadaja już w tygodniu sesji egzaminacyjnej.

1. Dowieść, że dla dostatecznie dużych n funkcja $f_n(z) := 1 + z + z^2/2! + ... + z^n/n!$ nie ma zer w dysku $|z| < 10^{2014}$.

2. 3.9.2 u Krzyża.

3. Niech $\lambda \in (1,\infty)_{\mathbb{R}}$. Dowieść, że równanie $e^z - z = \lambda$ ma w półpłaszczyźnie $\mathrm{Re}z \leq 0$ dokładnie jedno rozwiązanie. (Wskazówka: zastąpić wpierw półpłaszczyznę przez półkole $|z| \leq R, \mathrm{Im}(z) \leq 0$, dla R dostatecznie dużego.)

4. Udowodnić, że wielomian $f(z) = z^7 + 6z^4 + 1$ ma w półpłaszczyźnie $\mathrm{Re}(z) > 0$ cztery pierwiastki. (Wskazówka: rozumować podobnie jak w rozwiązywanym na ćwiczeniach zadaniu 3.9.7 z Krzyża; skorzystać z tego, że dla $z \in \mathbf{i}\mathbb{R}$ jest $\mathrm{Re}(f(z)) \geq 1$.)

5. Zadanie 3.9.6 u Krzyża.

6. * a) Niech $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Dowieść, że dla dostatecznie dużych n liczba rozwiązań równania $\mathrm{tg}(z) = cz$ w kwadracie $|\mathrm{Re}z| \leq \pi n, |\mathrm{Im}z| \leq \pi n$ wynosi $2n+1$ (uwzględniając krotności). Posłużyć się twierdzeniem Rouchego jak następuje: przyjąć $f(z) = \mathrm{tg}(z) - cz, g(z) = cz$, dowieść, że $N_{f,K} = N_{g,K}$, gdzie K to nasz dostatecznie duży kwadrat, i wyznaczyć liczbę $B_{f,K}$ biegunów funkcji f w K.
b) Gdy $c = 1$ dowieść, że wszystkie te rozwiązania są rzeczywiste i zbadać ich krotności. (Wskazówka jest przy zadaniu 3.9.16 u Krzyża.)

7. + Dowieść, że gdy funkcja f jest holomorficzna w kole $\overline{D}$ o środku w p, to $f(D) \supset D(f(p), R)$ dla $R := \mathrm{dist}(f(p), f(\partial D))$.

8. Przemyśleć zadanie 1 z §IV.6 notatek do wykładu i użyć je do obliczenia $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1}$.

9. + Obliczyć $\int_0^{\infty} \frac{x^{1/3}}{x^2+1}dx$ używając twierdzenia o residuach.
Uwaga: Zadanie to jest trudniejsze od wcześniejszych, dotyczacych wyznaczania całek. Podobne jest rozwiazane w notatkach Tao, week 10, strony 1–8. Chodzi więc o adaptację tamtego rozwiązania– a jeśli to się nie powiedzie, to choć o zreferowanie na ćwiczeniach tekstu z Tao.

10. Gdy $f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n z^n$ dla z z pierścienia $|z| > R$, to liczbę $-c_{-1} \in \mathbb{C}$ nazywamy **residuum funkcji f w punkcie ∞** i oznaczamy $\mathrm{res}_\infty f$. Udowodnić, że $\mathrm{res}_\infty f = \mathrm{res}_0 g$, gdzie $g(z) := -\frac{1}{z^2} f(\frac{1}{z})$.

Dwunasta porcja zadań (na poniedziałek, 19.I. 2014r.)

Uwagi dotyczące rozwiązania zadania 9 z ćwiczeń (w miejsce duskusji, na którą zabrakło czasu):

a) Pojawiło się pytanie, dlaczego kontury całkowania obieramy tak, by ominąć 0. Powód jest taki, że gałęzie funkcji $z^{1/3}$ określone są tylko poza zerem–na otoczeniu 0 nie bylyby one holomorficzne.

b) Jednak można wybrać inny kontur całkowania niż ten z ćwiczeń (gdzie wzorowaliśmy się na Tao). Jedną z możliwości jest $\Gamma_R\#[-R,-\varepsilon]\#\Gamma_\varepsilon^{\leftarrow}\#[\varepsilon,R]$, gdzie Γ_r to półokrąg $(re^{it})_{t\in[0,\pi]}$. (Sugestia taka pojawiła się na ćwiczeniach, lecz jej nie rozwinęliśmy – a rozumowanie jest nawet nieco krótsze.)

1. Rozwiązać zadanie 9 z serii 11 używając powyższych konturów i przechodząc do granicy przy $\varepsilon \to 0$ i $R \to \infty$.

2. Obliczyć podobnie $\int_0^\infty \frac{\log x}{(1+x^2)^2}dx$. (Odp. $-\pi/4$.)

3. Udowodnić, że obraz spójnego zbioru otwartego $U \subset \widetilde{\mathbb{C}}$ przy niestałej funkcji meromorficznej f jest zbiorem otwartym w $\widetilde{\mathbb{C}}$. (Traktujemy tu f jako funkcję ciągłą z U w $\widetilde{\mathbb{C}}$. Wskazówka: wystarcza sprawdzać otwartość obrazów małych otoczeń dowolnego punktu $p \in U$. Gdy $p \neq \infty \neq f(p)$, stosuje się zasada otwartości dla funkcji holomorficznych. Pozostałe przypadki sprowadzić do powyższego przez rozpatrzenie funkcji $f\circ j$ lub $j \circ f$ lub $j\circ f\circ j$, gdzie j to inwersja $z \mapsto 1/z$.)

4. Niech funkcja f będzie holomorficzna w zbiorze zwartym K o niepustym wnętrzu K^o. Dowieść, że jeśli spełniony jest warunek $|f(z)| = 1$ dla $z \in K\setminus K^o$, to funkcja f jest stała lub $0 \in f(K^o)$. (Wskazówka: zasada maksimum.)

5. Udowodnić, że wielomian $c_0+...+c_nz^n$ ma n pierwiastków w dysku $D(0,R)$, gdzie $R = M+1$ i $M = \max\{|c_k/c_n| : k = 0,\dots,n-1\}$. (Wskazówka: dla $R > 1$ zachodzą nierówności $|\sum_{n=0}^{n-1} c_kR^k| \leq |c_n|R^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1}|c_k/c_n|R^{-n+k+1} < |c_n|R^{n-1}M/(1-\frac{1}{R})$; użyć tw. Rouchégo.)

6. W następujących przypadkach zbadać, czy istnieje funkcja holomorficzna w otoczeniu zera, taka, że dla dostatecznie dużych n zachodzi

a) $f(1/n) = f(-1/n) = 1/n^2$.

b) $f(1/n) = f(-1/n) = 1/n^3$.

c) $4n^2(f(1/2n))^2 + nf(1/n) = n^2(f(1/n))^2 - nf(-1/n) + 1$.

Jeśli żądana funkcja istnieje, wskazać ją; zbadać też, jaka jest postać takich funkcji na dysku $|z| < 1$. (Wskazówka: zasada identyczności.)

7. Udowodnić, że różna od identyczności funkcja, holomorficznie przekształcająca dysk $|z| < 1$ w siebie, ma w nim najwyżej jeden punkt stały. (Wskazówka: lemat Schwarza.)