Egzamin z Funkcji Analitycznych (teoria). 7. II. 2013

Każdą oddawaną kartkę należy czytelnie podpisać, a rozwiązania różnych zadań powinny być wyraźnie rozdzielone i opatrzone numerem zadania. (Nie muszą być zapisane na różnych kartkach.)

Każda część każdego zadania może przynieść do 10p. Części c) można wymieniać na któryś z tematów zastępczych d1) czy d2), który jednak przyniesie tylko do 7p.

1. a) Sformułować twierdzenie Cauchy'ego o równości całek.

b) Podać definicję obszarów jednospójnych.

c) Udowodnić, że każda funkcja holomorficzna, określona w obszarze jednospójnym i nie przyjmująca wartości 0, ma w nim gałąź argumentu, logarytmu i pierwiastka kwadratowego.

2. a) Wyjaśnić, tak w terminach zachowania się funkcji f w nakłutym otoczeniu punktu $p \in \mathbb{C}$, jak i rozwinięcia w szereg Laurenta wokół p, kiedy f ma w p osobliwość istotną, pozorną czy biegun.

b) Sformułować lemat Goursata.

c) Podać dwa różne dowody Zasadniczego Twierdzenia Algebry, wykorzystujące własności funkcji analitycznych.

3. a) Sformułować zasadę argumentu.

b) Sformułować twierdzenie Morery.

c) Sformułować i udowodnić twierdzenie Rouchégo.

@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@

Tematy zastępcze:

d1) Udowodnić twierdzenie Casoratiego-Sochockiego-Weierstrassa.

d2) Udowodnić lemat Schwarza o przekształceniach dysku.

Egzamin z Funkcji Analitycznych (zadania) 7 II 2013

Każdą oddawaną kartkę proszę czytelnie podpisać, podając numer indeksu i nazwisko prowadzącego ćwiczenia lub numer grupy ćwiczeniowej, oraz opatrzeć numerem rozwiązywanego zadania (może być tylko jedno na kartce).

Proszę dawać wyczerpujące wyjaśnienia i uzasadnienia, umożliwiające śledzenie toku rozumowania. Proszę też jawnie wskazywać na wykorzystywane rezultaty. Sposób redakcji (kompletność uzasadnień, czytelność przedstawienia) ma wpływ na ocenę!

Z poniższych siedmiu zadań proszę wybrać 5; za każde można dostać do 20p.

1. a) Niech $f(z) = -\frac{1}{6}z^3 \sin(z) + e^{z^2} - \cos^2(z^2)$ i $g(z) = z\mathrm{Log}(z^2+1) - z^3$. Znaleźć współczynniki $c_0, ..., c_4$ rozwinięcia Maclaurina $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ oraz część główną rozwinięcia Laurenta funkcji f/g wokół zera.

b) Obliczyć $\int_{[0,1+\mathbf{i}]} z \sin(\pi z^2) dz$

c) Obliczyć $\int_{|z|=2} \frac{z^3 e^{1/z}}{1+z} dz$

2. Wyznaczyć wartość poniższych całek niewłaściwych, uzasadniając też ich istnienie:

a) $\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+a^2} dx$, dla $a > 0$.

b) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)^2(x^2+2x+2)} dx$.

3. Obliczyć $\sum_{n=2}^{\infty} (n^4-1)^{-1}$, używając metod analizy zespolonej.

4. Zbadać liczbę pierwiastków wielomianu $f(z) = z^7 - 5z^3 + 12$ $(z \in \mathbb{C})$:

a) w pierścieniu $1 < |z| < 2$;

b) w półpłaszczyźnie $\mathrm{Re}(z) < 0$.

Poniżej, przez D oznaczamy otwarty dysk jednostkowy $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, przez $\overline{D}$ jego domknięcie, a przez ∂D dodatnio zorientowany brzeg.

5. Niech wszystkie pierwiastki wielomianu P, gdzie $P(z) = \sum_{j=0}^{n} c_j z^j$ i $c_n \neq 0$, leżą w dysku D. Wyrazić przez $c_0, ..., c_n$ całki $\int_{\partial D} \frac{zP'(z)}{P(z)} dz$ i $\int_{\partial D} \frac{z^2 P'(z)}{P(z)} dz$.

6. Niech U będzie obszarem zawierającym domknięcie $\overline{D}$ dysku D, a funkcje $f, g \in H(U)$ niech będą takie, że $|f(z)| = |g(z)|$ dla wszystkich $z \in \partial D$.

a) Udowodnić, że jeśli $f(z)g(z) \neq 0$ dla wszystkich $z \in \overline{D}$, to $f = c \cdot g$ dla pewnej stałej c o module 1.

b) Dowieść tego przy założeniu osłabionym do: $f(z)g(z) \neq 0$ dla wszystkich $z \in D$.

7. Niech funkcja $f \in H(D)$ spełnia warunek $f(D) \subset D$. Dowieść, że:

a) Jeśli $p \in D$ i $f(p) = 0$, to $f = b_p \cdot g$, gdzie $b_p(z) := \frac{z-p}{1-\overline{p}z}$ dla $z \in D$, zaś $g \in H(D)$ i $g(D) \subset D$ lub $g = const$. (Wskazówka: modyfikować dowód lematu Schwarza.)

b) Jeśli $p_1, ..., p_n \in f^{-1}(0)$ są różne, to $|f(z)| \leq \prod_{j=1}^{n} |b_{p_j}(z)|$ dla wszystkich $z \in D$.

1. a) Let $f(z) = -\frac{1}{6}z^3\sin(z) + e^{z^2} - \cos^2(z^2)$ and $g(z) = z\mathrm{Log}(z^2+1) - z^3$. Find the coefficients $c_0, ..., c_4$ of Maclaurina series $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ and the principal part of the Laurent series of f/g around 0.

b) Evaluate $\int_{[0,1+\mathbf{i}]} z\sin(\pi z^2)dz$

c) Evaluate $\int_{|z|=2} \frac{z^3 e^{1/z}}{1+z}dz$

2. Evaluate the improper integrals below and show they exist:

a) $\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+a^2}dx$, dla $a > 0$.

b) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)^2(x^2+2x+2)}dx$.

3. Evaluate $\sum_{n=2}^{\infty}(n^4-1)^{-1}$, using Complex Analysis.

4. Find the number of roots of the polynomial $f(z) = z^7 - 5z^3 + 12$ ($z \in \mathbb{C}$):

a) in $1 < |z| < 2$;

b) in the half–space $\mathrm{Re}(z) < 0$.

Below, by D we denote the open unit disk $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, by $\overline{D}$ its closure, and by ∂D its positiely oriented boundary.

5. Assume that all the roots of the polynomial P, where $P(z) = \sum_{j=0}^{n} c_j z^j$ i $c_n \neq 0$, are in the disk D. Express the integrals $\int_{\partial D} \frac{zP'(z)}{P(z)}dz$ and $\int_{\partial D} \frac{z^2P'(z)}{P(z)}dz$ by $c_0, ..., c_n$.

6. Suppose U is a domain containing $\overline{D}$ and the functions $f, g \in H(U)$ are such that $|f(z)| = |g(z)|$ dor all $z \in \partial D$.

a) Prove that if $f(z)g(z) \neq 0$ for all $z \in \overline{D}$, then $f = c \cdot g$ for some constant c with $|c = 1$.

b) Establish this under the weaker assumption: $f(z)g(z) \neq 0$ for all $z \in D$.

7. Let the function $f \in H(D)$ be such that $f(D) \subset D$. Prove that :

a) If $p \in D$ and $f(p) = 0$, then $f = b_p \cdot g$, where $b_p(z) := \frac{z-p}{1-\overline{p}z}$ for $z \in D$ and $g \in H(D)$ either satisfies $g(D) \subset D$ or is constant. (Hint: modify the proof of Schwarz' lema.)

b) If $p_1, ..., p_n \in f^{-1}(0)$ are distinct, then $|f(z)| \leq \prod_{j=1}^{n} |b_{p_j}(z)|$ for all $z \in D$.

Kolokwium z Funkcji Analitycznych 17 XII 2012

Każdą oddawaną kartkę proszę czytelnie podpisać, podając numer indeksu i nazwisko prowadzącego ćwiczenia lub numer grupy ćwiczeniowej, oraz opatrzeć numerem rozwiązywanego zadania (może być tylko jedno na kartce).

Proszę dawać wyczerpujące wyjaśnienia i uzasadnienia, umożliwiające śledzenie toku rozumowania. Proszę też jawnie wskazywać na wykorzystywane rezultaty. Sposób redakcji (kompletność uzasadnień, czytelność przedstawienia) ma wpływ na ocenę!

Z poniższych 6 zadań proszę wybrać 4; za każde można dostać do 25p. Wolno rozwiązywać jeszcze jedno zadanie; wtedy najgorzej rozwiązane zadanie będzie ocenione w skali 0–10, jako dodatkowe.

1. Niech $U = \Pi_+ \setminus \overline{D}$ będzie obszarem, powstałym z otwartej półpłaszczyzny $\Pi_+ = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im} z > 0\}$ przez usunięcie z niej punktów dysku $\overline{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$.

a) Opisać obraz $h(U)$ obszaru U przy homografii

$$h(z) = \frac{z+1}{z-1}\ .$$

b) Znaleźć odwzorowanie biholomorficzne, przeprowadzające U na dysk D.

2. Znaleźć, jeśli istnieje, taką funkcję holomorficzną $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, której część rzeczywista, wyrażona jako funkcja zmiennych $x = \mathrm{Re} z$ i $y = \mathrm{Im} z$, jest równa funkcji $u(x, y) = x^2 - y^2 + xy - x$. Wskazać też funkcję v, harmonicznie sprzężoną z u. Jeśli żądane funkcje nie istnieją, podać uzasadnienie.

Uwaga: f należy wyrazić jako funkcję zmiennej zespolonej z, zaś v jako funkcję zmiennych x i y.

3. Niech $\gamma(t) = t + \mathbf{i} \cos t$ dla $t \in [-\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi]$.

a) Udowodnić, że każda z funkcji $1/z$ i $1/(z-2)$ ma funkcje pierwotne w obszarze, zawierającym obraz drogi γ. (Obszary mogą być różne dla różnych funkcji.) Wskazać proponowane obszary i funkcje pierwotne, w tym funkcje wyrazić wzorami nie używającymi znaku całki.

b) Wyznaczyć $\int_\gamma f$, gdzie

$$f(z) = \frac{1}{z(z-2)}\ .$$

c) Czy $\int_\lambda f = \int_\gamma f$ dla każdej drogi λ od $-\frac{1}{2}\pi$ do $\frac{3}{2}\pi$, omijającej 0 i 2? (Odpowiedź uzasadnić i dla odpowiedzi negatywnej wskazać przykład poświadczającej to drogi.)

4. Rozwinąć funkcję

$$f(z) = \frac{1}{z} + \frac{1}{z-3} + \frac{1}{z-1}$$

w szereg Laurenta w pierścieniu $1 < |z| < 3$, o środku w zerze. Obliczyć też residuum $\mathrm{res}_3 f$ funkcji f w punkcie 3.

5. Niech

$$g(z) = \frac{z(1-z)(e^z + e^{-z})}{(e^z - e^{-z})} \quad \text{i} \quad f(z) = \frac{g(z)}{z^4} \qquad (z \neq 0).$$

a) Dowieść, że funkcję g można przedłużyć do funkcji $\widetilde{g}$, holomorficznej w otoczeniu zera i wyznaczyć współczynniki $c_0, ..., c_3$ rozwinięcia Maclaurina $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ funkcji $\widetilde{g}$. (Wskazówka: wykorzystać rozwinięcie funkcji exp w szereg.)

b) Wyznaczyć część główną rozwinięcia Laurenta funkcji f wokół zera, residuum tej funkcji w zerze oraz rodzaj osobliwości w zerze (czy istotna, czy pozorna, czy biegun, i którego rzędu).

6. Obliczyć następujące całki (okrąg $|z| = 2$ zorientowany jest dodatnio):

a) $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{e^z}{z} dz$ b) $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{e^{\frac{1}{z}}}{z} dz$ c) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{(2+\sin t)^2} dt$