FAN: wybór zadań przygotowawczych do egzaminu. styczeń 2013r.

Egzamin będzie z całości materiału – również i tej jego części, która objęta była poprzednimi zadaniami przygotowawczymi i samym kolokwium. Poniższy wybór dotyczy w większości tylko przykładowych zadań rachunkowych, dotyczących materiału omawianego po kolokwium, lub przykładowych zadań teoretycznych. Znak @ towarzyszy zadaniom wziętym z egzaminów lub kolokwiów z ubiegłych lat.

Całki niewłaściwe a twierdzenie o residuach. (Patrz np. strony 49-51 notatek.)

Wyznaczyć następujące całki niewłaściwe, w tym uzasadnić ich istnienie:

1. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin \pi x}{x^2+2x+5} dx$. (Wskazówka: Wykorzystać to, że $\sin = \mathrm{Im}(\exp)$ na osi rzeczywistej; użyć lematu Jordana.)

2. $\int_0^{\infty} \frac{\log x}{x^2-1} dx$ (Jest to zadanie 3.8.8 u Krzyża)

3. $\int_0^{\infty} (\frac{\sin x}{x})^n dx$, dla wybranych dwóch wartości $n \in \{1, 2, 3\}$. (Por. zadania 3.7.5 i 3.7.7 u Krzyża)

Sumowanie szeregów a twierdzenie o residuach.

Obliczyć, uzasadniając też istnienie sumy następujących szeregów:

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{w}{w+n^2}$, dla $w \notin \mathbf{i}\mathbb{N}$. (Wskazówka: twierdzenie 4 na str. 52 notatek do wykładu.)

5. @ $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2+1}$. (Rozwiązać wpierw zadanie 1 na str. 52 notatek.)

Twierdzenie o residuach z uwzględnieniem nieskończoności.

6. U Krzyża, zadania 3.4.16+3.5.7

Zasady izolowanych zer i identyczności; zasada symetrii.

7. W następujących przypadkach zbadać, czy istnieje funkcja holomorficzna w otoczeniu zera, taka, że dla dostatecznie dużych n zachodzi

a) $f(1/n) = f(-1/n) = 1/n^2$.

b) $f(1/n) = f(-1/n) = 1/n^3$.

c) $4n^2(f(1/2n))^2 + nf(1/n) = n^2(f(1/n))^2 - nf(-1/n) + 1$.

Jeśli żądana funkcja istnieje, wskazać ją i zbadać, jaka jest postać takich funkcji na dysku $|z| < 1$.

8. To samo, gdy warunek na f jest taki: $f'(1/n) + f(1/n) = 0$.

9. U Krzyża zadanie 7.2.1.

10. U Krzyża zadanie 7.2.2.

Zasada argumentu i twierdzenia Rouchégo. („Liczba zer” uwzględnia krotności.)

11. a) Prześledzić dowód twierdzenia Rouchégo by stwierdzić, że w jego sformułowaniu nierówność $|f(w) - g(w)| < |f(w)|$ może być zastąpiona przez $|f(w) - g(w)| < |f(w)| + |g(w|$, bez zmiany tezy.

b) Wykorzystując to, zbadać liczbę zer wielomianu $4z^5 + 5z^2 + 1$ w kole $|z| \leq 1$ i w pierścieniu $1 < |z| < 2$.

c) Powtórzyć to dla wielomianu $z^6 - 5z^4 + 3z^3 - 1$ i pierścienia $1 < |z| < 3$.

12. Niech $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Dowieść, że dla dostatecznie dużych n równanie $\mathrm{tg}(z) = cz$ ma $2n+1$ rozwiązań w kwadracie $|\mathrm{Re}z| \leq \pi n, |\mathrm{Im}z| \leq \pi n$. Posłużyć się twierdzeniem Rouchégo jak następuje: przyjąć $f(z) = \mathrm{tg}(z) - cz, g(z) = cz$, dowieść, że $N_{f,K} = N_{g,K}$, gdzie K to nasz dostatecznie duży kwadrat, i wyznaczyć sumę $B_{f,K}$ rzędów biegunów funkcji f w K.

13. @ Wyznaczyć liczbę pierwiastków wielomianu $f = z^7 + 6z^4 + 1$ w półpłaszczyźnie $\mathrm{Re}(z) > 0$.

Naszkicujemy jedno z możliwych rozwiązań. Zorientowany brzeg półkola $\{z : |z| \leq R \text{ i } \mathrm{Im}(z) \geq 0\}$ przedstawmy jako $\lambda \# \mu$, gdzie $\lambda(t) = -\mathbf{i}t$ $(t \in [-R, R])$ i $\mu(t) = Re^{\mathbf{i}t}$ $(t \in [-\pi/2, \pi/2])$. Dla dużych R można $f \circ \mu$ połączyć z drogą μ^7 homotopią w $\mathbb{C} \setminus \{0\}$; homotopię określamy wzorem $[0,1] \times [-\pi/2, \pi/2] \ni (s,t) \mapsto f_s \circ \mu(t)$, gdzie $f_s(z) = z^7 + s(6z^4 + 1)$. (To, że wartość 0 nie jest przyjmowana wynika stąd, że $|6z^4 + 1| < |z|^7$ dla dużych $|z| = R$.) Natomiast $f \circ \lambda$ przyjmuje wartości w $\{z : \mathrm{Re}(z) \geq 1\}$, bo dla $z = -\mathbf{i}t \in \mathrm{im}(\lambda)$ zachodzi $f(z) = \mathbf{i}t^7 + 6t^4 + 1$. W szczególności, f nie ma pierwiastków na osi $\mathrm{Re}(z) = 0$.

Powyższa homotopia w punktach zbioru $[0,1] \times \{\pm\pi/2\}$ przyjmuje wartości poza prostą $\mathrm{Im}(z) = 0$. Wobec tego pętla $f \circ (\lambda \# \mu)$ jest w $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ homotopijna z pętlą $\gamma := (f \circ \lambda) \# L_1 \# \mu^7 \# L_2$, gdzie L_1 i L_2 to pewne drogi w $\{z : \mathrm{Im}(z) \neq 0\}$. Indeks $\mathrm{ind}(\gamma, 0)$ można wyznaczyć stosując twierdzenie z §III.4 z $p = -2R^7, q = 0$ – wystarczy zauważyć, że półprosta $(-\infty, 0]_{\mathbb{R}}$ nie przecina obrazów dróg L_1, L_2 i $f \circ \lambda$, zaś obraz drogi μ^7 przecina w jednym punkcie $-R^7$, równym $(\mu(t_j))^7$ dla czterech wartości $t_j \in [-\pi/2, \pi/2]$ (mianowicie, dla $t_j = \frac{\pi}{7}(-1 + 2j)$, $j = -1, 0, 1, 2$); przy tym odpowiadające w twierdzeniu z §III.4 wartości ε_j są równe 1. Por. ćwiczenie w §III.4; warto też naszkicować schematyczny rysunek pętli γ.

Stąd dla dużych R, $\mathrm{ind}(\gamma, 0) = 4$ i tym samym $\mathrm{ind}(f \circ (\lambda \# \mu), 0) = 4$. Są więc cztery pierwiastki w $\{z : |z| < R \text{ i } \mathrm{Re}(z) > 0\}$, na podstawie twierdzenia o residuach.

Uwaga 1. U Krzyża jest kilka zadań podobnego typu, z obszernymi rozwiązaniami (od 3.9.2 do 3.9.8); z nich 3.9.7 ma pouczający rysunek zamieszczony przy rozwiązaniu. Wymagane indeksy wyznaczyć można jak opisano w rozwiązaniach lub, jak wyżej, korzystając z twierdzenia z §III.4 dla odpowiedniego punktu p (n.p. $p = 2R^5$ w 3.9.7).

14. Dowieść, że wszystkie zera wielomianu $z^5 - z + 16$ leżą w pierścieniu $1 < |z| < 2$, przy czym w pierwszej ćwiartce dokładnie dwa. (U Krzyża zadanie 3.9.6).

15. a) Dowieść, że wielomian $z^4 + \mathbf{i}z^3 + 1$ ma jeden pierwiastek w pierwszej ćwiartce.
b) Ile pierwiastków w tej ćwiartce ma wielomian $z^{99} + z + 1$?

Inne tematy.

16. @ Udowodnić, że różna od identyczności funkcja, holomorficznie przekształcająca dysk $|z| < 1$ w siebie, ma w nim najwyżej jeden punkt stały. (Wskazówka: lemat Schwarza.)

17. Składając przekształcenie holomorficzne $f : D \to D$ z obu stron z odpowiednimi przekształceniami Blaschkego i korzystając z lematu Schwarza dowieść, że:
a) $\delta(f(p), f(q)) \leq \delta(p, q)$ dla wszystkich $p, q \in D$, gdzie $\delta(p, q) := |b_p(q)| = \frac{|p-q|}{|1-\overline{p}q|}$.
b) $|f'(p)| \leq (1 - |f(p)|^2)/(1 - |p|^2)$ dla wszystkich $p \in D$.
c)* Jeśli w a) (lub w b)) w miejsce nierówności $\leq$ zachodzi równość dla pewnych $p \neq q$ (odp. dla pewnego p), to przekształcenie f jest biholomorficzne. Odwrotnie, gdy jest ono biholomorficzne, to obie strony nierówności są równe jako funkcje.

18. @ Udowodnić, że funkcja $f \in H(\mathbb{C})$ jest stała, jeśli:
a) funkcja e^f jest ograniczona, lub
b) funkcja $\mathrm{Re}(f)$ jest ograniczona z góry lub z dołu.

19. @ Znaleźć wszystkie funkcje $f \in H(\mathbb{C} \setminus \{0, 2\})$, spełniające poniższe 3 warunki:
1. f ma biegun rzędu 2 w zerze i rzędu 1 w jedynce;
2. f jest ograniczona w pierścieniu $|z| > 10$;
3. $f(1) = 3$ i $f'(1) = 6$;
4. $\int_{|z|=1} f = 2\pi\mathbf{i}$ i $\int_{|z|=10} f = 0$. (Wskazówka: §V.5 w notatkach do wykładu.)

Dodatkowe zadania dotyczące materiału sprzed kolokwium.

20. Rozważmy kwadrat o środku w 0 i boku równoległym do osi rzeczywistej. Dowieść, że jeśli długość $2N+1$ jego boku jest liczbą nieparzystą, to na brzegu kwadratu funkcje $\mathrm{ctg}(\pi z)$ i $1/\sin(\pi z)$ są (co do modułu) ograniczone stałą niezależną od N.

21. @ Rozwinąć funkcję $f(z) = 1/(z^2+1)(z+2)$ w szereg Laurenta na maksymalnych pierścieniach o środku w 0, które nie zawierają jej punktów osobliwych.

22. Niech
$$g(z) = \frac{z^2 + 2\cos z - 2}{e^z - z^2 - 1} \quad \text{i} \quad f(z) = \frac{g(z)}{z^5} \qquad (z \neq 0).$$
a) Dowieść, że funkcję g można przedłużyć do funkcji $\widetilde{g}$, holomorficznej w otoczeniu zera i wyznaczyć współczynniki $c_0, ..., c_4$ rozwinięcia Maclaurina $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ funkcji $\widetilde{g}$.
b) Wyznaczyć część główną rozwinięcia Laurenta funkcji f wokół zera, residuum tej funkcji w zerze oraz rodzaj osobliwości w zerze (czy istotna, czy pozorna, czy biegun, i którego rzędu).

23. @ Niech $f \in H(D)$, gdzie D to dysk $|z| < 1$. Dowieść, że:

a) $\sum_{j=0}^{n} f^{(j)}(z) = \sum_{k=0}^{\infty}(\sum_{j=0}^{n} f^{j+k}(0))z^k/k!$ dla $n \in \mathbb{N}$ i $z \in D$.

b) Jeśli szereg funkcyjny $\sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}$ jest zbieżny w punkcie $z = 0$, to jest zbieżny niemal jednostajnie w D.

24. @ Niech $f(z) = e^{iz}/(z-i)(z^2+1)$. Obliczyć $\int_\Gamma f$, gdy

a) Γ to dodatnio zorientowany okrąg $|z| = 2$,

b) Γ to łamana $[w_0, w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6, w_0]$, o następujących wierzchołkach $w_0 = 4i$, $w_1 = 2+2i$, $w_2 = -2-2i$, $w_3 = 2-2i$, $w_4 = -3+3i$, $w_5 = 5+3i, w_6 = -1$.

Wybór przykładowych zadań teoretycznych.

1. a) Udowodnić, że funkcja, meromorficzna w całej sferze $\widetilde{\mathbb{C}}$, jest funkcją wymierną. (Jest to twierdzenie 3 na str. 59 notatek.)

b) Udowodnić porzedzające twierdzenie 2 ze str. 59.

2. Udowodnić, że obraz spójnego zbioru otwartego w $\widetilde{\mathbb{C}}$ przy niestałej funkcji meromorficznej jest zbiorem otwartym w $\widetilde{\mathbb{C}}$.

3. Udowodnić, że jeśli funkcja f rozwija się w pierścieniu $|z| > r$ w szereg Laurenta $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n z^n$ i spełnia warunek $\lim_{z\to\infty} z^k f(z) = 0$ dla pewnego $k \in \mathbb{Z}$, to $c_n = 0$ dla $n \le -k$ i wobec tego $|f(z)| \le C/|z|^{k+1}$ dla pewnej stałej C i dostatecznie dużych $|z|$.

b) Uzyskać wersję twierdzenia Liouville'a: jeśli $f \in H(\mathbb{C})$ i $|f(z)| \le C|z|^s$ dla pewnych $s, C \ge 0$ i dostatecznie dużych $|z|$, to f jest wielomianem stopnia $\le \lfloor s \rfloor$.

Uwaga 1. Powyższe zadania są z §V.5 i §VI.1.B notatek do wykładu; wskazówką do nich jest sąsiadujący materiał. W notatkach do wykładu jest sporo innych nietrudnych lematów, pozostawionych jako zadania. Należy je rozwiązywać, by sprawdzać rozumienie zasadniczego toku wykładu. Na egzaminie zadania te mogą się pojawić.

4. Dowieść, że gdy funkcja f jest holomorficzna w $\mathbb{C}$ poza zbiorem skończonym, to suma jej residuów, włączając residuum w nieskończoności, jest równa zeru. (To też udowodniono w notatkach do wykładu, ale nie napiszę, gdzie.)

5. @ Udowodnić, że gdy $f, g \in H(\mathbb{C})$ są takie, że $f \circ g$ jest wielomianem, to f i g są wielomianami. (Wskazówka: zadanie 1b) wyżej.)

6. @ Zbadać, czy istnieją niestałe funkcje holomorficzne z $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ w $\{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$. (Wskazówka: wyniki z §V.4 i §V.5.)

7. Niech funkcja f będzie holomorficzna w ograniczonym obszarze U i ciągła w jego domknięciu $\overline{U}$. Dowieść, że:

a) Jeśli funkcja $|f|$ jest stała na brzegu $\mathrm{Bd}(U) := \overline{U} \setminus U$ zbioru U, to f jest stała na U lub ma w U miesce zerowe.

b) Jeśli $|f(w)| > |f(z_0)|$ dla wszystkich $w \in \mathrm{Bd}(U)$ i pewnego $z_0 \in U$, to f ma w U miejsce zerowe.

c) Funkcja $|f|$ swe maksimum na $\overline{U}$ przyjmuje w punktach zbioru $\mathrm{Bd}(U)$.

8. Niech funkcja f będzie niestała i holomorficzna w dysku $|z| < 1$. Udowodnić, że funkcja $\varphi(r) := \sup_{|z|=r} |f(z)|$ jest ściśle rosnąca na $[0, 1)$. (U Krzyża zadanie 6.1.6.)

9. a) Niech U będzie zbiorem otwartym w $\mathbb{C}$. Udowodnić, że gdy funkcja f, holomorficzna w U poza zbiorem dyskretnym, ma w z_0 osobliwość istotną, to jej złożenie $g \circ f$ z funkcją $g \in M(U)$ nie ma w z_0 bieguna ani osobliwości pozornej.

b) Tak samo jest, gdy U jest zbiorem otwartym w $\widetilde{\mathbb{C}}$.

10. Dowieść, że funkcja $f : U \to \mathbb{C}$, określona i ciągła w zbiorze otwartym $U \subset \mathbb{C}$, jest holomorficzna wtedy i tylko wtedy, gdy jej kwadrat $f \cdot f$ jest funkcją holomorficzną.

Wybór przykładowych tematów egzaminu z teorii.

Podaję jako przyklady tematy z egzaminu prof. Pola sprzed 2 lat:

1. a) Sformułować twierdzenie Morery.

b) Udowodnić twierdzenie Weierstrassa o granicy niemal jednostajnie zbieżnego ciągu funkcji holomorficznych.

2. a) Podać definicję indeksu drogi zamkniętej względem punktu.

b) Sformułować zasadę argumentu.

3. a) Podać definicję obszarów jednospójnych i sformułować twierdzenie Riemanna o przekształceniach konforemnych.

b) Udowodnić lemat Schwarza o holomorficznych przekształceniach dysku w siebie.

@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@

FAN: wybór zadań przygotowawczych do kolokwium. grudzień 2012r.

1. a) Wyrazić w postaci $a + b\mathbf{i}$ następujace liczby zespolone:

$$(1 + \mathbf{i}\sqrt{3})^6, \quad \left(\tfrac{1+\mathbf{i}\sqrt{3}}{1-\mathbf{i}}\right)^4, \quad \cos\left(\tfrac{\pi}{2} - \mathbf{i}\ln 2\right).$$

b) Udowodnić, że gdy $|z| = r > 0$, to $\mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \frac{r^2}{z})$.

c) Udowodnić, że jeśli szereg $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ jest zbieżny i $|\arg(u_k)| \le c < \pi/2$ dla wszystkich k, to szereg $\sum_k |u_k|$ jest zbieżny.

d) Udowodnić, że gdy $t = \ln(x + \sqrt{x-1}\sqrt{x+1})$, to $\cosh(t) = x$.

e) Zbadać, dla jakich z rzeczwiste są liczby $\cos(z), \sin(z), \frac{\sin(z)}{\cos(z)}$. Jaki jest zbiór wartości funkcji $\mathrm{tg} := \sin / \cos$?

f) Dla $z = x + \mathbf{i}y$, gdzie $x, y \in \mathbb{R}$, dowieść równości $|\sin z|^2 = \sin^2 x + \mathrm{sh}^2 y = \mathrm{ch}^2 y - \cos^2 x$ oraz $|\cos z|^2 = \mathrm{sh}^2 y + \cos^2 x = \mathrm{ch}^2 y - \sin^2 x$.

2. Wyznaczyć koło zbieżności szeregu (mowa o maksymalnym kole otwartym):

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} z^n$; b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} z^n$; c) $\sum_{n=1}^{\infty} (n + a^n) z^n$.

3. Wyznaczyć koło zbieżności i sumę szeregu:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} n(z+2)^n$; b) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2(z-1)^n$; c) $\sum_{n=1}^{\infty} n^3 z^n$.

4. Wyznaczyć, w których punktach istnieje pochodna zespolona funkcji

a) $f(z) = z\mathrm{Re}(z)$, b) $f(x+iy) = \frac{x}{x^2+y^2} - \mathbf{i}\frac{y}{x^2+y^2}$.

5. Niech $f(z) = \frac{1}{2}(z + z^{-1})$ dla $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Udowodnić, że funkcja f przekształca w sposób różnowartościowy zbiory $\{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$ i $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\}$ na $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$, zaś zbiór $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) > 0\}$ na $(\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}) \cup (-1, 1)$. (Wskazówka: wyznaczyć obraz $f(\partial X)$ brzegu ∂X rozważanego zbioru X i dowieść, że dla $w \notin f(\partial X)$ równanie $z + z^{-1} = 2w$ ma dwa rozwiązania z_1, z_2; z nich jedno należy do X, bo $z_1 z_2 = 1$.)

6. Udowodnić, że funkcja $f(z) := z/(1-z)^2$ bijektywnie przeprowadza dysk $|z| < 1$ na $\mathbb{C} \setminus (-\infty, -1/4]_{\mathbb{R}}$.

7. Udowodnić, że funkcja tg bijektywnie przeprowadza pas $|\mathrm{Re}z| < \pi/4$ na dysk $|z| < 1$.

8. a) Przeprowadzić biholomorficznie soczewkę $D(0, \sqrt{2}) \cap D(1, 1)$ na półpłaszczyznę $\mathrm{Im}z > 0$.

b) Przeprowadzić biholomorficznie dysk $|z| < 1$ na płaszczyznę $\mathbb{C}$ z wyjętymi dwiema współiniowymi półprostymi $[2, \infty)_{\mathbb{R}}$ i $(-\infty, -2]_{\mathbb{R}}$.

c) Przeprowadzić biholomorficznie soczewkę $D(-1, 2) \cap D(1, \sqrt{2})$ na dysk $|z| < 1$ tak, by obrazem zera było zero.

9. Jaka jest postać homografii, przeprowadzających okrąg $|z| = 1$ na siebie?

10. Wyznaczyć punkt symetryczny do $2 + \mathbf{i}$ względem okręgu o środku w $\mathbf{i}$ i promieniu 3.

11. Udowodnić, że każdy okrąg, przechodzący przez dwa punkty, położone symetrycznie względem danego okregu C, jest ortogonalny do C. Sformułować i udowodnić twierdzenie odwrotne.

12. Niech ℓ_1 będzie gałęzią logarytmu, określoną w $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]_{\mathbb{R}}$ i przyjmującą wartość 0 w punkcie 1, zaś ℓ_2 – gałęzią logarytmu, zdefiniowaną w $\mathbb{C} \setminus [0, \infty)_{\mathbb{R}}$ i przyjmującą w punkcie -1 wartość $\pi\mathbf{i}$.

a) Obliczyć $\ell_1(z)$ i $\ell_2(z)$ dla $z = \mathbf{i}, -\mathbf{i}, 1 - \mathbf{i}$;

b) Wyznaczyć $\lim_{y \to 0} \ell_n(x + \mathbf{i}y) - \ell_n(x - \mathbf{i}y)$ dla $n = 1, 2$ i $x \neq 0$.

13. W poniższych przypadkach zbadać, czy istnieje funkcja holomorficzna f taka, że $\mathrm{Re}f = u$, a jeśli tak, to wyrazić ją wzorem jako funkcję zmiennej zespolonej z, gdy:

a) $u(x, y) = x^3 - 3xy^2 - 3x$, b) $u(x, y) = e^x \sin y$, c) $u(x, y) = \frac{\sin x \cos x}{\cos^2 x + \mathrm{sh}^2 y}$, d) $u(x, y) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2)$, gdzie każda z tych funkcji rozpatrywana jest na zbiorze $U = \mathbb{C}$;

e) u jest jak w d), a $U = \{z : \mathrm{Im}z > 0\}$.

Tu, $x := \mathrm{Re}(z)$ i $y := \mathrm{Im}(z)$, lecz odpowiedź nie powinna wykorzystywać $\mathrm{Re}(z), \mathrm{Im}(z)$ czy $|z|$.

14. Udowodnić, że gdy funkcja f jest holomorficzna i nie przyjmuje wartości 0, to funkcja $\log|f|$ jest harmoniczna.

15. Niech funkcja f będzie holomorficzna i ograniczona w półpłaszczyźnie $\mathrm{Im}(z) > 0$. Udowodnić, że na każdym zbiorze $\mathrm{Im}(z) > c$, gdzie $c > 0$, jest ona jednostajnie ciągła. (Wskazówka: formuła Cauchy'ego.)

16. Obliczyć następujące całki (okrąg $|z| = 2$ jest zorientowany dodatnio):

a) $\int_{|z|=2} \frac{\cos(z)}{e^{\mathbf{i}z}} dz$; b) $\int_{|z|=2} (e^{\sin(z)} + \overline{z}) dz$; c) $\int_0^{2\pi} \frac{1}{2+\cos t} dt$; d) $\int_0^{2\pi} (\cos^3 t + \sin^2 t) dt$; e) $\int_0^{\pi} \mathrm{tg}(t + \mathbf{i}) dt$.

17. Niech $f(z) = \frac{1}{z^4}(1 + z)\mathrm{ctg(z)}$. (Tu, $\mathrm{ctg} = \cos / \sin$.)

a) Wyznaczyć część główną rozwinięcia Laurenta funkcji f wokół zera.

b) Wyznaczyć wszystkie izolowane punkty osobliwe funkcji f, leżące w dysku $|z| < 5$. Dla każdego takiego punktu, określić rodzaj osobliwości: czy jest pozorna, czy istotna, czy też jest biegunem, i jakiego rzędu.

c) Obliczyć $\mathrm{res}_p f$ dla każdego punktu osobliwego p, znalezionego w b).

d) Obliczyć $\int_\Gamma f - \int_\Lambda f$, gdzie Γ to okrąg $|z| = 5$, a Λ to okrąg $|z - 3/2| = 2$ (oba zorientowane dodatnio).

18. a) Rozwinąć w szereg Maclaurina funkcje $1/(z-1), 1/(z-2)$ i $1/(z^2 - 3z + 2)$ i podać promienie zbieżności otrzymanych szeregów. (Wskazówka: jaki jest związek ostatniej funkcji z poprzednimi?)

b) Rozwinąć w szereg Laurenta wokół $\mathbf{i}$ funkcję $\mathrm{Log}(z)/(z - \mathbf{i})$, gdzie Log oznacza gałąź logarytmu na otoczeniu punktu $\mathbf{i}$, przyjmującą w $\mathbf{i}$ wartość $\pi\mathbf{i}/2$. Jaki jest pierścień zbieżności tego szeregu? (Mowa o maksymalnym otwartym pierścieniu.)

19. Niech $I_R = \int_{|z|=R} \frac{z^2+9}{z^4+3z^2+2} dz$ dla $R > 2$.

a) Udowodnić, że $|I_R| \leq 2\pi R(R^2 + 9)/(R^2 - 1)(R^2 - 2)$.

b) Udowodnić, że $I_R = 0$ dla $R > 2$.

20. Niech $\gamma(t) = t - \mathbf{i}\sin(t)$ dla $t \in [-\pi, \pi]$.

a) Udowodnić, że każda z funkcji $1/(z + 1)$ i $1/(z - 1)$ ma funkcję pierwotną w obszarze, zawierającym obraz drogi γ. (Obszary mogą być różne dla różnych funkcji.) Wskazać proponowane obszary i funkcje pierwotne, w tym funkcje wyrazić wzorami nie używającymi znaku całki.

b) Wyznaczyć $\int_\gamma f$, gdzie $f(z) = 2z/(z^2 - 1)$.

c) Czy $\int_\lambda f = \int_\gamma f$ dla każdej drogi λ z $-\pi$ do π, omijającej -1 i 1? (Odpowiedź uzasadnić i w przypadku odpowiedzi negatywnej wskazać przykład poświadczającej to drogi; starać się też unikać zbędnych rachunków.)

21. Dowieść, że gdy Γ jest ćwiartką okręgu $|z| = 2$, prowadzącą od 2 do $2\mathbf{i}$, to $|\int_\Gamma e^{-iz^2} dz| < 5$. Czy istnieje kontur Λ od 2 do $2\mathbf{i}$, dla którego $|\int_\Lambda e^{-iz^2} dz| = 6$?

22. Niech funkcja f będzie holomorficzna w $\mathbb{C}$ i ograniczona. Dla danych $a, b \in \mathbb{C}$ dowieść, że $\lim_{r\to\infty} \int_{|w|=r} \frac{f(w)}{(w-a)(w-b)} dw = 0$ i używając twierdzenia o residuach dowieść, że funkcja f jest stała (twierdzenie Liouville'a).

23. Niech funkcja f będzie holomorficzna w $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ i ograniczona w $\{z : |z| > 1\}$. Udowodnić, że $f(z) = \frac{1}{2\pi\mathbf{i}} \int_{|z|=1} \frac{zf(w)}{w(z-w)} dw$ gdy $|z| > 1$. Jaka jest wartość prawej strony, gdy $|z| < 1$?

24. Udowodnić, że dla każdej funkcji holomorficznej f i każdej drogi zamkniętej γ, o wartościach w obszarze określoności funkcji f, zachodzi równość $\mathrm{Re}(\int_\gamma \overline{f(z)} f'(z) dz) = 0$.

25. Udowodnić, że jeżeli $f \in H(D(0,R) \setminus \{0\})$ i $f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n z^n$ to

$$\sqrt{\sum |c_n|^2 r^{2n}} \leq \sup_{|z|=r} |f(z)| \text{ dla } r \in (0, R).$$

26. Niech $\gamma_r : [0, \pi] \to \mathbb{C}$ oznacza półokrąg $\gamma_r(t) = re^{it}$. Wyznaczyć granicę, jeśli istnieje (por. zadanie 1 z §IV.2 notatek do wykładu):

$$\lim_{r\to 0} (\int_{\gamma_r} \frac{e^{iz}}{z} dz).$$

27. Niech $z \in \mathbb{C}$, $|z| \neq 1$. Zbadać istnienie granicy i jeśli istnieje, wyznaczyć ją

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(e^{2\pi ik/n})}{1 - ze^{-2\pi ik/n}}.$$

28. Udowonić, że jeśli $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ jest holomorficzna i $|f(z)| \leq A|z|^k + B$, to f jest wielomianem.

29. Udowodnić, że gdy funkcja f jest holomorficzna na odcinku $[a, b] \subset \mathbb{C}$, to $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = t_1 f'(z_1) + t_2 f'(z_2) + t_3 f'(z_3)$ dla pewnych $t_i \in [0, 1]$ i $z_i \in [a, b]$ takich, że $\sum_{i=1}^{3} t_i = 1$.

Zadania, będące powtórzeniem niektórych (ważnych) fragmentów wykładu:

A. Dowieść, że w pierścieniu $P = \{z : 1/2 < |z| < 2\}$ nie istnieje gałąź argumentu.

B. Dowieść, że gdy funkcja holomorficzna f nie przyjmuje żadnej wartości nieujemnej, to $f = g^2$ dla pewnej funkcji holomorficznej g.