Notatki te są zamierzone jako uzupełnienie wykładu prowadzonego w semestrze jesiennym 2012, i są modyfikacją tych z lat 2003 i 2004, których zapisaniem w TeXu w sporej części zajął się Pan Wojciech Bagiński. Mogą one ułatwić zrozumienie wykładu, lecz z konieczności nie są wyczerpujące. Głębsze omówienie poruszanych zagadnień można znaleźć w podręcznikach wymienionych niżej.

Materiał bądź to nieco trudniejszy i wykraczający poza minimum, zakreślone programem, bądź to mniej w dalszej części wykorzystywany, oznaczono gwiazdką *; tylko niewielką jego część omówimy na wykładzie. (Pominięte będą w całości rozdziały czy paragrafy, których tytuły oznaczone są gwiazdką.) Znak □ oznacza koniec rozumowania czy –gdy rozumowanie jest zbędne– koniec sformułowania. Znak ⊟ ma podobne znaczenie, ale używany jest wtedy, gdy pewne fragmenty rozumowania są pozostawione czytelnikowi.

„Zadaniami" nazwano wybrane lematy, których dowód jest na tyle prosty, że z pożytkiem może być znaleziony przez czytelnika, podczas gdy podawanie go zaciemniłoby tylko układ materiału; zadania z gwiazdką grają tę samą rolę w odniesieniu do materiału uzupełniającego. Nie zastępują więc one tych, które rozwiązywane były na ćwiczeniach lub które można znaleźć w znanych zbiorach (np. prof. J. Krzyża). Oprócz „zadań", są też nieliczne „ćwiczenia", różnej trudności, które już nie są dalej wykorzystywane.

Niektóre podręczniki w języku polskim:

J. Chądzyński, Wstęp do analizy zespolonej.
F. Leja Teoria funkcji analitycznych.
F. Leja, Funkcje analityczne i harmoniczne.[1]
K. Maurin, Analiza (w szczególności rozdział XVI).
W. Rudin, Analiza rzeczywista i zespolona.
S. Saks, A. Zygmund, Funkcje analityczne.[1]
B.W. Szabat, Analiza zespolona.

Z tekstów w języku angielskim wymienię tylko dwa, pochodzące od laureatów Medalu Fieldsa:

L. Ahlfors, Complex Analysis.
T. Tao, Notatki do wykładu, osiągalne pod
`http://www.math.ucla.edu/~tao/resource/general/132.1.00w/`

[1] Plik .pdf osiągalny pod `http://matwbn.icm.edu.pl/ksspis.php?wyd=10`

I PRZENIESIENIE NA PRZYPADEK ZESPOLONY WSTĘPNYCH POJĘĆ ANALIZY

1 Liczby zespolone (przypomnienie).

Element (x, y) płaszczyzny $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ oznaczamy przez $x + y\mathrm{i}$. Wprowadzamy następujące działania:

$$(x + y\mathrm{i}) \pm (x' + y'\mathrm{i}) \stackrel{def}{=} (x + x') \pm (y + y')\mathrm{i}$$

$$(x + y\mathrm{i})(x' + y'\mathrm{i}) \stackrel{def}{=} (xx' - yy') + (xy' + x'y)\mathrm{i}.$$

Odpowiadają one działaniom na wyrażeniach algebraicznych gdy przyjąć, że $\mathrm{i}^2 = -1$. Zamiast $x + y\mathrm{i}$ możemy pisać x jeśli $y = 0$, zaś $y\mathrm{i}$ jeśli $x = 0$. Przy tych umowach dotyczących zapisu i działań, zbiór $\mathbb{R}^2$ oznaczamy przez $\mathbb{C}$, a jego elementy nazywamy **liczbami zespolonymi**. (Możemy je też nazywać wektorami lub punktami, zależnie od tego, czy $\mathbb{R}^2$ interpretujemy jako przestrzeń wektorową, czy jako afiniczną.)

Liczbę $x - y\mathrm{i}$ nazywamy **liczbą sprzężoną** do liczby $z = x + y\mathrm{i} \in \mathbb{C}$ i oznaczamy $\overline{z}$. Ponieważ

$$z\overline{z} = |z|^2, \quad \text{gdzie } |z| \stackrel{def}{=} \sqrt{x^2 + y^2} \in [0, \infty) \text{ jest } \textbf{modułem} \text{ liczby } z,$$

więc $\frac{1}{|z|^2}\overline{z}$ jest odwrotnością liczby $z \neq 0$. Stąd już wynika łatwo, że $\mathbb{C}$ jest ciałem. (Nieco kłopotu sprawia łączność mnożenia – jak jej dowieść?) Dla $z = x + yi$ przyjmujemy

$$\mathrm{Re}(z) \stackrel{def}{=} x = \frac{z + \overline{z}}{2}, \quad \mathrm{Im}(z) \stackrel{def}{=} y = \frac{z - \overline{z}}{2\mathrm{i}}.$$

Są to **część rzeczywista** i **część urojona** liczby z. (Częścią urojoną „czysto urojonej" liczby i nie jest więc i, lecz 1.)

Dzięki utożsamieniu każdej liczby $x \in \mathbb{R}$ z liczbą $x + 0\mathrm{i}$, możemy $\mathbb{R}$ traktować jako podzbiór (i podciało) ciała $\mathbb{C}$. Przedział $\{x + 0i : x \leq a\} \subset \mathbb{C}$, gdzie $a \in \mathbb{R}$, będziemy jednak oznaczać $(-\infty, a]_{\mathbb{R}}$, a nie $(-\infty, a]$, i podobnie wprowadzamy oznaczenia $[a, \infty)_{\mathbb{R}}$, $(-\infty, a)_{\mathbb{R}}$ i $(a, \infty)_{\mathbb{R}}$. Ta drobiazgowość spowodowana jest tym, że dołączymy niebawem do $\mathbb{C}$ punkt ∞, ale nie punkt $-\infty$; ponadto, analogiczne przedziały nie będą wprowadzane gdy $\mathrm{Im}(a) \neq 0$. W $\mathbb{C}$ <u>nie</u> definiujemy bowiem relacji nierówności poza tymi, które dotyczą liczb rzeczywistych (czyli leżących na osi $\mathrm{Im}\, z = 0$) ! Dla $a, b \in \mathbb{C}$ możemy jednak rozważać **odcinek domknięty** $[a, b] = \{tb + (1 - t)a : 0 \leq t \leq 1\}$ i odcinki, otwarte z jednej czy obu stron.

Punkt $z = x + y\mathrm{i}$ płaszczyzny $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ można też zapisać w postaci biegunowej:

$$z = |z|(\cos(\alpha) + \mathrm{i}\sin(\alpha)), \quad \text{gdzie } \alpha \in \mathbb{R}. \tag{0}$$

(Dlaczego?) Gdy zachodzi (1) piszemy $\alpha = \arg(z)$ i liczbę α nazywamy **argumentem** liczby zespolonej z. Argumentów tych jest nieskończenie wiele, i dla $z \neq 0$ każde dwa różnią się o wielokrotność 2π. By dla $z \neq 0$ uzyskać jednoznaczność, możemy obrać dowolny przedział

$J \subset \mathbb{R}$, długości 2π i otwarty z jednej strony, a domknięty z drugiej, i oznaczyć przez $\mathrm{Arg}_J(z)$ jedyny argument, należący do J. Gdy $J = [0, 2\pi)$, mówić będziemy o **argumencie głównym** i pisać $\mathrm{Arg}(z)$ zamiast $\mathrm{Arg}_{[0,2\pi)}(z)$; jest to jednak sprawa umowy i często zamiast $[0, 2\pi)$ rozpatruje się przedziały $(0, 2\pi]$, $[-\pi, \pi)$ lub $(-\pi, \pi]$.

Zapiszmy najważniejsze własności modułu, sprzężenia i argumentu:

1. $|\mathrm{Re}(z)| \leqslant |z|, \quad |\mathrm{Im}(z)| \leqslant |z|, \quad |\overline{z}| = |z|$
2. $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}, \quad \overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$
3. $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$
4. $\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$, $\arg(z_1/z_2) = \arg(z_1) - \arg(z_2)$ gdy $z_2 \neq 0$
   (Oznacza to: gdy $\alpha_i = \arg(z_i)$ dla $i = 1, 2$, to $\alpha_1 + a_2$ jest argumentem liczby $z_1 z_2$, zaś gdy ponadto $z_2 \neq 0$, to $\alpha_1 - \alpha_2$ jest argumentem liczby z_1/z_2.)
5. $|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\,\mathrm{Re}(z_1 \overline{z_2}) = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\,\mathrm{Re}(\overline{z_1} z_2)$
6. $|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$ i równość ma miejsce $\Leftrightarrow z_1 = 0$ lub $z_2 = tz_1, t \in [0, \infty)_{\mathbb{R}}$

Zadanie. Niech $f(z) = \frac{1}{2}(z + z^{-1})$ dla $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Udowodnić, że funkcja f przekształca w sposób różnowartościowy zbiory $\{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$ i $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\}$ na $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$, zaś zbiór $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) > 0\}$ na $(\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}) \cup (-1, 1)$. (Wskazówka: wyznaczyć obraz $f(\partial X)$ brzegu ∂X rozważanego zbioru X i dowieść, że dla $w \notin f(\partial X)$ równanie $z + z^{-1} = 2w$ ma dwa rozwiązania z_1, z_2; z nich jedno należy do X, bo $z_1 z_2 = 1$.)

Zadanie. a) Gdy $|p| \leq 1$ i $|z| \leq 1$, to $|z - p| \leq |1 - \overline{p}z|$, a przy $|z| = 1$ jest równość.

b) Gdy $|p| = P < 1$ i $|q| = Q < 1$, to $\frac{|P-Q|}{1-PQ} \leq \frac{|p-q|}{|1-\overline{p}q|} \leq \frac{P+Q}{1+PQ}$. (Wskazówka: mnożąc p i q przez liczbę P/p sprowadzić zadanie do przypadku, gdy $p = P$ i $q = Q(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$. Korzystając z 5 wyrazić kwadrat środkowego członu nierówności jako funkcję zmiennej φ i dowieść, że ma ona ekstrema tylko gdy $\sin\varphi = 0$.)

Ważne jest badanie podstawowych przekształceń $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Pewne z nich poznamy później. Na razie odnotujmy (dowód jest pozostawiony jako zadanie):

Stwierdzenie 1. *a) Przekształcenie $z \mapsto \overline{z}$ jest symetrią prostopadłą płaszczyzny względem osi rzeczywistej.*

b) Gdy $a, b \in \mathbb{C}$ i $a \neq 0$, to przekształcenie $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ zadane wzorem $f(z) = az + b$ jest podobieństwem. Ściślej biorąc, jest ono:

i) przesunięciem, gdy $a = 1$,

ii) obrotem wokół 0 o kąt $\arg(a)$, gdy $|a| = 1$ i $b = 0$,

iii) jednokładnością o środku w 0 i skali a, gdy $a \in [0, \infty)_{\mathbb{R}}$ i $b = 0$,

iv) złożeniem obrotu wokół punktu $z_0 = b/(1 - a)$ o kąt $\arg(a)$ i jednokładności o środku w tym punkcie i skali $|a|$, gdy $a \neq 1$. $\boxminus$

Uwaga 1. Powyżej, z_0 jest jedynym punktem stałym przekształcenia f.

Ćwiczenie. Dowieść, że gdy $\operatorname{Re} u < 0$ i $\operatorname{Re} v < 0$, to $|u - v| < |u + \overline{v}|$. (Zaleźć dowód analityczny, oparty na równości 5, i geometryczny, oparty na części a) stwierdzenia.)

Przez **macierz przekształcenia liniowego** $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ będziemy rozumieli macierz tego przekształcenia w standardowej bazie $(1,0),(0,1)$ przestrzeni $\mathbb{R}^2$. (Liniowość jest rozumiana nad ciałem $\mathbb{R}$.)

Uwaga 2. Dla $a = p+q\mathrm{i}$ przekształcenie $z \mapsto az$ wyznacza, po standardowym utożsamieniu $\mathbb{C}$ z $\mathbb{R}^2$, przekształcenie liniowe $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, którego macierz jest równa $\left(\begin{smallmatrix} p & -q \\ q & p \end{smallmatrix}\right)$ (bo w kolumnach wpisujemy obrazy wektorów $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) = 1_{\mathbb{C}}$ oraz $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) = \mathrm{i}_{\mathbb{C}}$). Oczywiście, każde $\mathbb{C}$–liniowe przekształcenie $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ jest postaci $z \mapsto az$, gdzie $a \in \mathbb{C}$.

Uwaga 3. Wynika stąd, że nie każde $\mathbb{R}$–liniowe przekształcenie $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ jest $\mathbb{C}$-liniowe. Przykład: funkcja $f(z) = \overline{z}$ nie jest $\mathbb{C}$ – liniowa, bo $f(cz) \neq cf(z)$ gdy $c \notin \mathbb{R}$ i $z \neq 0$. (Jaka jest macierz tego przekształcenia?)

Zadanie. Udowodnić, że każde podobieństwo $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ jest postaci $z \mapsto az+b$ (gdy zachowuje ono orientację płaszczyzny $\mathbb{C}$) lub $z \mapsto a\overline{z}+b$ (gdy zmienia orientację), gdzie $a, b \in \mathbb{C}, a \neq 0$.

Ćwiczenie (na bazie zadania z 53 Olimpiady Matematycznej). Na bokach ab i ac trójkąta abc zbudowano po jego zewnętrznej stronie kwadraty $abde$ i $acfg$. Punkty p i q to środki odcinków dg i ef. Dowieść, że odcinki pq i bc są równoległe i wyznaczyć możliwe wartości stosunku ich długości. Uogólnić to na przypadek, gdy $abde$ i $acfg$ są podobnymi trapezami równoramiennymi, z odpowiadającymi sobie przy podobieństwie podstawami ab i ac.

Oznaczenia i nazwy. Na płaszczyźnie $\mathbb{C}$ rozważamy „zwykłą” metrykę euklidesową $(z_1, z_2) \mapsto |z_1 - z_2|$ i wyznaczoną przez nią topologię. Otwarty zbiór spójny $U \subset \mathbb{C}$ nazywamy **obszarem**. Przez $D(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$ oznaczamy **koło otwarte** o środku z_0 i promieniu r, zaś przez $\overline{D}(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq r\}$ – odpowiednie **koło domknięte**. Niepuste koło otwarte nazywamy **dyskiem**.

2 Ciągłość i różniczkowalność funkcji zespolonych.

Dla $z, z_1, z_2 \dots \in \mathbb{C}$ piszemy $\lim_{n\to\infty} z_n = z$, gdy $\lim_{n\to\infty} |z_n - z| = 0$ (równoważnie: $\lim_{n\to\infty} \operatorname{Re} z_n = \operatorname{Re} z$ oraz $\lim_{n\to\infty} \operatorname{Im} z_n = \operatorname{Im} z$). Jest to więc ta sama zbieżność ciągu punktów płaszczyzny, którą badamy na Analizie II. Podobnie, dla $U \subset \mathbb{C}$ możemy funkcję $f : U \to \mathbb{C}$ traktować jako funkcję dwóch zmiennych o wartościach w $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$; pozwala to określić, kiedy ta funkcja jest ciągła na całym zbiorze U lub w danym punkcie $z_0 \in U$.

Zadanie. Funkcje $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, określone wzorami $(z_1, z_2) \mapsto z_1 + z_2$ i $(z_1, z_2) \mapsto z_1 z_2$, są ciągłe. Podobnie, ciągłe są funkcje $\mathbb{C} \ni z \mapsto \overline{z} \in \mathbb{C}$ i $\mathbb{C} \setminus \{0\} \ni z \mapsto 1/z \in \mathbb{C}$.

Definicja. a) Gdy $t_0 \in (a,b) \subset \mathbb{R}$, to dla funkcji $f : (a,b) \to \mathbb{C}$ przyjmujemy

$$f'(t_0) \stackrel{def}{=} \lim_{t \to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}, \quad \text{gdy ta granica istnieje (w przestrzeni} \mathbb{C}).$$

b) Także dla zbioru otwartego $U \subset \mathbb{C}$, funkcji $f : U \to \mathbb{C}$ i $z_0 \in U$:

$$f'(z_0) \stackrel{def}{=} \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}, \quad \text{gdy ta granica istnieje (w przestrzeni } \mathbb{C}). \tag{1}$$

Dla funkcji określonych na zbiorach otwartych (w $\mathbb{R}$ lub w $\mathbb{C}$) mają miejsce zwykłe reguły:

1. $(f \pm g)'(z_0) = f'(z_0) \pm g'(z_0)$, gdy $z_0 \in \mathrm{dom}(f) = \mathrm{dom}(g)$,
2. $(fg)'(z_0) = f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0)$, gdy $z_0 \in \mathrm{dom}(f) = \mathrm{dom}(g)$,
3. $\left(\frac{1}{g}\right)'(z_0) = \frac{-g'(z_0)}{g(z_0)^2}$,gdy $z_0 \in \mathrm{dom}(g)$ i $g(z_0) \neq 0$,
4. $(f \circ g)'(z_0) = f'(g(z_0))g'(z_0)$, gdy $z_0 \in \mathrm{dom}(g)$ i $\mathrm{im}(g) \subset \mathrm{dom}(f)$.

Oznaczają one: gdy wyrażenia po prawej są zdefiniowane, to wyrażenia po lewej – też, i są im równe. Z 1 i 2 wynika łatwo wzór na pochodną wielomianu: $(\sum_{k=0}^n c_k z^k)' = \sum_{k=1}^n k c_k z^{k-1}$.

Przypomnijmy, że gdy f traktować jako funkcję dwóch zmiennych rzeczywistych, to jest ona różniczkowalna (w sensie omawianym na Analizie II) w punkcie $z_0 \in U$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje przekształcenie liniowe $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ spełniające warunek:

$$f(z_0 + h) = f(z_0) + L(h) + \mathrm{reszta}(h), \text{ gdzie } \lim_{h \to 0} \mathrm{reszta}(h)/|h| = 0. \tag{*}$$

Przekształcenie L, jeśli istnieje, to jest jedyne. Nazywamy je **pochodną rzeczywistą** funkcji f, w punkcie z_0, i oznaczamy przez $\mathrm{d}f(z_0)$. Jego macierz (oznaczmy ją $[L]$) jest taka:

$$[L] = \begin{pmatrix} u_x(z_0) & u_y(z_0) \\ v_x(z_0) & v_y(z_0) \end{pmatrix}, \quad \text{gdzie } f(z) = (u(z), v(z)) \in \mathbb{R}^2 \text{ dla } z \in U. \tag{**}$$

Przypomnijmy też, że warunkiem wystarczającym istnienia pochodnej rzeczywistej $L = \mathrm{d}f(z_0)$ jest istnienie i ciągłość pochodnych cząstkowych u_x, u_y, v_x, v_y w pewnym otoczeniu punktu z_0, zaś warunkiem koniecznym – istnienie pochodnych cząstkowych w punkcie z_0.

Twierdzenie 1. *Dla przekształcenia $f : U \to \mathbb{C}$, gdzie $U \subset \mathbb{C}$ jest zbiorem otwartym, równoważne są warunki:*

a) istnieje pochodna $f'(z_0)$ w punkcie z_0, zdefiniowana w (1),

b) istnieje pochodna rzeczywista funkcji f w punkcie z_0 i jej macierz jest postaci $\left(\begin{smallmatrix} p & -q \\ q & p \end{smallmatrix}\right)$, gdzie $p, q \in \mathbb{R}$.

Ponadto, gdy warunek b) jest spełniony, to $f'(z_0) = p + q\mathrm{i}$.

Dowód. $b) \implies a)$. Niech przekształcenie liniowe L spełnia warunek (*) i niech $[L] = \left(\begin{smallmatrix} p & -q \\ q & p \end{smallmatrix}\right)$. Na mocy uwagi 2 w §1 zachodzi $L(h) = (p + q\mathrm{i}) \cdot h$ dla $h \in \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$, wobec czego (*) oznacza, że $\lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} = p + q\mathrm{i}$.

$a) \implies b)$. Odwrotnie, gdy $f'(z_0) = a \in \mathbb{C}$, to biorąc $p = \operatorname{Re} a, q = \operatorname{Im} a$ stwierdzamy, że przekształcenie $L(h) \stackrel{def}{=} (p+q\mathrm{i}) \cdot h$ spełnia warunek (*). Istnieje więc pochodna rzeczywista $\mathrm{d}f(z_0)$ i jej macierz jest na mocy uwagi 2 w §1 równa $\left(\begin{smallmatrix} p & -q \\ q & p \end{smallmatrix}\right)$. □

Uwaga 1. Niech $u := \operatorname{Re} f$ i $v := \operatorname{Im} f$. Z (**) wynika, że warunek b) jest równoważny następującemu:

b') istnieje pochodna rzeczywista $\mathrm{d}f(z_0)$ i spełnione są **równania Cauchy – Riemanna**:

$$u_x(z_0) = v_y(z_0) \ \text{ i } \ v_x(z_0) = -u_y(z_0).$$

Ponadto, twierdzenie orzeka, że gdy warunek ten jest spełniony, to $f'(z_0) = p + q\mathrm{i}$, gdzie $p = u_x(z_0) = v_y(z_0)$ i $q = v_x(z_0) = -u_y(z_0)$.

Uwaga 2. Geometrycznie, warunek b) oznacza, że pochodna rzeczywista $\mathrm{d}f(z_0)$ istnieje i jest złożeniem obrotu i jednokładności płaszczyzny, oba o środku w zerze. (Patrz w §1 stwierdzenie 1 i uwaga 2. Przekształcenie zerowe traktujemy jako jednokładność o skali 0.) ⊟

Zadanie. Niech $f : U \to \mathbb{C}$, gdzie zbiór $U \subset \mathbb{C}$ jest otwarty. Udowodnić, że:

a) Gdy zbiór U jest spójny oraz $f' = 0$, to $f = \text{const}$.

b) Gdy istnieje pochodna $f'(z_0)$, to istnieje i pochodna funkcji $g(z) := \overline{f(\overline{z})}$ w punkcie $\overline{z_0}$.

Ćwiczenie. Niech dany będzie wielomian zespolony $f(z) = c\prod_{i=1}^{n}(z - z_i)$. Udowodnić, że gdy $f(w) \neq 0$, to $f'(w)/f(w) = \sum_i 1/(w - z_i)$, wobec czego jeśli ponadto $f'(w) = 0$, to $\sum_i (w - z_i)/|w - z_i|^2 = 0$. Wywnioskować, że każde zero w wielomianu f' jest postaci $w = \sum_i t_i z_i$ dla pewnych $t_1, ..., t_n \geq 0$ takich, że $\sum_i t_i = 1$, tzn. w należy do powłoki wypukłej zbioru zer wielomianu f. (Jest to **twierdzenie Gaussa-Lucasa**).

3 Ciągi i szeregi funkcji zespolonych.

Niech zbiór U będzie otwarty lub domknięty w $\mathbb{C}$ i niech $f, f_n : U \to \mathbb{C}$, gdzie $n = 1, 2, \ldots$. Przyjmijmy dla $K \subset U$:

$$\|f\|_K = \sup\{|f(z)| : z \in K\}.$$

Zadanie. Dowieść równoważności następujących warunków:

i) Na każdym zbiorze zwartym $K \subset U$, ciąg $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ jest zbieżny jednostajnie do funkcji f (przez co rozumiemy, że $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_K = 0$, dla każdego zbioru K j.w.).

ii) Każdy punkt $z_0 \in U$ posiada otoczenie $D \subset U$, na którym ciąg $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ jest zbieżny jednostajnie do funkcji f.

(Wskazówka: warunki te są równoważne i wtedy, gdy U jest dowolną przestrzenią **lokalnie zwartą** – taką, w której każdy punkt posiada zwarte otoczenie.)

Definicja. Gdy te dwa warunki są spełnione to mówimy, że **ciąg** $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ **jest niemal jednostajnie zbieżny** do funkcji f (na zbiorze U).

Uwaga 1. Granica niemal jednostajnie zbieżnego ciągu $(f_n : U \to \mathbb{C})_{n=1}^{\infty}$ funkcji ciągłych jest funkcją ciągłą. Istotnie, jest tak dla ciągów jednostajnie zbieżnych, wobec czego każdy punkt $z_0 \in U$ ma otoczenie, na którym funkcja graniczna jest ciągła. $\square$

Zadanie. Gdy ciąg funkcji $f_n : U \to \mathbb{C}$ zbiega do f niemal jednostajnie, to ciąg złożeń $f_n \circ h$ z funkcją ciągłą $h : U' \to U$ zbiega tak do $f \circ h$.

Definicja. Powiemy też, że **szereg** $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ **jest niemal jednostajnie zbieżny** (odpowiednio: jednostajnie zbieżny) na U, jeśli własność tę ma ciąg funkcji

$$\sigma_n(z) = \sum_{k=0}^{n} f_k(z), \quad z \in U.$$

Zaś szereg ten nazwiemy **niemal normowo zbieżnym**, jeśli każdy punkt $z \in U$ ma otoczenie K takie, że $\sum_n ||f_n||_K < \infty$. (Słowo „niemal" bywa zastępowane przez „**lokalnie**").

Uwaga 2. a) Ma miejsce **kryterium porównawcze Weierstrassa**: szereg funkcyjny $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$, **majoryzowany** przez liczbowy szereg zbieżny $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ (tzn. taki, że dla wszystkich $z \in U$ i $n \geq 0$ spełnione są nierówności $|f_n(z)| \leq c_n$, gdzie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n < \infty$), jest zbieżny jednostajnie. Jeśli więc ponadto funkcje f_n są ciągłe, to i funkcja $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ jest ciągła na U.

b) Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ liczb zespolonych, dla którego $\sum_n |z_n| < \infty$, jest zbieżny, a jego suma nie zależy od porządku sumowania – czego dowodzi się jak na Analizie I.

c) Wynika stąd, że niemal normowo zbieżny szereg funkcyjny jest zbieżny niemal jednostajnie, a jego suma nie zależy od porządku sumowania. $\boxminus$

4 Zespolone szeregi potęgowe.

Przez **szereg potęgowy** zmiennej z, **o środku** w z_0 (lub: **wokół** z_0), rozumiemy szereg funkcyjny $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$, gdzie $z_0, c_0, c_1, \ldots \in \mathbb{C}$.

Uwaga 1. Niekiedy jednak w wyrażeniu $\sum_n c_n(z - z_0)^n$ traktujemy z jako ustaloną liczbę zespoloną, a nie jako zmienną. Nie prowadzi to do nieporozumień, bo odróżnienie tych przypadków jest łatwe.

Twierdzenie 1 (Abel–Cauchy–Hadamard)**.** *Liczba*

$$R = 1/\overline{\lim} \sqrt[n]{|c_n|} \in [0, \infty]$$

ma następujące własności: gdy $|w - z_0| > R$, *to szereg* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(w - z_0)^n$ *nie jest zbieżny (bo jego wyrazy nie dążą do 0), zaś gdy* $0 < r < R$, *to szereg* $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n| r^n$ *jest zbieżny i wobec tego szereg* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$ *jest zbieżny normowo na dysku* $|w - z_0| \leq r$. $\boxminus$

Liczbę R nazywamy **promieniem zbieżności** szeregu $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$.

Uwaga 2. Z twierdzenia wynika, że

a) Na dysku $|w - z_0| < R$ szereg $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ zbiega niemal normowo, oraz

b) Jeśli szereg $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ jest zbieżny w punkcie $z = w$, to $|w - z_0| \leq R$.

Twierdzenie 2 (Abela o różniczkowaniu szeregów potęgowych). *a) Szereg $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ ma ten sam promień zbieżności R, co szereg $\sum_{n=1}^{\infty} nc_n(z-z_0)^{n-1}$.*

b) Na dysku $D = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}$ pierwszy szereg jest zbieżny do funkcji f, której pochodna jest sumą drugiego szeregu.

Dowód. Część a) łatwo wynika stąd, że $\lim \sqrt[n]{n+1} = 1$.

Ad b) Możemy założyć, że $z_0 = 0$. Ustalmy punkt $p \in D$; dowiedziemy istnienia pochodnej $f'(p)$ i równości $f'(p) = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n p^{n-1}$. W tym celu ustalmy $r \in (|p|, R)$ i zauważmy, że

$$\frac{f(z)-f(p)}{z-p} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \frac{z^n - p^n}{z-p} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(z^{n-1} + z^{n-2}p + \cdots + p^{n-1}) \text{ dla } z \in D(0,r) \setminus \{p\}.$$

Z nierówności $|z| < r$ i $|p| < r$ wynika, że ostatni szereg jest majoryzowany przez szereg zbieżny $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n| n r^{n-1}$. Jego suma jest więc ciągłą funkcją zmiennej $z \in D(0,r)$, na podstawie a) i uwagi 2 w §3. Stąd granica $\lim_{z\to p} (f(z) - f(p))/(z-p)$ istnieje i jest równa wymienionej sumie dla $z = p$, a tą jest $\sum_{n=1}^{\infty} c_n n p^{n-1}$. □

Wniosek 1. *Jeśli $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ dla wszystkich z w pewnym otoczeniu punktu z_0, to prawdziwe są* **wzory Taylora***, jednoznacznie wyznaczające współczynniki c_n:*

$$c_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0) \quad dla\ n = 0, 1, \ldots \tag{2}$$

Dowód. Stosujemy n-krotnie twierdzenie 2, otrzymując równość $f^{(n)}(z_0) = n!\, c_n$.

Wniosek 2. *Suma szeregu potęgowego $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$, zbieżnego w dysku $D = D(z_0, r)$, ma w D pochodną i funkcję pierwotną, będące sumami szeregów potęgowych, odpowiednio, $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)c_{n+1}(z-z_0)^n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{n-1}}{n}(z-z_0)^n$, niemal normowo zbieżnych w D.* ⊟

Przykład. Szereg $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ jest w dysku $D = D(0,1)$ zbieżny do funkcji $1/(1-z)$. Szereg $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)z^n$ jest więc w D niemal normowo zbieżny do funkcji $-(1-z)^{-2}$, a szereg $-\sum_{n=1}^{\infty} (1/n)z^n$ – do funkcji g takiej, że $g'(z) = 1/(1-z)$ dla $z \in D$. □

Gdy funkcja f rozwija się na pewnym dysku o środku w z_0 w zbieżny szereg $\sum_n c_n(z-z_0)^n$, to szereg ten nazywamy jej **szeregiem Taylora wokół** z_0. Możemy założyć, że $z_0 = 0$ (gdy nie, f zastąpimy przez $z \mapsto f(z + z_0)$), a wtedy mówimy o **szeregu Maclaurina** funkcji f.

Zadanie. * (Twierdzenie Abela o ciągłości.) Gdy szereg $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ jest zbieżny, to funkcja $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ jest dla każdej liczby $d > 0$ ciągła w punkcie 1 na zbiorze $K_d := \{z : |z| + d|1-z| \leq 1\}$. Ponadto, K_d zawiera czworokąt $0a1\overline{a}$, gdzie $\angle(0a1) = \pi/2$ i $\angle(01a) \to \pi/2$ gdy $d \to 0$. (Wskazówka: przyjąć $f_k(z) := \sum_{n=0}^{k} c_n z^n$, $s_k := f_k(1)$, $s = f(1)$ i gdy $|z| < 1$ dowieść kolejno, że $f(z) = (1-z)\sum_{n=0}^{\infty} s_n z^n$ i $f(z) - s = (1-z)\sum_{n=0}^{\infty}(s_n - s)z^n$. Dla odpowiednio dużego N oszacować $|\sum_{n=N}^{\infty}(s_n - s)z^n|$ przez $\varepsilon/(1-|z|)$.)

5 Funkcje holomorficzne i funkcje analityczne (definicje).

Definicja. Niech f będzie funkcją o wartościach w $\mathbb{C}$, określoną na zbiorze $\mathrm{dom}(f) \subset \mathbb{C}$.

a) Funcję f nazywamy **holomorficzną**, jeśli $\mathrm{dom}(f)$ jest zbiorem owartym i pochodna $f'(p)$ istnieje w każdym punkcie $p \in \mathrm{dom}(f)$.

b) Funcję f nazywamy **analityczną**, jeśli dla każdego punktu $p \in \mathrm{dom}(f)$ istnieje taki szereg potęgowy $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ i otoczenie $G \subset \mathrm{dom}(f)$ punktu p w $\mathbb{C}$, że $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ dla $z \in G$.

c) Funkcję f nazywamy holomorficzną (odp. analityczną) **w zbiorze** U, jeśli istnieje taki zbiór otwarty G, że $U \subset G \subset \mathrm{dom}(f)$ i funkcja $f_{|G}$ jest holomorficzna (odp. analityczna).

d) Zbiór wszystkich funkcji z U do $\mathbb{C}$, holomorficznych w U, oznaczamy przez $H(U)$.

Uwaga 1. i) Okaże się, że w (b) można wziąć $z_0 = p$, na razie jednak nie jest to istotne.

ii)* Jeśli zastąpić $\mathbb{C}$ przez $\mathbb{R}$ i w (b) żądać, by $c_n \in \mathbb{R}$ dla $n = 0, 1 \ldots$, to otrzymamy definicję **funkcji $\mathbb{R}$-analitycznej**.

Uwaga 2. Z reguł podanych w §2 wynika, że gdy $f, g \in H(U)$, to $f \pm g \in H(U)$ i $f \cdot g \in H(U)$, jak również, że $f/g \in H(U)$ jeśli $0 \notin g(U)$. Podobnie złożenie funkcji holomorficznych, jeśli jest określone, to jest funkcją holomorficzną.

Twierdzenie 1. *Niech promień zbieżności szeregu $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ wynosi R. Wówczas na dysku $D = D(z_0, R)$ szereg ten jest niemal normowo zbieżny do pewnej funkcji holomorficznej $f : D \to \mathbb{C}$. Ponadto,*

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n (z-z_0)^{n-1} \quad \textit{dla } z \in D. \tag{0}$$

Dowód. Z twierdzenia 2 w §4 wynika, że dla $r \in [0, R)$ oba szeregi są jednostajnie zbieżne na $D(z_0, r)$ do pewnych funkcji f i g, odpowiednio, przy czym $f' = g$. □

Wniosek 1. *a) Funkcja analityczna jest zarazem funkcją holomorficzną.*
b) Pochodna funkcji analitycznej jest funkcją analityczną. □

Wniosek 2 (i definicja)**.** *Gdy $U \subset \mathbb{C}$ jest zbiorem otwartym i funkcja $f : U \to \mathbb{C}$ jest analityczna, to $u := \mathrm{Re}\, f$ jest funkcją harmoniczną w U, tzn. u jest klasy C^2 i spełnia równanie Laplace'a $u_{xx}(z) + u_{yy}(z) = 0$ dla $z \in U$. Tak jest samo dla części urojonej $v := \mathrm{Im}\, f$.*

Dowód. Z wniosku 1 wynika istnienie i ciągłość (w otoczeniu zbioru U) drugiej pochodnej f'', a więc też istnienie i ciągłość drugich pochodnych cząstkowych funkcji u i v. Jak wiemy z Analizy II, zapewnia to równości $u_{xy} = u_{yx}$ i $v_{xy} = v_{yx}$, które w połączeniu ze wzorami Cauchy'ego–Riemanna dają tezę wniosku. □

Uwaga 3. Prawdziwe jest znacznie głębsze „odwrócenie" części a) wniosku 1: funkcja, holomorficzna w zbiorze U, rozwija się na każdym dysku $D(z_0, r) \subset U$ w szereg Taylora o środku w z_0. Dowiedziemy tego w rozdziale IV. Oczywiście, z tego ważnego twierdzenia nie będziemy korzystać do momentu udowodnienia go – poza jednak poniższą uwagą, mającą na celu przedstawienie sposobów znajdywania współczynników szeregu Maclaurina pewnych funkcji analitycznych. (Podobne wyniki o szeregach mogą być znane z AM I.)

Uwaga 4. Niech funkcje f, g, h będą analityczne w otoczeniu zera i rozwijają się w nim w szeregi $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ i $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, odpowiednio. Opiszemy związek między tymi szeregami w następujących trzech sytuacjach:

a) $h = f \cdot g$.

Wtedy $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ dla $k = 0, 1, 2, ...$, tzn. $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ jest **iloczynem Cauchy'ego szeregów** $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ i $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$. Wynika to z równości $c_n = (fg)^{(n)}(0)/n!$ i formuły Leibniza $(fg)^{(n)}(0) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(0) g^{(n-k)}(0)$.

b) $h = f/g$, przy czym $b_0 \neq 0$ (inaczej $1/g(0)$ nie ma sensu).

Wówczas $f = gh$ w otoczeniu zera, co prowadzi do równości $a_0 = b_0 c_0$, $a_1 = b_0 c_1 + b_1 c_0$, $a_2 = b_0 c_2 + b_1 c_1 + b_2 c_0$ itd, pozwalających kolejno wyznaczać $c_0, c_1, c_2, \ldots$. Odnotujmy, że tak w a), jak w b) (a też niżej w c)), *istnienie* szeregu Maclaurina dla h wynika z zapowiedzianego w uwadze 3 odwrócenia wniosku 1, bo funkcja h jest holomorficzna w otoczeniu zera i przez to rozwija się na pewnym dysku $D(0, r)$ w szereg Maclaurina.

c) $h = f \circ g$, przy czym $g(0) = 0$ (równoważnie: $b_0 = 0$).

(Założenie $g(0) = 0$ zapewnia określoność i holomorficzność funkcji h w otoczeniu zera.) Twierdzimy, że współczynniki $c_0, ..., c_k$ są takie same, jak początkowe (o indeksach $0, 1, ..., k$) współczynniki szeregu Maclaurina funkcji $h_k := a_0 + a_1 g + ... + a_k g^k$ – a te umiemy znaleźć, bo w sposób opisany w a) umiemy to zrobić dla każdej z funkcji $g^2 = g \cdot g, g^3 = g^2 \cdot g, ..., g^k$.

Dla uzasadnienia oznaczmy sumy szeregów $\sum_{i=0}^{k} a_i z^i$, $\sum_{i=0}^{\infty} a_{k+i+i} z^i$ i $\sum_{i=0}^{\infty} b_{i+1} z^i$ przez f_1, r i g_1, odpowiednio. Na otoczeniu zera zachodzi $f = f_1 + z^{k+1} r$ i $g = z g_1$, skąd $f \circ g = f_1 \circ g + z^{k+1} R$, gdzie $R := g_1^{k+1} \cdot (r \circ g)$. Funkcje $f_1 \circ g$ i R są holomorficzne w otoczeniu zera, na podstawie uwagi 2, wobec czego każdą z nich można zgodnie z uwagą 3 rozwinąć w szereg Maclaurina. Zatem i funkcja $z^{k+1} R$ rozwija się w szereg Maclaurina, którego współczynniki przy z^n są niezerowe tylko dla $n > k$ – co wraz z równością $h = f_1 \circ g + z^{k+1} R$ dowodzi tezy.

Uwaga 5. Tak w a), jak w b) i c), każdy ze współczynników c_k zależy tyko od współczynników a_i i b_i o numerach $i = 0, ..., k$.

Przykład. Niech funkcja f ma szereg Maclaurina, zaczynający się od $1 - \frac{1}{12} z^2 + 0 z^3$. Obliczymy współczynnik przy z^3 szeregu Maclaurina funkcji $g = (z - c)/f^2$, gdzie $c \in \mathbb{C}$. W tym celu piszmy $F \equiv G$ dla zaznaczenia, że funkcje F i G mają identyczne szeregi Maclaurina do stopnia 3 włącznie. Ponieważ $(1 - \frac{1}{12} z^2)^2 = 1 - \frac{1}{6} z^2 + \frac{1}{144} z^4 \equiv 1 - \frac{1}{6} z^2$, więc $g \equiv (z - c)/(1 - \frac{1}{6} z^2)$; patrz uwaga 5. Możemy dalej rachunek przeprowadzać jak w b), a można i następująco: wobec tożsamości $1/(1 - w) = \sum_{n=0}^{\infty} w^n$ gdy $|w| < 2$, na otoczeniu zera zachodzi $1/(1-\frac{1}{6}z^2) = 1+\frac{1}{6}z^2+\frac{1}{36}z^4+... \equiv 1+\frac{1}{6}z^2$, skąd $f \equiv (z-c)(1+\frac{1}{6}z^2) = -c+z-\frac{c}{6}z^2+\frac{1}{6}z^3$. Szukany współczynnik jest więc równy 1/6. $\square$

Ćwiczenie. Niech $f(z) = \frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}z+\frac{1}{3!}z^2+...$ Funkcję $1/f$ rozwijamy w szereg $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{n!}z^n$.

a) Wyznaczyć cztery pierwsze **liczby Bernoulliego** $B_0, ..., B_3$.

b) Dowieść zależności rekurencyjnej $B_n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_k$ dla $n \geq 2$.

6 Przykłady ważnych funkcji analitycznych.

A. Funkcja exp i funkcje trygonometryczne.

Promień zbieżności szeregu $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}z^n$ jest równy ∞. Zatem suma tego szeregu określa pewną funkcję analityczną $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, oznaczaną przez exp lub przez $z \mapsto \mathrm{e}^z$. Tak samo, istnieją funkcje **cosinus** i **sinus**, wyznaczone dla $z \in \mathbb{C}$ wzorami:

$$\cos z := 1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\frac{z^6}{6!}+\ldots, \qquad \sin z := z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\frac{z^7}{7!}+\ldots$$

Z wykładu Analizy I wynika, że dla $z \in \mathbb{R}$ wartości $\mathrm{e}^z, \cos z$ i $\sin z$ pokrywają się z tam omawianymi. Bez trudu otrzymujemy też **wzory Eulera**

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} = \cos z + \mathrm{i}\sin z, \quad \cos z = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}\right), \quad \sin z = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}\right) \tag{1}$$

Natomiast z twierdzenia 2 w §4 wynikają zależności

$$\exp' = \exp, \qquad \sin' = \cos, \qquad \cos' = -\sin. \tag{2}$$

Dalej, dla $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ mamy:

$$\mathrm{e}^{z_1+z_2} = \mathrm{e}^{z_1}\mathrm{e}^{z_2}, \text{ skąd } \mathrm{e}^z \neq 0 \text{ i } \mathrm{e}^{-z} = 1/\mathrm{e}^z \tag{3a}$$

$$\cos(z_1+z_2) = \cos(z_1)\cos(z_2) - \sin(z_1)\sin(z_2) \tag{3b}$$

$$\sin(z_1+z_2) = \cos(z_1)\sin(z_2) + \sin(z_1)\cos(z_2) \tag{3c}$$

$$\cos z = \sin(z+\frac{\pi}{2}),\ \sin z = -\cos(z+\frac{\pi}{2}),\ (\cos z)^2 + (\sin z)^2 = 1 \tag{3d}$$

Pierwszej z tych czterech równości najłatwiej dowieść tak: pochodna funkcji $z \mapsto \mathrm{e}^{z+z_1}\mathrm{e}^{-z}$ jest równa 0, na mocy (2) i wzoru na pochodną iloczynu; funkcja ta jest więc stała i równa swej wartości w zerze, tzn. e^{z_1}. To daje $\mathrm{e}^z\mathrm{e}^{-z} = 1$ i $\mathrm{e}^{z+z_1} = \mathrm{e}^z\mathrm{e}^{z_1}, \forall z \in \mathbb{C}$. Kolejne dwie tożsamości, których (3d) jest przypadkiem szczególnym, wynikają z (3a) i wzorów Eulera.

Funkcje $\exp, \cos, \sin$ wyrazić można jako funkcje zmiennych $x = \mathrm{Re}(z)$ i $y = \mathrm{Im}(z)$:

$$\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^x(\cos y + \mathrm{i}\sin y), \tag{4a}$$

$$\cos z = \cos x \operatorname{ch} y - \mathrm{i}\sin x \operatorname{sh} y, \tag{4b}$$

$$\sin z = \sin x \operatorname{ch} y + \mathrm{i}\cos x \operatorname{sh} y. \tag{4c}$$

gdzie **cosinus hiperboliczny** ch i **sinus hiperboliczny** sh to funkcje określone tak:

$$\operatorname{ch} z := \cos(\mathrm{i}z) = \frac{\mathrm{e}^z + \mathrm{e}^{-z}}{2}, \qquad \operatorname{sh} z := -\mathrm{i}\sin(\mathrm{i}z) = \frac{\mathrm{e}^z - \mathrm{e}^{-z}}{2} \quad \text{dla } z \in \mathbb{C}. \tag{5}$$

Istotnie, (4a) wynika z (3a) i (1), a (4b,c) z (3b,c) i (5). Odnotujmy, że funkcje ch i sh w analogiczny sposób wyznaczają cos i sin, wzorami

$$\cos z = \operatorname{ch}(\mathrm{i}z), \quad \sin z = -\mathrm{i}\operatorname{sh}(\mathrm{i}z).$$

Wynikają stąd tożsamości pomiędzy ch i sh, odpowiadające tożsamościom (3a), (3b), (3c).

Dla każdej liczby zespolonej w przyjmijmy $w\mathbb{Z} = \{wk : k \in \mathbb{Z}\}$, gdzie $\mathbb{Z}$ to zbiór liczb całkowitych. Twierdzimy, że

$$\exp(z_1) = \exp(z_2) \Leftrightarrow z_1 - z_2 \in 2\pi\mathrm{i}\mathbb{Z} \tag{6a}$$
$$\cos(z_1) = \cos(z_2) \Leftrightarrow (z_1 - z_2 \in 2\pi\mathbb{Z} \ \text{ lub } z_1 + z_2 \in 2\pi\mathbb{Z}) \tag{6b}$$
$$\sin(z_1) = \sin(z_2) \Leftrightarrow (z_1 - z_2 \in 2\pi\mathbb{Z} \ \text{ lub } \ z_1 + z_2 + \pi \in 2\pi\mathbb{Z}) \tag{6c}$$

Istotnie, $\exp(z_1) = \exp(z_2) \Leftrightarrow \exp(z_1 - z_2) = 1$, wobec czego (6a) wynika stąd, że $\exp(x + iy) = 1 \Leftrightarrow (x = 0 \text{ i } y \in 2\pi\mathbb{Z})$. (Korzystamy z (4a).) A że $W + \frac{1}{W} = w + \frac{1}{w} \Leftrightarrow W = w$ lub $W = 1/w$ (równanie jest kwadratowe względem W), więc z (6a) i (1) łatwo otrzymujemy (6b). Natomiast (6c) jest konsekwencją (6b) i (3d).

Nazwijmy liczbę z_0 **okresem** funkcji $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, jeśli $f(z_0 + z) = f(z)$ dla wszystkich $z \in \mathbb{C}$. Z (6) wynika, że *zbiorem okresów funkcji* cos *i funkcji* sin *jest* $2\pi\mathbb{Z}$, *zaś zbiorem okresów funkcji* exp *jest* $2\pi\mathrm{i}\mathbb{Z}$.

By wyobrazić sobie, jak omawiane trzy funkcje przekształcają płaszczyznę $\mathbb{C}$, rozważmy na niej siatkę prostych K_x i L_y $(x, y \in \mathbb{R})$, równoległych do osi współrzędnych:

$$K_x = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) = x\}, \quad L_y = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) = y\}$$

Z (4a) wynika, że obrazem prostej K_x przy przekształceniu exp jest okrąg $\{z' : |z'| = \mathrm{e}^x\}$, a obrazem prostej L_y jest półprosta otwarta $\{z' \in \mathbb{C}\setminus\{0\} : \arg(z') = y\}$. Otrzymane rodziny półprostych i okręgów wypełniają oczywiście zbiór $\mathbb{C}\setminus\{0\}$, skąd ten jest obrazem płaszczyzny $\mathbb{C}$ przy funkcji exp.

Natomiast przekształcenie cos przeprowadza prostą $L_y\,(y \neq 0)$ na zbiór punktów $z' = x' + y'\mathrm{i}$, który na mocy (4b) zadany jest równaniem:

$$\left(\frac{x'}{\operatorname{ch} y}\right)^2 + \left(\frac{y'}{\operatorname{sh} y}\right)^2 = 1$$

Przedstawia ono elipsę o środku w 0 i półosiach długości $\operatorname{ch} y$ i $|\operatorname{sh} y|$.

Pytanie: Czym jest obraz prostej K_x przy funkcji cos, gdy $x \notin (\pi/2)\mathbb{Z}$? (Odp.: jest on tym ramieniem hiperboli $(x'/\cos x)^2 - (y'/\sin x)^2 = 1$, które położone jest w półpłaszczyźnie $\operatorname{sgn} x' = \operatorname{sgn}(\cos x)$.)

Odnotujmy też, że przeliczalnie wiele prostych K_x i prosta L_0 są przez $f = \cos$ przeprowadzane w wyjątkowy sposób: obrazem prostej L_0 jest odcinek $[-1, 1]$, a obrazem prostej K_x – półprosta $[1, \infty)_{\mathbb{R}}$ gdy $x \in 2\pi\mathbb{Z}$, półprosta $(-\infty, -1]_{\mathbb{R}}$ gdy $x \in \pi + 2\pi\mathbb{Z}$, zaś prosta $\mathrm{i}\mathbb{R}$ gdy $x \in \pi/2 + \pi\mathbb{Z}$. (Dlaczego?) Kto pamięta własności stożkowych, wywnioskuje z równości $\mathrm{ch}^2\, y - \mathrm{sh}^2\, y = 1$ i $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, że -1 i 1 są ogniskami każdej z elips $f(L_y)$ i (ramion) hiperbol $f(K_x)$. Wynika stąd, a ogólniejszą przyczynę poznamy w rozdziale V, że każda z hiperbol jest prostopadła do każdej z elips. Prosta $\mathrm{i}\mathbb{R}$, obie półproste i opisana rodzina ramion hiperbol wypełniają w sposób rozłączny całą płaszczyznę, co wynika z poniższego zadania. (Można zamiast niego użyć pierwszego z zadań z §1, jeśli przedstawić cos jako złożenie $j \circ \exp \circ g$, gdzie $g(z) = \mathrm{i}z$ i $j(z) = \frac{1}{2}(z + z^{-1})$.) To samo tyczy się opisanej rodziny elips i odcinka $[-1, 1]$. Dla każdej z tych przyczyn, obrazem funkcji cos jest cała płaszczyzna $\mathbb{C}$.

Zadanie. Dla danych liczb $X, Y > 0$ istnieje dokładnie jedna para liczb $a, b > 0$ takich, że $a + b = 1$ i $X/a - Y/b = 1$. (Wskazówka: rozważyć funkcję $a \mapsto X/a - Y/(1 - a)$. W zastosowaniu, rolę X i Y grają kwadraty współrzędnych punktu płaszczyzny.)

[RYSUNKI] Zagubiłem rysunki z 2004r, więc odsyłam do istniejących teraz w sieci, np.
`http://www.matematicasvisuales.com/english/html/complex/functions/cosine.html`
`http://math.stackexchange.com/questions/54713/complex-cosine-and-sine`

Na rysunkach (gdy je wzbogacić) dostrzec można też ślady okresowości funkcji exp i cos. Płaszczyzna $\mathbb{C}$ jest bowiem podzielona prostymi $K_{n\pi}, n \in \mathbb{Z}$, na pasy

$$V_n = \{z \in \mathbb{C} : n\pi < \mathrm{Re}(z) < (n + 1)\pi\}.$$

Każdy pas V_n jest przez funkcję $f = \cos$ przeprowadzany w sposób różnowartościowy na zbiór $\bigcup\{f(K_x) : n\pi < x < (n + 1)\pi\}$, równy $(\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}) \cup (-1, 1)$. (Korzystamy z (6b) oraz, ponownie, z zadania i wcześniejszego opisu zbiorów $f(K_x)$.) Na sąsiadujących pasach V_{n-1} i V_n przekształcenie cos przeprowadza pary punktów, symetryczne względem rozdzielającej pasy prostej $K_{n\pi}$, na pary symetryczne względem osi rzeczywistej, co wynika z 4b).

Podobnie, płaszczyzna jest podzielona prostymi $L_{2n\pi}, n \in \mathbb{Z}$, na pasy

$$H_n = \{z \in \mathbb{C} : 2n\pi < \mathrm{Im}(z) < 2(n + 1)\pi\},$$

z których każdy jet przez funkcję exp przeprowadzany są w sposób różnowartościowy na $\mathbb{C} \setminus [0, \infty)_{\mathbb{R}}$. (Korzystamy z (6a).)

Jeśli rolę pasów zamienić, to odnotujemy, że funkcja exp nawija pasy V_n na pierścienie $\mathrm{e}^{n\pi} < |z| < \mathrm{e}^{(n+1)\pi}$, natomiast funkcja cos nawija pasy H_n na zdeformowane pierścienie, ograniczone parą elips. Użycie słowa „nawija” wiąże się z cyklicznością przekształcenia: w obu bowiem przypadkach i dla dowolnych punktów p, q jak zaznaczono na rysunkach, domknięty prostokąt o kolejnych wierzchołkach $p, q, q + d, p + d$, gdzie d jest okresem funkcji cos czy exp, przeprowadzany jest na odpowiedni pierścień–i to w analogiczny sposób, jak przylegający prostokąt o wierzchołkach $p, q, q-d$ i $p-d$. (Przypomnijmy, że $d = 2\pi$ gdy $f = \cos$ i $d = 2\pi\mathrm{i}$ gdy $f = \exp$.)

Pytania. a) Czym jest obraz półpłaszczyzny $\operatorname{Im} z > 0$ przy funkcji cos?
b) Kiedy $\cos z \in \mathbb{R}$? Kiedy $\cos(z) = 0$?
c) Jaki jest zbiór wartości funkcji $\operatorname{tg} := \sin / \cos$?

Uwaga 1. Ponieważ $\sin(z) = \cos(z - \pi/2)$, więc rysunki dla funkcji sin są analogiczne, jak dla funkcji cos. Co to oznacza jest kolejnym pytaniem. ⊟

Uwaga 2. Z (6a) wynika, że funkcja exp jest różnowartościowa na podzbiorze płaszczyzny, przecinającym każdą prostą pionową K_x wzdłuż zbioru o średnicy mniejszej niż 2π. Dla przykładu, jest ona różnowartościowa na pasie $|\operatorname{Im} z - \operatorname{Re} z| < 1$. Czytelnik zechce zbadać, czy funkcja cos jest na tym pasie różnowartościowa.

Uwaga 3. * Zatem zdanie „funkcja f jest różnowartościowa na pewnym otoczeniu punktu z" jest prawdziwe przy $f = \exp$ i dowolnym $z \in \mathbb{C}$, zaś przy $f = \cos$ jest ono prawdziwe wtedy i tylko wtedy, gdy $z \notin \pi\mathbb{Z}$. (Wynika to z (6b).) Czytelnik zaznajomiony z pojęciem nakrycia stwierdzi bez trudu (zwłaszcza gdy prócz (6a) skorzysta z twierdzenia 1, które udowodnimy w §8), że funkcja $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ jest nakryciem–jest to jej ważna własność. Czy jest nakryciem funkcja $\cos_{|\mathbb{C}\setminus\pi\mathbb{Z}} : \mathbb{C} \setminus \pi\mathbb{Z} \to \mathbb{C} \setminus \{-1, 1\}$? ⊟

Uwaga 4. * Ponieważ $\cos = j \circ \exp \circ g$, gdzie $j(z) := \frac{1}{2}(z + z^{-1})$ i przekształcenie $g(z) := \mathrm{i}z$ jest obrotem wokół 0, więc z porównania własności funkcji exp i cos wynika, że j przeprowadza okręgi $|z| = r$ na elipsy, a półproste $\{tw : t > 0\}$ na gałęzie hiperbol – jednak poza przypadkami, gdy $r = 1$ lub $w \in \{\pm 1, \pm \mathrm{i}\}$. (Dlaczego?) Bezpośrednią analizę **funkcji Żukowskiego** j znaleźć można w książce Szabata.

Zadanie. a) Gdy $f \in \{\exp, \cos, \sin\}$, to $|f(z)| \le \mathrm{e}^{|z|}$ dla $z \in \mathbb{C}$.
b) * Dla $z = x + \mathrm{i}y$, gdzie $x, y \in \mathbb{R}$, zachodzą równości $|\sin z|^2 = \sin^2 x + \operatorname{sh}^2 y = \operatorname{ch}^2 y - \cos^2 x$ oraz $|\cos z|^2 = \operatorname{sh}^2 y + \cos^2 x = \operatorname{ch}^2 y - \sin^2 x$.
c)* Każdy dysk o promieniu $\pi\sqrt{2}$ zawiera punkt z taki, że $\cos z \in \mathbb{Z}$. (Wskazówka: $\cos^{-1}(\mathbb{Z}) \supset \mathrm{i}A + \pi\mathbb{Z}$ dla pewnego zbioru $A \subset \mathbb{R}$ takiego, że $\operatorname{dist}(t, A) < 1\, \forall t \in \mathbb{R}$.)

Zadanie. Rozważmy kwadrat o środku w 0 i boku równoległym do osi rzeczywistej. Dowieść, że jeśli długość $2N + 1$ jego boku jest liczbą nieparzystą, to na brzegu kwadratu funkcje $\operatorname{ctg}(\pi z)$ i $1/\sin(\pi z)$ są (co do modułu) ograniczone stałą niezależną od N.

B. Funkcje wymierne i sfera Riemanna. Niech ∞ oznacza punkt nie należący do płaszczyzny $\mathbb{C}$ i niech $\widetilde{\mathbb{C}} \overset{def}{=} \{\infty\} \cup \mathbb{C}$. Można $\widetilde{\mathbb{C}}$ dogodnie zamienić w przestrzeń topologiczną, homeomorficzną ze sferą. Jawny wzór na (pewną) metrykę d, zadającą topologię w $\widetilde{\mathbb{C}}$, można uzyskać następująco. Niech $S = \{(z, t) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R} : |z|^2 + t^2 = 1\}$ będzie sferą jednostkową w $\mathbb{C} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^3$, niech $n = (0_{\mathbb{C}}, 1_{\mathbb{R}}) \in S$ i niech $F : S \to \widetilde{\mathbb{C}} \times \{0_{\mathbb{R}}\}$ oznacza **rzut**

stereograficzny, tzn. $F(p)$ jest punktem przecięcia prostej np z płaszczyzną $\mathbb{C}\times\{0_\mathbb{R}\}$ gdy $p\in S\setminus\{n\}$, zaś punktem $(\infty,0_\mathbb{R})$ gdy $p=n$. Przyjmujemy

$$d(z_1,z_2)=\|F^{-1}(z_1,0)-F^{-1}(z_2,0)\| \text{ dla } z_1,z_2\in\widetilde{\mathbb{C}}, \tag{*}$$

gdzie $\|(z,t)\| = \sqrt{|z|^2+t^2}$ oznacza normę euklidesową w $\mathbb{R}^3=\mathbb{C}\times\mathbb{R}$. Przestrzeń $\widetilde{\mathbb{C}}$ nazywana jest **płaszczyzną rozszerzoną** lub **sferą Riemanna**. Z powyższą **metryką sferyczną** d, jest ona izometryczna ze sferą S: izometrią jest rzut F. Jest to więc zwarta przestrzeń metryczna. Zbieżność w niej opisać można tak: dla $z,z_1,z_2,\dots\in\widetilde{\mathbb{C}}$ zachodzi

$$z_n\to z \Leftrightarrow [(z\in\mathbb{C} \text{ i } |z_n-z|\to 0) \text{ lub } (z=\infty \text{ i } |z_n|\to\infty)]. \tag{**}$$

Istotnie, gdy $z\neq\infty$, to (**) wynika stąd, że przekształcenia $F_{|S\setminus\{n\}}$ i $(F_{|S\setminus\{n\}})^{-1}$ (pomiędzy $\mathbb{C}$ i $S\setminus\{n\}$) są ciągłe. A że z każdego ciągu ograniczonego w $\mathbb{C}$ można wybrać podciąg zbieżny i sfera S jest zwarta, więc pociąga to za sobą (jak?) prawdziwość (**) i dla $z=\infty$.

Wartość $F^{-1}(z,0)$ nietrudno jest wyznaczyć i wzorowi (*) można nadać bardziej jawną postać. Nie czynimy tego, bo w żadnej postaci wzór ten nie będzie wykorzystany, zaś istotna będzie tylko charakteryzacja (**). Oznacza ona, że na $\mathbb{C}$ topologia przestrzeni $\widetilde{\mathbb{C}}$ jest identyczna z wyjściową i przestrzeń $\widetilde{\mathbb{C}}$ jest tzw. **uzwarceniem jednopunktowym** (inaczej: **Aleksandrowa**) płaszczyzny $\mathbb{C}$. Odnotujmy jeszcze, że koła w metryce d wokół ∞ są postaci $\{\infty\}\cup\{z\in\mathbb{C}:|z|>R\}$, gdzie $R>0$.

Z (**) wynika, że gdy $a_n,b_n\in\mathbb{C}$ i $a_n\to\infty$, to $a_n/b_n\to\infty$, $a_n\pm b_n\to\infty$ i $b_n/a_n\to 0$ o ile ciąg b_n jest ograniczony. (Inaczej konkluzja może być fałszywa.)

Zadanie. Niech f i g będą niezerowymi wielomianami zespolonymi. Udowodnić, że:

a) W $\widetilde{\mathbb{C}}$ istnieje granica $\lim_{z\to\infty} f(z)/g(z)$, równa 0 gdy $\deg(f)<\deg(g)$, równa ∞ gdy $\deg(f)>\deg(g)$, zaś równa ilorazowi współczynników kierunkowych obu wielomianów gdy $\deg(f)=\deg(g)$.

b) Gdy $g(z_0)=0$ i $f(z_0)\neq 0$, to $\lim_{z\to z_0} f(z)/g(z)=\infty$.

Iloraz f/g dwóch wielomianów ($g\neq 0$) nazywamy **funkcją wymierną**; możemy zakładać, że $f=0$ lub f i g nie mają pierwiastków wspólnych. (Dlaczego?) Z zadania wynika więc, że funkcję wymierną u możemy traktować jako ciągłe przekształcenie sfery Riemanna $\widetilde{\mathbb{C}}$ w siebie, zaś z własności 1,2,3 w §2 – że jest ona holomorficzna w zbiorze otwartym $\mathbb{C}\setminus u^{-1}(0)$. Można udowodnić (co nie jest łatwe), że tylko funkcje wymierne mają te własności.

Zadanie. Dowieść, że żadnej z funkcji $\exp,\cos,\sin$ nie można w sposób ciągły przedłużyć na sferę Riemanna.

C. Homografie i antyhomografie. Homografie są to funkcje wymierne zadane wzorem

$$h_A(z)=\frac{az+b}{cz+d}\,, \quad \text{gdzie } A=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix} \text{ i } \det(A)\neq 0. \tag{7a}$$

Wzór ten ma sens, gdy z należy do płaszczyzny $\mathbb{C}$ **nakłutej** w punkcie $-\frac{d}{c}$ (tzn. punkt ten usuwamy). Można przestrzeni $\mathbb{C}$ nie nakłuwać, lecz przeciwnie, rozszerzyć ją do sfery $\widetilde{\mathbb{C}}$, zaś h_A przedłużyć do funkcji ciągłej $\widetilde{\mathbb{C}} \to \widetilde{\mathbb{C}}$, którą nadal wygodnie jest oznaczyć h_A. Wtedy, jak wyjaśniono w punkcie B,

$$h_A(-d/c) = \infty \quad \text{oraz} \quad h_A(\infty) = a/c \tag{7b}$$

Homografie traktować będziemy na ogół jako przekształcenia $\widetilde{\mathbb{C}} \to \widetilde{\mathbb{C}}$, a nie z płaszczyzny nakłutej do $\mathbb{C}$. Twierdzimy, że dla nieosobliwych 2×2 macierzy zespolonych A, B ma wtedy miejsce równość

$$h_{AB} = h_A \circ h_B \tag{8}$$

Istotnie, ponieważ funkcje ciągłe są równe, jeśli są równe na zbiorze gęstym, więc równości $h_{AB}(z) = h_A(h_B(z))$ wystarcza dowieść gdy każdy z punktów z, $h_B(z), h_{AB}(z)$ jest różny od ∞ – a wtedy otrzymujemy ją z (7a) przez łatwy rachunek.

Z (8) wynika, że homografie tworzą grupę przekształceń przestrzeni $\widetilde{\mathbb{C}}$, przy czym odwrotnością homografii h_A jest homografia $h_{A^{-1}}$. Dla zaznajomionych z elementami geometrii rzutowej odnotujmy, że można $\widetilde{\mathbb{C}}$ traktować jako model zespolonej prostej rzutowej, w którym homografie grają rolę przekształceń rzutowych. (Wynika to stąd, że przekształcenie rzutowe, które we współrzędnych jednorodych ma postać $[(z_1, z_2)] \mapsto [(az_1 + bz_2, cz_1 + dz_2)]$, we wspólrzędnych niejednorodnych zapisuje się wzorem $z \mapsto (az + b)/(cz + d)$. Można tej obserwacji użyć, by uzasadnić wzór (8).)

Oprócz homografii wyróżnimy **antyhomografie**, tzn. nieholomorficzne przekształcenia postaci $h \circ s$, gdzie h jest homografią, a s sprzężeniem: $s(z) = \overline{z}$ dla $z \in \mathbb{C}$ i $s(\infty) = \infty$. **Przekształceniem Möbiusa** nazywać będziemy każde przekształcenie $\widetilde{\mathbb{C}} \to \widetilde{\mathbb{C}}$, będące homografią lub antyhomografią[2]. Przekształcenia te mają wiele interesujących własności, z których niektóre ujęte są w poniższych zadaniach. Grają one istotną rolę w „hiperbolicznej geometrii płaszczyzny". (Wspomnimy o niej w Dodatku 1 do §VII.2.)

Zadania dotyczące przekształceń Möbiusa. (Pomijane są polecenia „dowieść" itp.)

1. a) Przekształcenia Möbiusa są ciągłe (jako przekształcenia z $\widetilde{\mathbb{C}}$ do $\widetilde{\mathbb{C}}$).

b) Złożenie homografii i antyhomografii (w dowolnej kolejności) jest antyhomografią, podobnie jak odwrotność antyhomografii, a złożenie dwóch antyhomografii jest homografią. (Wskazówka: gdy f jest antyhomografią, to $f = s \circ h$, gdzie h jest homografią.)

b) Żadna homografia nie jest antyhomografią. (Wskazówka: wpierw rozpatrzeć homografię identycznościową.)

2. Każde przekształcenie Möbiusa jest złożeniem kilku przekształceń, wśród których występują tylko podobieństwa płaszczyzny (przedłużone na $\widetilde{\mathbb{C}}$) i homografia $z \mapsto 1/z$.

[2]U większości autorów jednak „przekształcenie Möbiusa" oznacza to samo, co „homografia".

Definicja. Okręgiem w $\widetilde{\mathbb{C}}$ jest każdy okrąg w $\mathbb{C}$ i każdy zbiór postaci $L \cup \{\infty\}$, gdzie L jest prostą w $\mathbb{C}$. Gdy z okręgu w $\widetilde{\mathbb{C}}$ usuniemy ∞, otrzymamy **okrąg uogólniony w** $\mathbb{C}$.

3. a) Każdy okrąg uogólniony w $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ można zadać równaniem $kx^2+ky^2+px+qy+c = 0$, gdzie $k, p, q, c \in \mathbb{R}$. Odwrotnie, niepusty zbiór zadany takim równaniem jest okręgiem uogólnionym. Gdy $k \neq 0$, jaki jest jego promień i środek?

b) Homografia $h(z) = 1/z$ przeprowadza każdy okrąg w $\widetilde{\mathbb{C}}$ na okrąg w $\widetilde{\mathbb{C}}$.

c) Przekształcenie Möbiusa przeprowadza okręgi w $\widetilde{\mathbb{C}}$ na okręgi w $\widetilde{\mathbb{C}}$.

d) Każdy okrąg w $\widetilde{\mathbb{C}}$ można homografią przeprowadzić na $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

Definicja. Dla przekształcenia $f : \widetilde{\mathbb{C}} \to \widetilde{\mathbb{C}}$ przyjmijmy $\mathrm{Fix}(f) \overset{def}{=} \{p \in \widetilde{\mathbb{C}} : f(p) = p\}$.

4. a) Gdy $h : \widetilde{\mathbb{C}} \to \widetilde{\mathbb{C}}$ jest bijekcją, to $\mathrm{Fix}(h \circ f \circ h^{-1}) = h(\mathrm{Fix}(f))$.

b) Homografia h_A ma pewien punkt stały, a jeśli ma ich więcej niż 2 to jest identycznością, zaś macierz A jest postaci λI ($\lambda \in \mathbb{C}$).

c) Gdy homografie h_A i h_B w są równe w 3 punktach, to macierze A i B są proporcjonalne i $h_A = h_B$. (Wskazówka: przy $B = I$ wynika to z b); wykorzystać (8).)

d) Gdy h jest homografią i $\mathrm{Fix}(h) = \{\infty\}$, to $h(z) = z + b$ dla pewnego $b \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

e) Gdy h jest homografią i $\mathrm{Fix}(h) = \{0, \infty\}$, to $h(z) = az$ dla pewnego $a \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$.

5. Symetrią względem okręgu $T \subset \widetilde{\mathbb{C}}$ nazywamy przekształcenie Möbiusa s_T, którego T jest zbiorem punktów stałych (tzn. $T = \mathrm{Fix}(s_T)$). Dowieść, że symetria s_T istnieje i jest jedyna,[3] na następującej drodze:

a) Gdy $T = \{\infty\} \cup \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}\, z = 0\}$, to za s_T można przyjąć tylko odbicie $z \mapsto \overline{z}$ względem osi T. Gdy zaś $T = \{z : |z| = 1\}$, to $z \mapsto 1/\overline{z}$ spełnia żądany warunek.

b) Gdy przekształcenie Möbiusa f przeprowadza okrąg T_1 na T_2 i s_2 jest symetrią względem T_2, to $f^{-1} \circ s_2 \circ f$ jest nią względem T_1. Stąd i z a) uzyskać tezę w oparciu o **3**d).

c)* Wywnioskować też, że gdy $T = L \cup \{\infty\}$, gdzie L jest prostą, to s_T jest symetrią ortogonalną względem L; gdy zaś $T = \partial D(o, r)$, to

$$s_T(z) = o + \frac{r^2}{\overline{z} - \overline{o}} \text{ dla } z \in \mathbb{C} \setminus \{o\},\ s_T(o) = \infty \text{ i } s_T(\infty) = o. \tag{9}$$

(Tak więc w ostatnim przypadku $z' := s_T(z)$ jest dla $z \in \mathbb{C} \setminus \{o\}$ jedynym takim punktem prostej oz, że $|z' - o||z - o| = r^2$ i $o \notin [z, z']$.)

d) Dowieść, że s_T jest **inwolucją**, tzn. złożenie $s_T \circ s_T$ jest identycznością.

Definicja. Punkty p, q nazywamy **symetrycznymi** względem okręgu uogólnionego T, jeśli $s_T(p) = q$. Zbiór X jest **symetryczny względem** T, jeśli $s_T(X) = X$.

Uwaga 5. Zadanie 5b) oznacza, że *przekształcenie Möbiusa f przeprowadza pary punktów, symetryczne względem okręgu $T \subset \widetilde{\mathbb{C}}$, na pary symetryczne względem okręgu $f(T)$.*

[3] W geometrii, s_T nazywane jest **inwersją względem** T, lecz w analizie zespolonej ten termin miewa inne znaczenie.

6. a) Przekształcenie Möbiusa f przeprowadza dany okrąg $T \subset \mathbb{C} \setminus \{f^{-1}(\infty)\}$ na okrąg o średnicy $[f(a), f(b)]$, gdzie $[a, b]$ to średnica okręgu T, na przedłużeniu której leży punkt $f^{-1}(\infty)$. (Środek okręgu $f(T)$ na ogół <u>nie</u> jest obrazem, przy f, środka okręgu T.)

b) Jaki jest odpowiednik części a), gdy $f^{-1}(\infty) \in T$?

7. Niech $D = \{z : |z| < 1\}$ i $\Pi_+ = \{z : \mathrm{Im}(z) > 0\}$.

a) Gdy homografia h przeprowadza Π_+ na D, to $h(z) = k(z - a)/(z - \overline{a})$, gdzie $a \in \Pi_+$ i $|k| = 1$. (Wskazówka: jeśli h ma wymaganą własność i $a = h^{-1}(0)$, to $h(\overline{a}) = \infty$ na podstawie uwagi 5.)

b) Gdy homografia h przeprowadza D na D, to $h(z) = k\frac{z-a}{1-z\overline{a}}$, gdzie $a \in D$ i $|k| = 1$. (Wskazówka: jak wyżej, lecz tym razem $h(1/\overline{a}) = \infty$.)

c) Odwrotnie, gdy homografia h jest opisana jednym z tych wzorów, to spełnia warunek $h(\Pi_+) = D$ czy $h(D) = D$, odpowiednio. (Wskazówka do przypadku, gdy wzór jest jak w b): z zadania w §1 wynika, że $h(\partial D) = \partial D$ i $h(D) \subset D$.)

d)* Jaka jest postać homografii przeprowadzających Π_+ na Π_+?

Uwaga 6. W oparciu o te zadania i wcześniejsze wiadomości można pewne obszary holomorficznie i różnowartościowo przekształcić na dysk; patrz §VII.2.

8. Niech p_1, p_2, p_3 i q_1, q_2, q_3 będą trójkami różnych liczb zespolonych. Wówczas:

a) Istnieje jedyna homografia h taka, że $h(p_1) = 0, h(p_2) = \infty$ i $h(p_3) = 1$; jest nią $h(z) = k(z - p_1)/(z - p_2)$, gdzie $k = (p_3 - p_2)/(p_3 - p_1)$.

b) Istnieje jedyna homografia h taka, że $h(p_i) = q_i$ dla $i = 1, 2, 3$. (Wskazówka: $h = h_2^{-1} \circ h_1$, gdzie h_1 i h_2 konstruuje się w oparciu o a).)

c) Gdy w jest obrazem danego punktu z przy powyższej homografii h, to $\frac{p_3-p_2}{p_3-p_1} \cdot \frac{z-p_1}{z-p_2} = \frac{q_3-q_2}{q_3-q_1} \cdot \frac{w-q_1}{w-q_2}$. (Wskazówka: $h_2 \circ h = h_1$.)

d)* Homografia zachowuje **dwustosunek** $[p_1, p_2, p_3, p_4] \overset{def}{=} \frac{p_3-p_1}{p_3-p_2} : \frac{p_4-p_1}{p_4-p_2}$ czwórki punktów.

9. a) Nazwijmy przekształcenia $f, g : \widetilde{\mathbb{C}} \to \widetilde{\mathbb{C}}$ **homograficznie sprzężonymi**, jeśli $g = h \circ f \circ h^{-1}$ dla pewnej homografii h. Dowieść, że każda homografia jest tak sprzężona bądź z przesunięciem, bądź z przekształceniem, będącym złożeniem obrotu wokół 0 i jednokładności o środku w 0. (Wskazówka: **4** a),d),e) – lub tw. Jordana z GAL-u.)

b)* Wywnioskować, że gdy homografia f ma jedyny punkt stały, to jest on granicą obu ciągów $(f^n(z))$ i $(f^{-n}(z))$, dla każdego punktu $z \in \widetilde{\mathbb{C}}$; gdy zaś f ma 2 punkty stałe p, q, to albo każdy ciąg $(f^n(z))$, gdzie $z \notin \{p, q\}$, jest zbieżny i jego granica nie zależy od z, i tak samo jest z ciągami $(f^{-n}(z))$, albo każdy z tych ciągów jest rozbieżny. (Przez f^n i f^{-n} oznaczamy n–tą iterację przekształcenia f i przekształcenia f^{-1}, odpowiednio.)

10. Niech s_1 i s_2 oznaczają symetrie względem okręgów T_1 i T_2, odpowiednio. Dowieść, że jeśli funkcja $f : U \to \mathbb{C}$, gdzie zbiór $U \subset \mathbb{C}$ jest otwarty, ma pochodną zespoloną w punkcie z i $s_1(z) \neq \infty \neq s_2(f(s_1(z)))$, to funkcja $s_2 \circ f \circ s_{1|s_1(U)}$ ma ją w punkcie $s_1(z)$.

(Wskazówka: gdy $T_1 = T_2 = \mathbb{R}\cup\{\infty\}$ jest to część b) zadania z §3. W ogólnym przypadku skorzystać z **3**d) i uwagi 5.)

* Zadania, dotyczące rzutu stereograficznego i inwersji przestrzeni $\mathbb{R}^3$.

Definicja. * a) Przez **inwersję przestrzeni** $\mathbb{R}^k\cup\{\infty\}$, o skali $\lambda\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ i środku $o\in\mathbb{R}^k$, rozumiemy przekształcenie określone wzorem

$$s(z) = o + \frac{\lambda}{\|z-o\|^2}(z-o) \text{ dla } z\in\mathbb{R}^k\setminus\{o\},\ s(o)=\infty \text{ i } s(\infty)=o. \tag{10}$$

Powyżej, $\|\ \|$ oznacza normę euklidesową na przestrzeni $\mathbb{R}^k$.

b) Niech S będzie sferą w $\mathbb{R}^3$ o środku w o, niech $n\in S$ i niech płaszczyzna Π będzie prostopadła do prostej on i nie przechodzi przez n. Rzut stereograficzny sfery S na $\Pi\cup\{\infty\}$, z bieguna n, definiujemy jak w B. Gdy rozpatrujemy go na $S\setminus\{n\}$, to mówimy o **rzucie stereograficznym sfery nakłutej** (w biegunie) na płaszczyznę Π.

11.* a) Inwersja przestrzeni $\mathbb{R}^3\cup\{\infty\}$ przeprowadza sfery uogólnione (tzn. sfery i płaszczyzny z dołączonym punktem ∞) na sfery uogólnione.

b) Wywnioskować, że inwersja przeprowadza okręgi uogólnione w $\mathbb{R}^3\cup\{\infty\}$ (tzn. proste z dołączonym punktem $\{\infty\}$ i okręgi w $\mathbb{R}^3$) na okręgi uogólnione.

12.* Niech F oznacza rzut stereograficzny sfery S na płaszczyznę Π, z bieguna n.

a) Obierzmy inwersję J o środku n i takiej skali λ, by punkt $J(o)$ był spodkiem prostopadłym punktu n na Π. Wówczas $J_{|S} = F$. (Wskazówka: zbiór $J(S)$ jest płaszczyzną, bo $n\in S$. Dowieść, że $J(S)=\Pi$ i punkt $J(z)$ spełnia warunki definicji punktu $F(z)$.)

b) Wywnioskować, że F i F^{-1} przeprowadzają okręgi uogólnione na okręgi uogólnione. (Oczywiście, S zawiera tylko „prawdziwe" okręgi.)

7 Logarytmy i potęgi liczb zespolonych.

Gdy $\mathrm{e}^w = z$, to w nazywamy **logarytmem** liczby zespolonej z i piszemy $w = \log(z)$. Logarytmów liczby $z\neq 0$ jest nieskończenie wiele. Twierdzimy bowiem, że

$$w = \log(z) \Leftrightarrow \big(\mathrm{Re}(w) = \ln|z| \ \text{ i } \ \mathrm{Im}(w) = \arg(z)\big). \tag{11}$$

(Powyżej, ln to logarytm naturalny liczby dodatniej.) Istotnie, gdy $\mathrm{e}^{x+iy} = z$, to $\mathrm{e}^x = |z|$ i $y = \arg(z/e^x) = \arg(z)$; patrz wzory (4) w p.6.

Logarytmy pozwalają zdefiniować potęgi z^s liczby zespolonej z o wykładniku s będącym liczbą niewymierną lub, ogólniej, zespoloną.

Definicja. Dla $z, s\in\mathbb{C}$, $z\notin\{0,\mathrm{e}\}$, oznaczamy przez z^s każdą liczbę postaci e^{sw}, gdzie $w = \log(z)$. (Liczb tych jest na ogół nieskończenie wiele. Gdy $z = \mathrm{e}$ chcemy zachować jednoznaczność, stosując wcześniejszą definicję e^z, i stąd warunek $z\neq \mathrm{e}$.)

Zadanie. Dowieść, że gdy $s \in \mathbb{Z}$, to istnieje tylko jedna liczba z^s, i wyznaczyć ją. Ogólniej: istnieje k liczb z^s gdy s jest ułamkiem nieskracalnym o mianowniku $k > 0$, zaś istnieje ich nieskończenie wiele gdy liczba s jest niewymierna.

Niejednoznaczności logarytmu czy potęgi można starać się zapobiec, wyróżniając wśród wszystkich logarytmów danej liczby ten, który w (11) odpowiada argumentowi głównemu. **Logarytmem głównym** liczby $z \neq 0$ nazwiemy zatem liczbę

$$\mathrm{Log}(z) := \ln|z| + \mathrm{i}\,\mathrm{Arg}(z) \tag{12}$$

Wobec (6a), każdy inny logarytm jest postaci $\mathrm{Log}(z) + 2k\pi\mathrm{i}$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$. Ogólniej, możemy wybrać przedział $J \subset \mathbb{R}$, jak na początu str. 3, i przyjąć $\mathrm{Log}_J(z) := \ln|z| + \mathrm{i}\,\mathrm{Arg}_J(z)$.

Uwaga 1. Jak argument główny, tak i Log jest poprawnie określoną funkcją z $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ do $\mathbb{C}$. Jednak obie te funkcje, choć ciągłe na $\mathbb{C} \setminus [0, \infty)_{\mathbb{R}}$, to są nieciągłe w każdym punkcie $z_0 \in (0, \infty)_{\mathbb{R}}$. Ściślej: jeśli $\lim_n z_n = z_0 \in (0, \infty)_{\mathbb{R}}$ i $f \in \{\mathrm{Arg}, \mathrm{Log}\}$, to granica $w = \lim_n f(z_n)$ istnieje gdy $\mathrm{Im}(z_n) \geq 0$ dla każdego n (i wtedy $w = f(z_0)$), a także gdy $\mathrm{Im}(z_n) < 0$ dla każdego n (lecz wtedy $w \neq f(z_0)$). Podobnie, funkcja Log_J jest poprawnie określona na $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, lecz nieciągła (tylko) w punktach należących do półprostej $\{t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} : t > 0\}$, gdzie φ jest początkiem przedziału J. ⊟

Uwaga 2. Niech P oznacza pas $P = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \mathrm{Im}(z) < 2\pi\}$. Z definicji i (4a) wynika, że gdy $z \in P$ i $w \in \mathbb{C} \setminus [0, \infty)_{\mathbb{R}}$, to

$$\mathrm{e}^z \in \mathbb{C} \setminus [0, \infty)_{\mathbb{R}} \ , \ \ \mathrm{Log}(w) \in P \text{ oraz } \ \mathrm{Log}(\mathrm{e}^z) = z \ , \ \ \mathrm{e}^{\mathrm{Log}(w)} = w.$$

Zatem obcięcia, do P i do $\mathbb{C} \setminus [0, \infty)_{\mathbb{R}}$, funkcji exp i Log są wzajemnie odwrotnymi homeomorfizmami pomiędzy tymi zbiorami. W szczególności, funkcja Log przekształca homeomorficznie (i holomorficznie, czego dowiedziemy w następnym paragrafie) zbiór $\mathbb{C} \setminus [0, \infty)_{\mathbb{R}}$ na pas P, zaś półpłaszczyznę $\mathrm{Im}\, z > 0$ na pas $0 < \mathrm{Im}\, z < \pi$. □

W związku z uwagą 1 istotne staje się pytanie, kiedy na danym zbiorze $U \subset \mathbb{C}$ zdefiniować można ciągłą funkcję $h : U \to \mathbb{C}$, spełniającą dla $z \in U$ warunek $h(z) = \log z$ (odpowiednio: warunek $h(z) = \arg z$ czy $h(z) = z^s$, gdzie $s \in \mathbb{C}$ jest ustalone). Funkcję taką, jeśli istnieje, nazwiemy **gałęzią logarytmu** (odp. **argumentu** czy **s-tej potęgi**) na zbiorze U. Nieco ogólniej, **gałęzią logarytmu** danej **funkcji** $g : T \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ nazywamy funkcję ciągłą $h : T \to \mathbb{C}$ taką, że $h(t) = \log(g(t))$ dla wszystkich $t \in T$, i analogicznie definiujemy gałąź argumentu i gałąź s–tej potęgi funkcji g.

Przykład 1. a) Gdy l jest gałęzią logarytmu funkcji $g : T \to \mathbb{C}$, to e^{sl} jest gałęzią s–tej potęgi tej funkcji.

b) Funkcje Arg i Log (czy raczej: ich obcięcia) są gałęziami argumentu i logarytmu, odpowiednio, na zbiorze $\mathbb{C} \setminus [0, \infty)_{\mathbb{R}}$. Ogólniej, gdy $L = \{t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} : t \geq 0\}$ jest dowolną półprostą domkniętą, wychodzącą z 0, to gałęzią argumentu na $\mathbb{C} \setminus L$ jest obcięcie funkcji

Arg_J, dla $J := [\varphi, \varphi + 2\pi)$, a gałęzią logarytmu – obcięcie funkcji Log_J. W szczególności, gałęzie logarytmu i argumentu istnieją na każdym dysku $D \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ (bo $D \subset \mathbb{C} \setminus L$, dla pewnej takiej półprostej L). ⊟

Ćwiczenie.* Z zadania w §1 wiemy, że funkcja $u(z) = \frac{1}{2}(z + z^{-1})$ przekształca w sposób różnowartościowy zbiór $\Pi_+ = \{z : \mathrm{Im}(z) > 0\}$ na $(\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}) \cup (-1, 1)_\mathbb{R}$. Wyrazić $(u_{|\Pi_+})^{-1}$ jawnym wzorem i wyjaśnić jego poprawność i to, że określa on funkcję holomorficzną.

Stwierdzenie 1. *Gdy dziedzina T funkcji $g : T \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ jest zbiorem spójnym, to każde dwie gałęzie argumentu tej funkcji różnią się o stałą, będącą całkowitą wielokrotnością liczby 2π. Podobnie, każde dwie gałęzie logarytmu funkcji g różnią się wtedy o całkowitą wielokrotność liczby $2\pi\mathrm{i}$.*

Dowód. Różnica $h_1 - h_2$ dwóch gałęzi argumentu funkcji g przyjmuje wartości w dyskretnym zbiorze $2\pi\mathbb{Z}$. Ponieważ funkcja $h_1 - h_2$ jest ciągła na zbiorze spójnym T, więc jest ona stała. To samo stosuje się do gałęzi logarytmu (korzystamy z (6a)). □

Stwierdzenie 2. *Przy założeniach stwierdzenia 1, gałąź logarytmu funkcji g istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje gałąź argumentu tej funkcji. Ściślej, na podstwie (11):*

a) gdy l jest gałęzią logarytmu funkcji g, to $\mathrm{Im}(l)$ jest gałęzią argumentu tej funkcji;

b) gdy σ jest gałęzią argumentu ciągłej funkcji g, to $\ln|g| + \mathrm{i}\sigma$ jest jej gałęzią logarytmu.

(N) Podobnie, gdy f jest gałęzią s–tej potęgi funkcji g, to $\frac{1}{s}f$ jest jej gałęzią logarytmu. ⊟

Łatwo o przykład zbioru, na którym gałęzi logarytmu czy argumentu brak:

Przykład 2. Na okręgu $S = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ nie istnieje gałąź argumentu (równoważnie: logarytmu). Istotnie, jeśli A jest gałęzią argumentu na S to, na podstawie stwierdzenia 1, funkcja $A - \mathrm{Arg}$ jest stała na $S \setminus \{1\}$. Jest to niemożliwe, bo funkcja Arg nie ma granicy w punkcie 1, zaś funkcja A ma. □

8 Gałąź funkcji odwrotnej.

Na gałąź logarytmu można też spojrzeć jako na gałąź funkcji odwrotnej do funkcji exp.

Definicja. Gdy $f : U \to \mathbb{C}$ jest funkcją, to **gałęzią funkcji f^{-1} na zbiorze** $W \subset f(U)$ nazywamy każdą funkcję ciągłą $g : W \to \mathbb{C}$ taką, że $f(g(w)) = w$ dla $w \in W$. [4]

Twierdzenie 1. *Niech f będzie funkcją analityczną w zbiorze otwartym $U \subset \mathbb{C}$, niech $z_0 \in U$ i niech $f'(z_0) \neq 0$. Wówczas*

a) Istnieje otoczenie D punktu z_0 takie, że $f_{|D} : D \to f(D)$ jest homeomorfizmem na zbiór otwarty $f(D) \subset \mathbb{C}$. Na $f(D)$ istnieje więc gałąź funkcji f^{-1}, przeprowadzająca punkt $w_0 := f(z_0)$ na z_0.

b) Gdy g jest gałęzią funkcji f^{-1}, określoną w otoczeniu punktu w_0 i spełniającą warunek

[4] W większości książek przytoczonych na str. 1, termin „gałąź funkcji analitycznej” jest też używany w innym znaczeniu.

$g(w_0) = z_0$, to pochodna $g'(w_0)$ istnieje i jest równa $1/f'(z_0)$. Funkcja g jest więc holomorficzna w pewnym otoczeniu punktu w_0.

Dowód. a) Funkcja f' jest analityczna (patrz wniosek w §5), więc jest ciągła i różna od zera w pewnym otoczeniu D_0 punktu z_0. Tym samym dla $z \in D_0$ macierz pochodnej rzeczywistej $\mathrm{d}f(z)$ istnieje i jest nieosobliwa, a także w sposób ciągły zależy od z. (Korzystamy z twierdzenia 1 w §2.) Stąd na podstawie twierdzenia o funkcji odwrotnej (dla funkcji dwóch zmiennych rzeczywistych) wynika istnienie otoczenia $D \subset D_0$ punktu z_0 takiego, że $f_{|D} : D \to f(D)$ jest homeomorfizmem na zbiór otwarty. Szukaną gałęzią jest homeomorfizm $(f_{|D})^{-1} : f(D) \to D$, odwrotny do $f_{|D}$.

b) Gdy $w \in \mathrm{dom}(g)$ i $z \stackrel{def}{=} g(w)$, to $f(z) = f(g(w)) = w$, skąd

$$\frac{g(w) - g(w_0)}{w - w_0} = \frac{z - z_0}{f(z) - f(z_0).} \tag{*}$$

Z ciągłości g wynika, że $z \to z_0$ gdy $w \to w_0$. A że pochodna $f'(z_0)$ istnieje, więc prawa strona w (*) ma dla $w \to w_0$ granicę, równą $1/f'(z_0)$. □

Wniosek 1. *a) n–ta ochodna w punkcie $w_0 \neq 0$ gałęzi logarytmu, określonej w otoczeniu tego punktu, istnieje i jest równa $(-1)^{n-1}(n-1)!/w_0^n$.*

b) n–ta pochodna $g^{(n)}(w_0)$ gałęzi s–tej potęgi, określonej w otoczeniu punktu $w_0 \neq 0$, istnieje i jest równa $\frac{g(w_0)}{w_0^n} \prod_{j=0}^{n-1}(s-j)$.

Dowód. Niech l będzie badaną gałęzią logarytmu. Wykorzystując część b) twierdzenia, przy $f = \exp$, uzyskujemy wówność $l'(w) = 1/w$ dla w z wymienionego otoczenia. Z drugiej strony, $g = \mathrm{e}^{sl}$ dla pewnej gałęzi logarytmu l, więc $g'(w) = \mathrm{e}^{sl(w)} sl'(w) = sg(w)/w$. Stąd przez indukcję uzykujemy wzory na dalsze pochodne $l^{(n)}$ i $g^{(n)}$. ⊟

Przykład. Niech $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Jak wiemy z przykładu 1 w §7, na dysku $D(z_0, |z_0|)$ można określić gałąź logarytmu l. By rozwinąć funkcję $z \mapsto l(z + z_0)$ na dysku $D := D(0, |z_0|)$ zauważmy, że jej pochodną jest $1/(z+z_0) = \frac{1}{z_0}(1 - z/z_0 + (z/z_0)^2 - (z/z_0)^3 \ldots)$. (Wykorzystaliśmy to, że $1/(1+q) = 1 - q + q^2 \ldots$ gdy $|q| < 1$.) Również funkcja $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}(z/z_0)^n$ ma tę samą pochodną, patrz przykład w §4. Wynika stąd, że $l(z + z_0) = l(z_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n z_0^n} z^n$ dla $z \in D$, czy równoważnie $l(z) = l(z_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n z_0^n}(z - z_0)^n$ dla $z \in D(z_0, |z_0|)$. W szczególności, gdy $z_0 = 1$ i gałąź $l = \mathrm{Log}$ wybrano tak, by $\mathrm{Log}(1) = 0$, to $\mathrm{Log}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}(z-1)^n$ dla $z \in D(1, 1)$. ⊟

Uwaga 1. * Twierdzenie 1 niesie i głębsze przesłanie. Skoro bowiem funkcja analityczna f wyznaczać może wiele gałęzi funkcji f^{-1}, to naturalne jest chcieć wszystkie je traktować łącznie, jako samodzielny obiekt. Jest to ważna przyczyna wprowadzenia „wieloznacznych" czy „ogólnych" funkcji analitycznych, obecnych we wielu podręcznikach. Tu jednak funkcji takich nie będziemy rozpatrywać i zakładamy zawsze jednoznaczość funkcji.

II CAŁKA FUNKCJI HOLOMORFICZNEJ WZDŁUŻ DROGI

1 Wstępne definicje

Definicja. Niech funkcja zespolona φ będzie zdefiniowana, ograniczona i ciągła na odcinku $[a,b]$, z którego usunięto być może skończenie wiele punktów. Przyjmujemy wtedy:

$$\int_a^b \varphi(t)\,\mathrm{d}t \stackrel{def}{=} \int_a^b \mathrm{Re}\,\varphi(t)\,\mathrm{d}t + \mathrm{i}\int_a^b \mathrm{Im}\,\varphi(t)\,\mathrm{d}t. \tag{1}$$

(Po prawej bierzemy całki Riemanna funkcji rzeczywistych.)

Jeśli funkcje $\varphi, \varphi_1, \varphi_2$ mają wymienione własności, to

$$\int_a^b (\varphi_1(t)+\varphi_2(t))\,\mathrm{d}t = \int_a^b \varphi_1(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^b \varphi_2(t)\,\mathrm{d}t \tag{2}$$

$$\int_a^b z\varphi(t)\,\mathrm{d}t = z\int_a^b \varphi(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{dla } z\in\mathbb{C} \tag{3}$$

$$\left|\int_a^b \varphi(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b |\varphi(t)|\,\mathrm{d}t \tag{4}$$

By dowieść (4) obierzmy taką liczbę z o module 1, że $z\int_a^b \varphi(t)\,\mathrm{d}t \in [0,\infty)_{\mathbb{R}}$. Zastąpienie w (4) funkcji φ przez $z\varphi$ nie zmieni na mocy (3) wartości żadnej ze stron i sprowadzi dowód do przypadku, gdy $\int_a^b \varphi(t)\,\mathrm{d}t \in [0,\infty)_{\mathbb{R}}$. Wtedy jednak wynika on stąd, że $|\int_a^b \varphi(t)\,\mathrm{d}t| = \mathrm{Re}(\int_a^b \varphi(t)\,\mathrm{d}t) = \int_a^b \mathrm{Re}(\varphi(t))\,\mathrm{d}t \leq \int_a^b |\varphi(t)|\,\mathrm{d}t$.

Definicja. a) **Ścieżką** nazywamy funkcję ciągłą $\gamma : [a,b]\to\mathbb{C}$, gdzie $a,b\in\mathbb{R}$ i $a<b$. Zbiór $\mathrm{im}(\gamma) \stackrel{def}{=} \gamma([a,b])$ to **obraz** lub **nośnik** ścieżki γ, oznaczany przez γ^*. Za Saksem i Zygmundem, $\gamma(a)$ i $\gamma(b)$ nazywamy **krańcami** ścieżki γ, przy czym $\gamma(a)$ nazywamy jej **początkiem**, a $\gamma(b)$ – **końcem**. Gdy $\gamma(a)=\gamma(b)$, mówimy o **ścieżce zamkniętej** lub **pętli**.

b) Ścieżka $\gamma : [a,b]\to\mathbb{C}$ jest **gładka**, gdy jej pochodna w każdym punkcie $t\in[a,b]$ jest różna od zera i w sposób ciągły zależy od t. (W punktach a,b rozważamy pochodne jednostronne.) Ścieżkę γ nazwiemy **drogą** [5] jeśli jest kawałkami gładka, tzn. istnieją punkty $a=t_0<\ldots<t_n=b$ takie, że każda ze ścieżek $\gamma_{|[t_{i-1},t_i]}$ jest gładka.

[5] w wielu podręcznikach, nazw „droga" i „ścieżka" używa się wymiennie.

c) Gdy $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ jest drogą, zaś $f : \gamma([a,b]) \to \mathbb{C}$ jest funkcją ciągłą, to

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z \stackrel{def}{=} \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,\mathrm{d}t.$$

(Funkcja $\varphi := f(\gamma(t))\gamma'(t)$ spełnia warunki początkowej definicji – dlaczego?) Zamiast $\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z$ piszemy też $\int_\gamma f$ gdy jest jasne, jaka jest zmienna całkowania. [6]

Przykład. Niech $\gamma_r(t) = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ dla $t \in [0, 2\pi]$. Wówczas $\int_{\gamma_r} \frac{1}{z} dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}} \mathrm{i}r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} dt = 2\pi\mathrm{i}$.

Stwierdzenie 1. *Niech $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ będzie drogą, a $\tau : [a',b'] \to [a,b]$ kawałkami gładkim homeomorfizmem. Wówczas dla każdej funkcji ciągłej $f : \mathrm{im}(\gamma) \to \mathbb{C}$ ma miejsce równość $\int\limits_{\gamma\circ\tau} f = \pm \int\limits_\gamma f$, gdzie znak jest dodatni gdy homeomorfizm τ jest rosnący, zaś ujemny gdy jest malejący.*

Dowód. Oczywiście,

$$\int_{\gamma\circ\tau} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{a'}^{b'} f(\gamma\circ\tau(t))(\gamma\circ\tau)'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{a'}^{b'} f(\gamma(\tau(t)))\gamma'(\tau(t))\tau'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Podstawienie $\tau(t) = s$ pokazuje, że ostatnia całka jest równa $\pm \int\limits_a^b f(\gamma(s))\gamma'(s)\,\mathrm{d}s$ (znak taki, jak wyżej). Pozostaje skorzystać z tego, że $\int\limits_a^b f(\gamma(s))\gamma'(s)\,\mathrm{d}s = \int\limits_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z$. □

Uwaga 1. Użyteczne jest takie oszacowanie: gdy $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ jest drogą i f jest funkcją ciągłą na $\mathrm{im}(\gamma)$, to

$$\left|\int_\gamma f\right| \leqslant M \cdot \ell(\gamma), \quad \text{gdzie} \quad M \stackrel{def}{=} \sup_{z\in\mathrm{im}(\gamma)} |f(z)| \quad \text{i} \quad \ell(\gamma) \stackrel{def}{=} \int_a^b |\gamma'(t)|\,\mathrm{d}t. \tag{5}$$

Wynika ono stąd, że $|\int\limits_\gamma f| \leqslant \int\limits_a^b |f(\gamma(t))||\gamma'(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant M \cdot (\int\limits_a^b |\gamma'(t)|\,\mathrm{d}t)$. □

Powyższą liczbę $\ell(\gamma)$ nazywamy **długością drogi** γ. Jak w stwierdzeniu 1 sprawdza się, że $\ell(\gamma) = \ell(\gamma\circ\tau)$ dla każdego homeomorfizmu kawałkami gładkiego $\tau : [a',b'] \to [a,b]$.

[6] Ten skrót zwiększa przejrzystość zapisu całki, lecz ma swą wadę: ukrywa to, że w istocie całkujemy nie funkcję, a formę $f(z)\mathrm{d}z$. Nie definiujemy tu nawet pojęcia formy różniczkowej, a przed Czytelnikami zaznajomionymi z nim usprawiedliwiamy przyjęty zapis umową, by w wyrażeniu $\int_\gamma f$ utożsamiać funkcję f z formą $f(z)\mathrm{d}z$.

Wniosek 1. *Gdy ciąg funkcji ciągłych $f_n : U \to \mathbb{C}$ jest niemal jednostajnie zbieżny do funkcji $f : U \to \mathbb{C}$, to $\int_\gamma f_n \to \int_\gamma f$ dla każdej drogi γ w U.*

Dowód. Ustalmy drogę γ. Zbiór $K = \mathrm{im}(\gamma)$ jest zwarty, jako ciągły obraz odcinka. Zatem $|\int_\gamma f_n - \int_\gamma f| \le l(\gamma)\|f_n - f\|_K \to 0$, na podstawie zadania z §1.3 i uwagi 1. $\square$

Definicja. a) Gdy $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ jest ścieżką, to przez $-\gamma$ oznaczamy ścieżkę

$$(-\gamma)(t) = \gamma(a + b - t), \quad t \in [a, b].$$

b) Gdy ścieżki $\lambda : [a, b] \to \mathbb{C}$ i $\mu : [c, d] \to \mathbb{C}$ spełniają warunek $\lambda(b) = \mu(c)$, to przez $\lambda\#\mu$ oznaczamy ścieżkę $[-1, 1] \to \mathbb{C}$, zdefiniowaną wzorem

$$(\lambda\#\mu)(t) = \begin{cases} \lambda(t(b-a)+b) & \text{gdy } t \in [-1, 0], \\ \mu(t(d-c)+c) & \text{gdy } t \in [0, 1]. \end{cases}$$

Wniosek 2. *Gdy droga $\lambda\#\mu$ jest określona oraz funkcje f i g są ciągłe na* $\mathrm{im}(\lambda)$ *i na* $\mathrm{im}(\lambda) \cup \mathrm{im}(\mu)$, *odpowiednio, to*

$$\int\limits_{-\lambda} f = -\int\limits_{\lambda} f, \qquad \int\limits_{\lambda\#\mu} g = \int\limits_{\lambda} g + \int\limits_{\mu} g$$

Dowód. Wynika to ze stwierdzenia. $\square$

Podkreślmy, że obie nazwy „ścieżka" i „droga" są mylące: nie oznaczają one bowiem podzbioru płaszczyzny, lecz coś, co potocznie nazwalibyśmy „harmonogramem przejazdu". W szczególności, „drogi" (jak została przez nas zdefinowana) nie możemy, w odróżnieniu od jej obrazu, narysować na płaszczyźnie. Naszym celem jest zdefiniowanie „konturów", o których niezbędną informację można przekazać rysunkiem.

Definicja. a) **Łukiem kawałkami gładkim** nazywamy obraz różnowartościowej drogi. Gdy droga jest gładka, łuk też nazwiemy gładkim. Łuk jest **zorientowany**, gdy jeden jego kraniec nazwano **początkiem**, a drugi **końcem**. Jego **parametryzacją** (jest ich wiele) nazwiemy różnowartościową drogę, której jest obrazem i która ma ten sam początek, co on.

b) **Konturem** nazwiemy taki ciąg $\Lambda = (L_1, ..., L_n)$ zorientowanych łuków kawałkami gładkich, że koniec L_j jest początkiem L_{j+1}, dla $j = 1, ..., n-1$. **Parametryzacją** tego konturu jest każda droga $\lambda : [a, b] \to \mathbb{C}$ taka, że dla pewnych $t_0 = a < t_1 ... < t_n = b$ i $j = 1, ..., n$, droga $\lambda_{|[t_{j-1}, t_j]}$ jest parametryzacją łuku L_j. Początek łuku L_1 i koniec łuku L_n nazywamy, odpowiednio, **początkiem** i **końcem** konturu Λ. Kontur jest **zamknięty**, gdy jego początek jest równy końcowi. **Kontur Jordana** to kontur zamknięty, którego pewna parametryzacja $\lambda : [a, b] \to \mathbb{C}$ jest różnowartościowa na $[a, b)$ i na $(a, b]$.

Zauważmy, że niezależne od wyboru parametryzacji λ konturu Λ są:

- obraz λ^* tej parametryzacji, który oznaczymy Λ^*, oraz
- całka $\int_\lambda f$ danej funkcji ciągłej $f : \Lambda^* \to \mathbb{C}$, którą to całkę oznaczymy $\int_\Lambda f$.

Nazywamy je **nośnikiem** konturu Λ i **całką funkcji f wzdłuż konturu** Λ, odpowiednio. (Niezależności wystarczy dowieść dla łuków gładkich, a wtedy jest ona oczywista lub wynika ze stwierdzenia 1.)

Okazuje się, że każda droga $\lambda : [a, b] \to \mathbb{C}$ wyznacza pewien kontur, tzn. można $[a, b]$ podzielić na odcinki punktami $a = t_0 < \cdots < t_n = b$ tak, by droga λ była różnowartościowa na $[t_{i-1}, t_i]$, dla $i = 1, ..., n$. Możliwość ta łatwo wynika z zadania 4^* – z którego jednak nigdy nie skorzystamy, bo podział będzie dany warunkami rozważanych zagadnień. Całkę wzdłuż dowolnej drogi możemy więc wyrazić jako całkę po pewnym konturze $(L_j)_{j=1}^n$ i przedstawić rysunkiem, na którym każdy ze zbiorów L_j^* opatrzono strzałeczkami, wskazującymi kierunek wzrostu parametru $t \in [a, b]$.

Na koniec zuważmy, że informację o całkowaniu wzdłuż konturu Jordana Λ możemy przekazać, wskazując tylko zbiór Λ^* i orientację dowolnego łuku $L^* \subset \Lambda^*$, zgodną z orientacją konturu Λ. (Co to znaczy?) Istotnie, gdy łuk $K^* := \Lambda^* \setminus L^*$ zorientujemy w oczywisty sposób (początki łuków K i L mają być różne), to uzyskamy tożsamość $\int_\Lambda f = \int_K f + \int_L f$ dla każdej funkcji ciągłej $f : \Lambda^* \to \mathbb{C}$.

Przykład. a) Niech $z_1, z_2, ..., z_n \in \mathbb{C}$. Przez $[z_1, z_2]$ oznaczymy drogę $[0, 1] \ni t \mapsto tz_2 + (1-t)z_1$, a także jej obraz. Ogólniej, przez $[z_1, ..., z_n]$ oznaczymy tak kontur $([z_1, z_2], ..., [z_{n-1}, z_n])$, jak i jego nośnik; i jedno, i drugie nazywamy **łamaną** o kolejnych wierzchołkach $z_1, ..., z_n$. Oczywiście, całka po tej łamanej jest równa sumie całek po $[z_i, z_{i+1}]$.

b) W szczególności, gdy $\triangle$ jest trójkątem (tzn. $\triangle = \{t_1a+t_2b+t_3c : t_1, t_2, t_3 \geq 0 \text{ i } t_1+t_2+t_3 = 1\}$ dla pewnych $a, b, c \in \mathbb{C}$), to przez $\partial\triangle$ oznaczymy łamaną $[a, b, c, a]$, gdzie wierzchołki a, b, c są wzięte w takiej kolejności, by obieg brzegu $\partial\triangle$ był „przeciwny do ruchu wskazówek zegara". Definicja ta ma sens poza przypadkiem, gdy trójkąt $\triangle$ jest zdegenerowany (tzn. jego wierzchołki leżą na prostej)–a wtedy kolejność wierzchołków obieramy dowolnie. Opisaną orientację pętli $\partial\triangle$ nazywamy **dodatnią**.

c) Przez brzeg dysku $D = D(z_0, r)$ rozumiemy krzywą Jordana $\partial D = \{z : |z - z_0| = r\}$ zorientowaną tak, by jej obieg był przeciwny do ruchu wskazówek zegara. Orientacja ta jest zgodna z parametryzacją $[0, 2\pi] \ni t \mapsto z_0 + re^{it}$, wobec czego $\int\limits_{\partial D} f = \int\limits_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) ire^{it}\, \mathrm{d}t$. W szczególności, $\int\limits_{\partial D} \frac{1}{z}\, \mathrm{d}z = 2\pi \mathrm{i}$.

d) Należy jednak wyjaśnić, kiedy to orientacja $\partial\triangle$ czy ∂D jest dodatnia, czyli „wyznacza obieg, przeciwny do ruchu wskazówek zegara". W obu przypadkach, gdy $X = \triangle$ i $X = D$, obierzmy we wnętrzu zbioru X punkt p. Żądaną orientację wyznacza każdy łuk $K \subset \partial X$, którego początkiem jest punkt przecięcia ∂X z półprostą $\operatorname{Im} z = \operatorname{Im} p, \operatorname{Re} z > \operatorname{Re} p$, i który leży w półpłaszczyźnie $\operatorname{Im} z > \operatorname{Im} p$. □

Uwaga 2. Dociekliwy czytelnik zauważy, że uzasadnienia wymaga niezależność ostatniej definicji od wyboru punktu $p \in X$. Możliwość zgodnego wyróżnienia dodatniej orientacji krzywych Jordana jest dość subtelną własnością płaszczyzny $\mathbb{C}$. Własność tę mają też niektóre inne powierzchnie, w tym sfera; jednak wstęga Möbiusa jej nie ma, podobnie jak płaszczyzna rzutowa czy butelka Kleina. W §VII.7 * opisujemy, czym jest orientacja dowolnych krzywych Jordana w $\mathbb{C}$. ⊟

Zadania:

1. Niech funkcja $f : U \to \mathbb{C}$ będzie ciągła. Dowieść, że dla każdego $n \geq 2$ funkcja, przyporządkowująca ciągowi $(z_i)_{i=1}^n$ całkę funkcji f po łamanej $[z_1, ..., z_n]$, jest ciągła na przestrzeni $\{(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n : [z_1, \ldots, z_n] \subset U\}$. (Wskazówka: przyjąć wpierw $n = 2$.)

2.* Niech zbiory $U, W \subset \mathbb{C}$ będą otwarte, zaś $[a, b]$ będzie przedziałem w $\mathbb{R}$.

i) Dowieść, że gdy funkcja $h : U \times [a, b] \to \mathbb{C}$ jest ciągła, to $U \ni z \mapsto \int_a^b h(z, t)\, \mathrm{d}t$ też.

ii) Dowieść, że gdy $\gamma : [a, b] \to W$ jest drogą, zaś funkcja $f : U \times W \to \mathbb{C}$ ma w każdym punkcie $(z_0, w_0) \in U \times W$ pochodną cząstkową $\frac{\partial f}{\partial z}(z_0, w_0)$, zależną w sposób ciągły od pary (z_0, w_0), to funkcja $F(z) = \int_\gamma f(z, w)\mathrm{d}w$ jest holomorficzna w U oraz $F'(z_0) = \int_\gamma \frac{\partial f}{\partial z}(z_0, w)\, \mathrm{d}w$ dla $z_0 \in U$. (Wskazówka: zastosować i) do funkcji $h(z, t) = g(z, \gamma(t))\gamma'(t)$, gdzie $g(z, w) = (f(z, w) - f(z_0, w))/(z - z_0)$ gdy $z \neq z_0$ i $g(z_0, w) = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0, w)$.)

Uwaga: Można dowieść, że jeśli funkcja $\frac{\partial f}{\partial z}$ jest określona na $U \times W$, to jest ciągła.

3*. Dla funkcji $f : U \to \mathbb{C}$ i drogi $\gamma : [a, b] \to U$, gdzie zbiór U jest otwarty w $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$, przyjmijmy $\int_\gamma f(x, y)(\mathrm{d}x + \mathrm{i}\mathrm{d}y) = \int_\gamma (u(x, y)\mathrm{d}x - v(x, y)\mathrm{d}y) + \mathrm{i} \int_\gamma (u(x, y)\mathrm{d}y + v(x, y)\mathrm{d}x)$, gdzie $u = \mathrm{Re}\, f, v = \mathrm{Im}\, f$ i całki po prawej stronie rozumiemy zgodnie z definicjami z AM II. (Zakładamy, że funkcje u i v są klasy C^1.) Dowieść, że $\int_\gamma f(z)\, \mathrm{d}z = \int_\gamma f(x, y)(\mathrm{d}x + \mathrm{i}\mathrm{d}y)$.

4*. Niech punkt z_0 i odcinek $[p, q]$ leżą w zbiorze U, w którym analityczna jest funkcja f.

a) Dowieść, że $|f(p) - f(q)| \leq |p - q| \sup_{z \in [p,q]} |f'(z|$ oraz $|f(p) - f(q) - f'(z_0)(p - q)| \leq |p - q| \sup_{z \in [p,q]} |f'(z) - f'(z_0)|$. (Wskazówka: uwaga 1, zastosowana do f'; druga nierówność wynika z pierwszej, odniesionej do funkcji $z \mapsto f(z) - f'(z_0)(z - z_0)$.)

b) Wywnioskować, że $|f(p) - f(q)| \geq |p - q|\big(|f'(z_0)| - \sup_{z \in [p,q]} |f'(z) - f'(z_0)|\big)$.

c) Dowieść podobnie, że gdy f zastąpić przez funkcję $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$, różniczkowalną w sposób ciągły, to a) i b) pozostają słuszne dla $p, q, z_0 \in [a, b]$. Wywnioskować, że jeśli ponadto $\gamma'(t) \neq 0\, \forall t \in [a, b]$, to dla pewnego $\delta > 0$ funkcja γ jest różnowartościowa na każdym przedziale $[t_1, t_2] \subset [a, b]$ takim, że $t_2 - t_1 < \delta$.

2 Całka po drodze a funkcja pierwotna

Definicja. Niech $F, f : U \to \mathbb{C}$. Powiemy, że F jest **funkcją pierwotną** funkcji f, jeśli w każdym punkcie $z \in U$ pochodna $F'(z)$ istnieje i jest równa $f(z)$.

Stwierdzenie 1. *Gdy F jest funkcją pierwotną funkcji ciągłej $f : U \to \mathbb{C}$, to*

$$\int_\gamma f = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) \quad \text{dla każdej drogi } \gamma : [a,b] \to U.$$

Dowód. $\int\limits_\gamma f = \int\limits_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,\mathrm{d}t = \int\limits_a^b (F \circ \gamma)'(t)\,\mathrm{d}t = (F \circ \gamma)(b) - (F \circ \gamma)(a).$ □

Przykład. Gdy funkcja f jest wielomianem, to ma ona w $\mathbb{C}$ funkcję pierwotną, wobec czego $\int_\gamma f = 0$ dla dowolnej drogi zamkniętej γ w $\mathbb{C}$. Przy $\mathbb{C}$ zastąpionym przez $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ jest tak i dla $f(z) = 1/z^n$ i $n \geq 2$, z tym samym uzasadnieniem. Natomiast $\int_\gamma \frac{1}{z}\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}$ dla $\gamma = \partial D(0,1)$, wobec czego funkcja $1/z$ nie ma w $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ funkcji pierwotnej. □

Ćwiczenie. a) Dowieść, że $\int\limits_{[0,T]} \mathrm{e}^{wz}\mathrm{d}z = (\mathrm{e}^{wT}-1)/w$ i uzyskać stąd wzory na $\int\limits_0^T \mathrm{e}^{ax}\cos(bx)\mathrm{d}x$ i $\int\limits_0^T \mathrm{e}^{ax}\sin(bx)\,\mathrm{d}x$, dla $a, b \in \mathbb{R}$ i $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

b) Udowodnić, że gdy f jest funkcją holomorficzną w otoczeniu okręgu $|z| = 1$ i mającą w tym otoczeniu funkcję pierwotną, to $|f(z) - 1/z| \geq 1$ dla pewnego z.

Twierdzenie 1. *Niech U będzie zbiorem otwartym w $\mathbb{C}$ i niech funkcja $f : U \to \mathbb{C}$ będzie ciągła. Wówczas równoważne są warunki:*

a) Istnieje funkcja pierwotna funkcji f,

b) $\int\limits_\gamma f = 0$ dla każdej zamkniętej drogi γ w U.

Uwaga 1. Nietrudno zauważyć, że warunek b) jest równoważny następującemu:

b′) Dla każdej drogi $\gamma : [a,b] \to U$, całka $\int\limits_\gamma f$ zależy tylko od $\gamma(a)$ i $\gamma(b)$.

W dowodzie twierdzenia wykorzystamy zadanie, omawiane na zajęciach z Topologii:

Zadanie. Składowa zbioru otwartego $U \subset \mathbb{C}$ jest zbiorem otwartym, i każde dwa jej punkty można połączyć łamaną, leżącą w U.

Dowód twierdzenia. Implikacja a)⇒b) wynika ze stwierdzenia 1, bo $\gamma(a) = \gamma(b)$.

Przypuśćmy teraz, że zachodzi b); skonstruujemy funkcję pierwotną F funkcji f. Możemy zakładać, że zbiór U jest spójny (bo skoro jego składowe są otwarte w $\mathbb{C}$, to F wystarczy zbudować na każdej z nich). Ustalmy $z_0 \in U$. Z zadania wynika, że każdemu punktowi $z \in U$ możemy przyporządkować drogę $\gamma_z : [0,1] \to U$, łączącą z_0 z z. Przyjmujemy $F(z) \stackrel{def}{=} \int\limits_{\gamma_z} f$ dla $z \in U$. Tak więc

$$F(z) = \int\limits_{\gamma_z} f \quad \text{dla } z \in U, \text{ przy czym } \gamma_z(0) = z_0 \quad \text{i} \quad \gamma_z(1) = z.$$

Udowodnimy, że $F'(z) = f(z)$ dla $z \in U$. W tym celu ustalmy z i zauważmy, że liczba $r := \operatorname{dist}(z, \mathbb{C} \setminus U)$ jest dodatnia, zaś dla $u \in D(z,r)$ zachodzi $[z,u] \subset D(z,r) \subset U$ oraz

$$F(u) - F(z) = \int\limits_{[z,u]} f \tag{*}$$

Równość ta wynika stąd, że droga $\lambda \stackrel{def}{=} \gamma_z \#[z,u]\#(-\gamma_u)$ jest zamknięta, skąd wobec b):

$$0 = \int\limits_{\lambda} f = \int\limits_{\gamma_z} f + \int\limits_{[z,u]} f - \int\limits_{\gamma_u} f = F(z) + \int\limits_{[z,u]} f - F(u). \tag{**}$$

Dalej, $\int\limits_{[z,u]} f = \int_0^1 f(z+t(u-z))(u-z)dt$, więc z (*) mamy $\frac{F(u)-F(z)}{u-z} = \int_0^1 \varphi_u(t)dt$, gdzie $\varphi_u(t) := f(z+t(u-z))$. A że $||\varphi_u - f(z)|| = \sup_{z' \in [z,u]} |f(z') - f(z)|$ i $[z,u] \subset \overline{D}(z, |z-u|)$, to z ciągłości funkcji f wynika, że $\lim_{u \to z} \frac{F(u)-F(z)}{u-z} = \int_0^1 f(z)dt = f(z)$. □

Podobne jest następujące

Twierdzenie 2. *Niech otwarty zbiór $U \subset \mathbb{C}$ będzie* **gwiaździsty**, *tzn. niech istnieje punkt $z_0 \in U$ taki, że $[z_0, z] \subset U$ dla $z \in U$. Jeśli ciągła funkcja $f : U \to \mathbb{C}$ spełnia warunek*

$$\int\limits_{\partial\triangle} f = 0 \quad \textit{dla dowolnego trójkąta } \triangle \subset U, \tag{5}$$

to f ma funkcję pierwotną.

Dowód. Dla $z \in U$ przyjmijmy $\gamma_z = [z_0, z]$ oraz $F(z) = \int\limits_{\gamma_z} f$. Z założenia, droga γ_z przyjmuje wartości w U. Ponadto powyższy dowód równości $F'(z) = f(z)$ pozostaje słuszny, bo z (5) wynika prawdziwość (**) i w konsekwencji prawdziwość (*). ⊟

Uwaga 2. Warunek b) twierdzenia 1 jest równoważny temu, by całka $\int_\gamma f$ zależała tylko od krańców $\gamma(a), \gamma(b)$ drogi $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$. Wynika to stąd, że gdy drogi γ_1, γ_2 mają wspólne krańce, to droga $\gamma_1\#(-\gamma_2)$ jest zamknięta. ⊟

Istnienie funkcji pierwotnej danej funkcji holomorficznej wiąże się z następującym zagadnieniem. Niech G będzie obszarem w $\mathbb{C}$, a funkcja $u : G \to \mathbb{R}$ będzie harmoniczna. Pytamy: kiedy istnieje funkcja holomorficzna $f : G \to \mathbb{C}$, której u jest częścią rzeczywistą?

Twierdzenie 3. *Jeśli funkcja taka istnieje, to jest ona funkcją pierwotną funkcji* $g := u_x - \mathrm{i} u_y$. *Odwrotnie, jeśli* $f' = g$, *to* $\operatorname{Re} f$ *różni się od* u *o stałą.*

Dowód. Jeśli $u = \operatorname{Re} f$, to $f' = g$, patrz uwaga 1 w §I.2. Odwrotnie, jeśli $f' = g$ i przyjąć $w := \operatorname{Re} f$, to otrzymamy $f' = w_x - \mathrm{i} w_y$ i $f' = u_x - \mathrm{i} u_y$. To daje $w_x = u_x$ i $w_y = u_y$, a zatem $w - u = \text{const}$. $\boxminus$

3 Lemat Goursata i istnienie funkcji pierwotnej na dysku

Twierdzenie 1 (Lemat Goursata)**.** *Gdy funkcja f jest holomorficzna w zbiorze U, to*

$$\int\limits_{\partial\triangle} f = 0 \quad \textit{dla każdego trójkąta } \triangle \subset U. \tag{6}$$

Dowód. Podzielmy dany trójkąt $\triangle$ jak na rysunku, połowiąc każdy jego bok. Wówczas:

$$\int\limits_{\partial\triangle} f = \int\limits_{\partial\triangle'} f + \int\limits_{\partial\triangle''} f + \int\limits_{\partial\triangle'''} f + \int\limits_{\partial\triangle''''} f.$$

Istnieje zatem trójkąt $\triangle_1 \in \{\triangle', \triangle'', \triangle''', \triangle''''\}$ taki, że

$$\Big|\int\limits_{\partial\triangle_1} f\Big| \geqslant \frac{1}{4}\Big|\int\limits_{\partial\triangle} f\Big|.$$

Boki tego trójkąta są równe $A/2, B/2, C/2$, gdzie A, B, C to boki trójkąta Δ, więc

$$\ell(\partial\triangle_1) = \frac{1}{2}\ell(\partial\triangle), \quad \operatorname{diam}(\triangle_1) = \frac{1}{2}\operatorname{diam}(\triangle)$$

Gdy znamy trójkąt $\triangle_i$, to dzielimy go w analogiczny sposób, otrzymując indukcyjnie trójkąty $\triangle \supset \triangle_1 \supset \triangle_2 \supset \ldots$ takie, że

$$\ell(\partial\triangle_i) = \frac{1}{2^i}\ell(\partial\triangle), \quad \operatorname{diam}(\triangle_i) = \frac{1}{2^i}\operatorname{diam}(\triangle) \tag{p}$$

oraz

$$\Big|\int\limits_{\partial\triangle_i} f\Big| \geqslant \frac{1}{4^i}\Big|\int\limits_{\partial\triangle} f\Big| \tag{q}$$

Ponieważ $\operatorname{diam} \triangle_i \to 0$ i $\triangle_1 \supset \triangle_2 \supset \ldots$, więc na podstawie twierdzenia Cantora istnieje punkt $p \in \bigcap_{i=1}^{\infty} \overline{\triangle_i}$.

Z istnienia pochodnej $f'(p)$ wynika, że $f = g + r$, gdzie

$$g(z) := f(p) + f'(p)(z-p) \ \text{ i } \ \frac{r(z)}{z-p} \xrightarrow[z\to p]{} 0. \tag{r}$$

Ponieważ $f = g + r$, więc dla każdego $i \geqslant 1$,

$$\Big|\int_{\partial\triangle_i} f\Big| \leqslant \Big|\int_{\partial\triangle_i} g\Big| + \Big|\int_{\partial\triangle_i} r\Big| \leqslant \Big|\int_{\partial\triangle_i} g\Big| + \ell(\partial\triangle_i) \sup_{z\in\partial\triangle_i} |r(z)| \tag{s}$$

Ale $\int_{\partial\triangle_i} g = 0$, bo wielomian g ma oczywiście funkcję pierwotną. Ponadto $r(p) = 0$, zaś dla $z \in \triangle_i \setminus \{p\}$ mamy $|r(z)| = \frac{|r(z)|}{|z-p|}|z-p| \leqslant \frac{|r(z)|}{|z-p|} \operatorname{diam}(\triangle_i)$. Zatem, na mocy (q) i (s),

$$\Big|\int_{\partial\triangle} f\Big| \leqslant 4^i \Big|\int_{\partial\triangle_i} f\Big| \leqslant 4^i \ell(\partial\triangle_i) \left(\sup_{z\in\partial\triangle_i, z\neq p} \frac{|r(z)|}{|z-p|}\right) \operatorname{diam}(\triangle_i)$$

Stąd wobec (p) otrzymujemy:

$$\Big|\int_{\partial\triangle} f\Big| \leqslant 4^i \cdot \frac{1}{2^i}\ell(\triangle) \cdot \frac{1}{2^i} \operatorname{diam}(\triangle) \cdot \sup_{z\in\partial\triangle_i, z\neq p} \frac{|r(z)|}{|z-p|} \xrightarrow[i\to\infty]{} 0,$$

gdzie zbieżność wynika z (r) i (p). Tak więc $\int_{\partial\triangle} f = 0$. □

Z lematu Goursata i twierdzenia 2 z §2 wynika

Wniosek 1. *Funkcja, holomorficzna w danym dysku, ma w nim funkcję pierwotną.*

4 Twierdzenie Cauchy'ego o równości całek (wersja homotopijna)

Poniższe twierdzenie jest centralne dla tego wykładu:

Twierdzenie 1 (Cauchy'ego o równości całek)**.** *Gdy kawałkami gładkie pętle λ, μ są homotopijne w zbiorze $U \subset \mathbb{C}$, to*

$$\int_\lambda f = \int_\mu f \quad \textit{dla każdej funkcji } f \in H(U).$$

Przypomnijmy, co oznacza (znana z wykładu z topologii) homotopijność dwóch pętli.

Definicje. a) Powiemy, że pętle λ, μ są w zbiorze U **swobodnie homotopijne**, jeśli istnieje rodzina pętli $(\gamma_s : [a,b] \to U)_{s\in[0,1]}$ taka, że $\gamma_0 = \lambda, \gamma_1 = \mu$ i równość

$$\Gamma(s,t) = \gamma_s(t) \quad \text{dla} \ \ (s,t) \in [0,1] \times [a,b] \tag{!}$$

wyznacza ciągłe przekształcenie $\Gamma : [0,1] \times [a,b] \to U$.

b) O rodzinie powyższej (a także o odpowiadającej jej funkcji Γ) powiemy, że jest **swobodną homotopią pętli**, łączącą pętle λ i μ w zbiorze U. Słowa „swobodną" i „swobodnie" będziemy na ogół opuszczać – odnoszą się ono do tego, że nie żądamy, by punkt $\gamma_s(a) = \gamma_s(b)$ był stały (tzn., by nie zależał od s).

Uwaga 1. a) Homotopia pętli $(\gamma_s)_{s\in[0,1]}$, łącząca λ z μ, jest więc rodziną pętli indeksowanych parametrem $s \in [0,1]$ (interpretowanym jako czas); przy tym chwili $s = 0$ odpowiada jedna z pętli λ, μ, zaś $s = 1$ –druga. Żąda się, by zależność pętli γ_s od czasu s była ciągła–przez co rozumiemy ciągłość funkcji $(s,t) \mapsto \gamma_s(t)$, oznaczonej wyżej przez Γ.

b) Ponieważ $\gamma_0 = \lambda$, $\gamma_1 = \mu$ oraz $\gamma_s(a) = \gamma_s(b)$ dla $s \in [0,1]$ (bo γ_s jest pętlą!), więc

$$\Gamma(0,t) = \lambda(t) \text{ i } \Gamma(1,t) = \mu(t) \ \forall t \in [a,b], \ \text{oraz } \Gamma(s,a) = \Gamma(s,b) \ \forall s \in [0,1]. \tag{!!}$$

To, że homotopią pętli łączącą λ z μ nazywana jest i rodzina pętli $(\gamma_s)_{s\in[0,1]}$, i spełniająca warunki (!!) funkcja ciągła $\Gamma : [0,1] \times [a,b] \to \mathbb{C}$, tłumaczy się tym, że wzór (!) pozwala zarówno wyznaczyć Γ, gdy znamy rodzinę (γ_s), jak i tę rodzinę, gdy znamy Γ.

Dowód twierdzenia Cauchy'ego. Ustalmy zbiór U i funkcję $f \in H(U)$. Możemy zakładać, że U jest zbiorem otwartym. (Inaczej przedłużymy f do pewnej funkcji $\widetilde{f} \in H(\widetilde{U})$, gdzie $\widetilde{U} \subset \mathbb{C}$ jest zbiorem otwartym, i zastąpimy U przez $\widetilde{U}$, zaś f przez $\widetilde{f}$.)

Z założenia, istnieje funkcja ciągła $\Gamma : [0,1] \times [a,b] \to U$ spełniająca warunki (!!). Ponieważ prostokąt $[0,1] \times [a,b]$ jest zwarty, więc funkcja ta jest jednostajnie ciągła, a jej obraz $\mathrm{im}(\Gamma) = \Gamma([0,1] \times [a,b])$ jest zwarty. Wynika stąd, że liczba

$$\varepsilon \stackrel{def}{=} \mathrm{dist}(\mathrm{im}(\Gamma), \mathbb{C} \setminus U)$$

jest dodatnia, oraz istnieje liczba $\delta > 0$ taka, że

$$\max(|s - s'|, |t - t'|) < \delta \Rightarrow |\Gamma(s,t) - \Gamma(s',t')| < \varepsilon.$$

Podzielmy prostokąt $[0,1] \times [a,b]$ odcinkami $\{s_i\} \times [a,b]$ i $[0,1] \times \{t_i\}$, $i = 0, \ldots, n$, na prostokąciki o średnicy $< \delta$. (Zakładamy, że $s_0 = 0$, $s_n = 1$, $t_0 = a$, $t_n = b$.) Niech

$$p_{ij} = \Gamma(s_i, t_j)$$

i rozważmy następujące łamane (są one zamknięte, bo $p_{i0} = p_{in}$ ze względu na (2)):

$$L_i = [p_{i0}, p_{i1}, \ldots, p_{in}] \quad \text{i} \quad C_{ij} = [p_{ij}, p_{i,j+1}, p_{i+1,j+1}, p_{i+1,j}, p_{ij}].$$

Wszystkie wierzchołki łamanej C_{ij} leżą w dysku $D(p_{ij}, \varepsilon) \subset U$. Cała łamana C_{ij} leży więc w tym dysku i $\int\limits_{C_{ij}} f = 0$, na mocy wniosku w §3 i twierdzenia 1 w §2. Dodajmy te równości przy i ustalonym, lecz j przebiegającym $0, \ldots, n-1$; otrzymamy zależności (patrz rysunek)

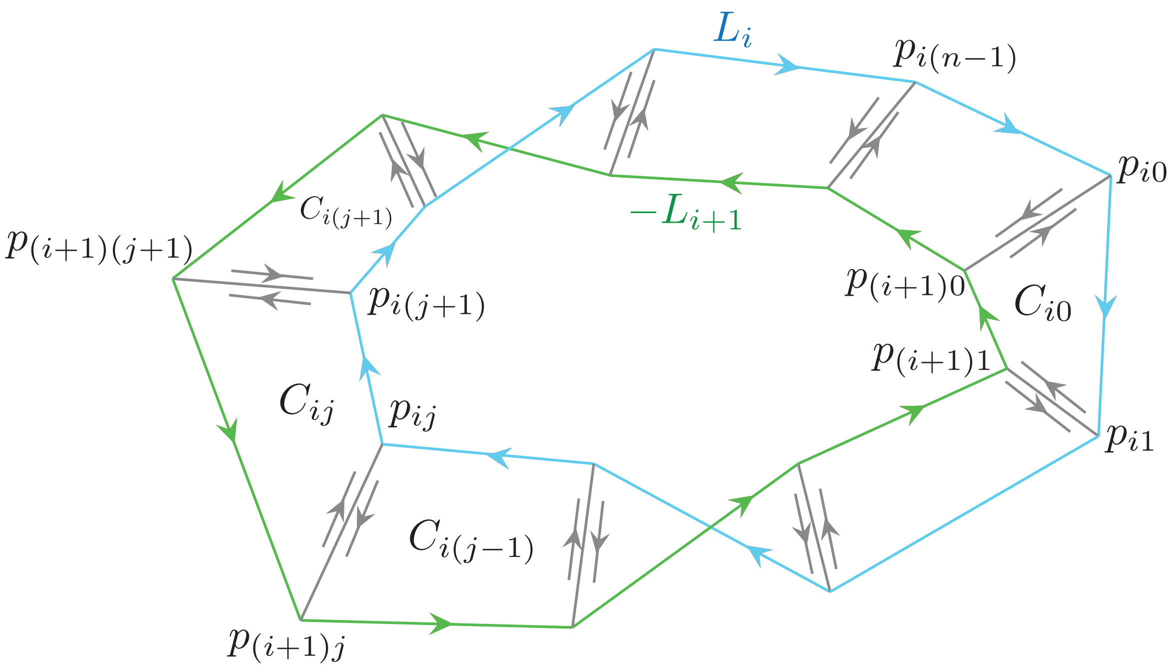
$$\int_{L_i} f - \int_{L_{i+1}} f = 0 \text{ dla } i = 0, \ldots, n-1. \tag{*}$$

Tak więc $\int\limits_{L_0} f = \cdots = \int\limits_{L_n} f$. Twierdzimy, że podobnie

$$\int_{\lambda} f = \int_{L_0} f \qquad \text{oraz} \qquad \int_{\mu} f = \int_{L_n} f \tag{**}$$

Istotnie, tym razem pętla $\lambda_{|[t_j,t_{j+1}]} \# [p_{0,j+1}, p_{0j}]$ przebiega w dysku $D(p_{0j}, \varepsilon) \subset U$, skąd całka funkcji f po niej jest równa zeru. Całki po $\lambda_{|[t_j,t_{j+1}]}$ i po $[p_{0j}, p_{0,j+1}]$ są więc równe i po dodaniu tych n równości otrzymujemy pierwszą zależność w (**). Dowód drugiej jest analogiczny.

Z (**) i równości $\int\limits_{L_0} f = \int\limits_{L_n} f$ wynika, że $\int\limits_{\lambda} f = \int\limits_{\mu} f$. □



Uwaga 2. * Postawmy pytanie, czy twierdzenie Cauchy'ego pozostaje słuszne dla dróg λ, μ, które niekoniecznie są pętlami. Odpowiedź jest negatywna, gdy przez homotopijność tych dróg w zbiorze U rozumieć jedynie istnienie rodziny ścieżek $(\gamma_s : [a,b] \to U)_{s \in [0,1]}$, takiej, że $\gamma_0 = \lambda, \gamma_1 = \mu$ i funkcja $\Gamma(s,t) := \gamma_s(t)$ jest ciągła. Jeśli jednak żądać ponadto, by homotopia (γ_s) miała stałe krańce, tzn. by $\gamma_s(c) = \gamma_0(c)$ dla $c = a, b$ i $s \in [0,1]$, to odpowiedź jest pozytywna – co wynika z twierdzenia 1, bo pętla $\lambda \#(-\mu)$ jest wówczas homotopijna z pętlą stałą. (Szczegóły są pozostawione jako zadanie.) Oczywiście, ten dodatkowy warunek może być spełniony tylko wtedy, gdy $\lambda(a) = \mu(a)$ i $\lambda(b) = \mu(b)$.

III Pierwsze wnioski z twierdzenia Cauchy'ego o równości całek.

1 Zbiory jednospójne.

Definicja. Zbiór $U \subset \mathbb{C}$ jest **jednospójny**, jeśli jest łukowo spójny i każda pętla w U jest w U **homotopijnie nieistotna**, tzn. jest w U homotopijna z (jakąkolwiek) pętlą stałą.

Przykład. Każdy zbiór gwiaździsty (a więc i każdy zbiór wypukły) jest jednospójny. Istotnie, gdy $\gamma : [a, b] \to X$ jest pętlą w takim zbiorze X, zaś $z_0 \in X$ punktem występującym w definicji gwiaździstości, to wzór $\gamma_s(t) := sz_0 + (1 - s)\gamma(t)$ zadaje homotopię pętli, łączącą $\gamma = \gamma_0$ z pętlą stale równą z_0.

Z twierdzenia Cauchy'ego z §II.4 i twierdzenia 1 z §II.2 wynika ważny

Wniosek 1. *Niech funkcja f będzie holomorficzna w zbiorze $U \subset \mathbb{C}$. Wówczas $\int_\gamma f = 0$ dla każdej drogi zamkniętej γ w U, która jest w U homotopijna z pętlą stałą.*

W szczególności, jeśli zbiór U jest jednospójny, to $\int_\gamma f = 0$ dla dowolnej drogi zamkniętej w U, wobec czego f ma funkcję pierwotną w U.

Uwaga 1. Poglądowo, można homotopijną (nie)istotność pętli opisać tak. Wyobraźmy sobie zbiór U jako powierzchnię tafli lodu, a obraz pętli γ jako przymarzniętą do tej tafli gumkę apteczną. Zakładamy, że punkty gumki parametryzowane są liczbami $t \in [a, b]$, zaś punkt, odpowiadający parametrowi t, przymarznięty jest w punkcie $\gamma(t) \in U$. (Liczbom a i b odpowiada ten sam punkt gumki) Jeśli, z chwilą odwilży, gumka może skurczyć się do punktu nawet wówczas, gdy kurcząc się jest zmuszona do pozostawania w U, to pętla γ jest w U homotopijnie nieistotna, i vice versa.

Choć uwaga ta podsuwa pomocne wyobrażenia, to nie daje ona sposobu opisu homotopii, łączącej daną pętlę z pętlą stałą. Poniżej wpierw wykażemy znaczenie jednospójności, a potem wprowadzimy pojęcie indeksu, ułatwiające badanie homotopijności pętli.

2 Istnienie funkcji pierwotnych i gałęzi logarytmu w obszarze jednospójnym.

Jak wiemy, funkcja holomorficzna w danym obszarze U może nie mieć funkcji pierwotnej czy gałęzi logarytmu. Przy założeniu jednospójności obszaru U sprawy mają się prościej. I tak, z twierdzenia 1 w §II.2 i wniosku 1 w §1 wynika

Twierdzenie 1. *Funkcja f, holomorficzna w obszarze jednospójnym, ma w nim funkcję pierwotną. Funkcja pierwotna wyraża się wzorem $F(z) = \int_{\gamma_z} f$, gdzie γ_z jest dowolną drogą, łączącą ustalony punkt obszaru z punktem z. (Wynik nie zależy od wyboru drogi.)*

Następujące twierdzenie pozwoli nam uzyskać stąd istnienie gałęzi logarytmu:

Twierdzenie 2. *Niech T będzie otwartym i spójnym podzbiorem przestrzeni $\mathbb{R}$ lub $\mathbb{C}$ i niech funkcja $f : T \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ma pochodną w każdym punkcie.*

a) Każda gałąź logarytmu g funkcji f jest różniczkowalna i $g' = f'/f$.

b) Gdy, odwrotnie, funkcja $g : T \to \mathbb{C}$ spełnia warunki $g' = f'/f$ i $e^{g(t_0)} = f(t_0)$ dla pewnego punktu $t_0 \in T$, to g jest gałęzią logarytmu funkcji f.

Dowód. a) Niech $t \in T$ i niech l będzie gałęzią logarytmu, określoną na pewnym otoczeniu U punktu $f(t_0)$ i spełniającą warunek $l(f(t_0)) = h(t_0)$. (Korzystamy z części a) twierdzenia 1 z §I.8, dla $f = \exp$ i $z_0 = h(t_0)$.) Niech dalej V będzie spójnym otoczeniem punktu t w T, takim, że $f(V) \subset U$. Na mocy stwierdzenia 1 w §I.7, funkcja $g_{|V} - (l \circ f)_{|V}$ jest stała, wobec czego $g'(t) = (l \circ f)'(t) = f'(t)/f(t)$; patrz wniosek 1a) w §I.8, dla $n = 1$.

b) Niech $h := f e^{-g}$. Ponieważ $h' = f' e^{-g} - f g' e^{-g} = 0$, więc funkcja h jest stała i równa 1 (bo $h(t_0) = 1$; wykorzystaliśmy zadanie z §I.2). Zatem $f = e^g$. $\square$

Twierdzenie 3. *Funkcja holomorficzna, nie przyjmująca wartości 0 i określona w obszarze jednospójnym, ma w nim gałęzie logarytmu, argumentu i s–tej potęgi, dla $s \in \mathbb{C}$.*

Dowód. Gdy badaną funkcję oznaczyć przez f, to na podstawie twierdzenia 1 stwierdzimy, że f'/f ma funkcję pierwotną. [7]. Gałąź logarytmu funkcji f istnieje więc na mocy twierdzenia 2, a pozostałe dwie gałęzie – na mocy wyników z §I.7. $\square$

Zadanie. * Dowieść, że gdy $f \in H(U)$, obszar U jest jednospójny i $\pm 1 \notin \mathrm{im}(f)$, to $f = \cos \circ g$ dla pewnej funkcji $g \in H(U)$. (Wskazówka: $\cos(w) = u(e^{iw})$, gdzie $u(z) = \frac{1}{2}(z + z^{-1})$ dla $z \neq 0$. Dowieść wpierw istnienia funkcji $h \in H(U)$ takiej, że $f = u \circ h$.)

3 Indeks pętli względem punktu.

Wykorzystamy całkę do nadania precyzyjnego znaczenia zwrotowi „dana pętla n–krotnie okrąża punkt p”. Można to zrobić i wykorzystując rozważania czysto topologiczne, lecz ujęcie poniższe jest użyteczne w badanej w następnym rozdziale teorii residuów.

Definicja. Niech pętla γ będzie kawałkami gładka i niech $p \notin \mathrm{im}(\gamma)$. **Indeksem pętli** γ **względem punktu** p (czy **indeksem punktu** p względem γ) nazywamy liczbę

$$\mathrm{ind}(\gamma, p) \stackrel{def}{=} \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{w - p}\, dw \tag{7}$$

Twierdzenie 1. *Niech pętle $\gamma, \gamma_1 : [a, b] \to \mathbb{C}$ będą kawałkami gładkie. Wówczas:*

a) Gdy pętle γ i γ_1 są homotopijne w $\mathbb{C} \setminus \{p\}$, to $\mathrm{ind}(\gamma, p) = \mathrm{ind}(\gamma_1, p)$.

b) $\mathrm{ind}(\gamma, p) = \mathrm{ind}(\gamma - p, 0)$ dla $p \in \mathbb{C} \setminus \mathrm{im}(\gamma)$, gdzie $(\gamma - p)(t) \stackrel{def}{=} \gamma(t) - p$.

c) Funkcja $p \mapsto \mathrm{ind}(\gamma, p)$ jest ciągła na $\mathbb{C} \setminus \mathrm{im}(\gamma)$.

d) $\mathrm{ind}(\gamma, p) \in \mathbb{Z}$ dla $p \in \mathbb{C} \setminus \mathrm{im}(\gamma)$.

e) Gdy $0 \notin \mathrm{im}(\gamma)$, to:

e1) istnieje gałąź argumentu funkcji $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$, oraz

e2) jeśli σ jest taką gałęzią, to $\mathrm{ind}(\gamma, 0) = \frac{1}{2\pi}(\sigma(b) - \sigma(a))$.

[7](N) Gra tu jednak rolę holomorficzność funkcji f'. Udowodnimy ją dopiero w §IV.1, więc teraz musimy ją *założyć*.

Uwaga 1. i) Z e) i b) wynika geometryczna interpretacja liczby $2\pi\cdot\mathrm{ind}(\gamma, p)$: jest to przyrost argumentu punktu $\gamma(t) - p$, gdy t zmienia się od a do b. Gdy $\mathrm{ind}(\gamma, p) = n$ powiemy więc, że γ **okrąża** $|n|$**–krotnie punkt** p, przy czym w kierunku **dodatnim** (lub: **przeciwnym do ruchu wskazówek zegara**) gdy $n > 0$, a **ujemnym** gdy $n < 0$.

ii) Z c) i d) wynika, że funkcja $p \mapsto \mathrm{ind}(\gamma, p)$ jest stała na składowych zbioru $\mathbb{C} \setminus \mathrm{im}(\gamma)$.

iii) Z a) wynika, że $\mathrm{ind}(\gamma, p) = 0$ gdy pętla γ jest homotopijnie nieistotna w $\mathbb{C} \setminus \{p\}$.

iv) W szczególności, $\mathrm{ind}(\gamma, p) = 0$ gdy punkt p leży w nieograniczonej składowej spójności zbioru $\mathbb{C}\setminus\mathrm{im}(\gamma)$. Istotnie, na podstawie ii) wystarczy rozpatrzeć przypadek, gdy p leży poza dyskiem, zawierającym zbiór $\mathrm{im}(\gamma)$ – a wtedy stosuje się iii). □

Przykład. Niech $\gamma_n(t) = \exp(2\pi i n t)$ dla $t \in [0, 1]$ i $n \in \mathbb{Z}$. Z i) wynika bez żadnych rachunków, że $\mathrm{ind}(\gamma_n, p) = n$ gdy $p = 0$ – a więc i gdy $p \in D(0, 1)$, wobec ii).

W dowodzie twierdzenia wykorzystamy

Lemat 1. *Niech* $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ *będzie drogą. Wówczas:*

1) $\gamma = \mathrm{e}^{\lambda}$ *dla pewnej drogi* $\lambda : [a, b] \to \mathbb{C}$*,*

2) Gdy λ *jest taką drogą, to* $\int_\gamma \frac{1}{w}\,\mathrm{d}w = \lambda(b) - \lambda(a)$*.*

Dowód. Ad 1). Dla gładkiej drogi γ, teza ta wynika z twierdzenia 2 w §2, bo γ'/γ ma pewną funkcję pierwotną (jak każda funkcja ciągła, określona na przedziale); przy tym można ją tak zmienić, by w wybranym punkcie przyjmowała należną wartość. Przypadek ogólny pomijamy, pozostawiając go jako zadanie uzupełniające.

Ad 2). Z definicji, $\int_\gamma \frac{1}{w}\,\mathrm{d}w = \int_a^b \frac{1}{\mathrm{e}^{\lambda(t)}}\mathrm{e}^{\lambda(t)}\lambda'(t)\,\mathrm{d}t = \lambda(b) - \lambda(a)$. ⊟

Dowód twierdzenia 1. Część a) wynika z twierdzenia Cauchy'ego, zaś b) jest oczywista. Część c) wynika z wniosku 1 z §1, bo jeśli $p_n \to p_0 \notin \mathrm{im}(\gamma)$, to $\frac{1}{w-p_n} \to \frac{1}{w-p}$ jednostajnie względem $w \in \mathrm{im}(\gamma)$. (Jest to ćwiczenie.) Wreszcie d) wynika z e) i b), bo argumenty $\sigma(a)$ i $\sigma(b)$ liczby $\gamma(a) = \gamma(b)$ różnią się o $2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Pozostaje dowieść e).

Ad e1). Na podstawie lematu, istnieje gałąź logarytmu funkcji γ. Wobec tego gałąź argumentu też istnieje, jak dowiedziono w §I.7.

Ad e2). Niech $\sigma : [a, b] \to \mathbb{R}$ będzie gałęzią argumentu funkcji γ. Przyjmijmy $\lambda = \ln|\gamma| + i\sigma$, jak w stwierdzeniu 2b) w §I.7. Wtedy $\mathrm{e}^{\lambda} = \gamma$ i funkcja λ jest kawałkami gładka, patrz twierdzenie 2 w §2. Z części ii) lematu wynika wiec, że $2\pi\cdot\mathrm{ind}(\gamma, 0) = \frac{1}{i}(\lambda(b)-\lambda(a)) = \sigma(b)-\sigma(a)+\frac{1}{i}(\ln|\gamma(b)|-\ln|\gamma(a)|)$. Prawa strona jest równa $\sigma(b)-\sigma(a)$, bo $\gamma(a) = \gamma(b)$. □

Uwaga 2. * Teza e1) pozostaje prawdziwa i gdy pętla $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}\setminus\{0\}$ nie jest kawałkami gładka. Pozwala to równości z e2) i b) użyć do zdefiniowania indeksu dowolnej pętli. Indeks ten odgrywa istotną rolę w topologii płaszczyzny, ze względu na następujące

Twierdzenie 2 (H. Poincaré'go)**.** *Pętle* γ_0, γ_1*, mające ten sam indeks względem danego punktu* $p \notin \mathrm{im}(\gamma_0) \cup \mathrm{im}(\gamma_1)$ *i tę samą dziedzinę* $[a, b]$*, są homotopijne w* $\mathbb{C} \setminus \{p\}$*.*

Dowód. * Możemy założyć, że $p = 0$. Przy λ_n oznaczającym gałęź logarytmu funkcji γ_n $(n = 0, 1)$, homotopię łączącą γ_0 z γ_1 w $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ zadajemy wzorem $\gamma_s = \exp(\lambda_0 + s(\lambda_1 - \lambda_0))$, gdzie $s \in [0, 1]$. Warunek $\gamma_s(a) = \gamma_s(b)$ wynika stąd, że $\lambda_n(b) - \lambda_n(a) = 2\pi\mathrm{i} \cdot \mathrm{ind}(\gamma_n) \in 2\pi\mathrm{i}\mathbb{Z}$ i wobec tego $(\lambda_0 + s(\lambda_1 - \lambda_0))(a) \equiv (\lambda_0 + s(\lambda_1 - \lambda_0))(b) (\mathrm{mod}\, 2\pi\mathrm{i})$.

Zadanie. Dowieść, że gałąź logarytmu na zbiorze otwartym $U \subset \mathbb{C}$ istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy żadna droga zamknięta γ w U nie okrąża zera (tzn., zawsze $\mathrm{ind}(\gamma, 0) = 0$).

Zadanie. * Dowieść równości $\mathrm{ind}(\gamma_1 \cdot \gamma_2, 0) = \mathrm{ind}(\gamma_1, 0) + \mathrm{ind}(\gamma_2, 0)$, dla dowolnych pętli $\gamma_1, \gamma_2 : [a, b] \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$. (Wskazówka: lemat 1.)

4 Wyznaczanie indeksu.

Choć liczba $\mathrm{ind}(\gamma, p)$ ma jasną interpretację geometryczną, to nie jest widoczne, jak wyznaczyć ją w przypadku skomplikowanej drogi zamkniętej γ. Poniższy sposób umożliwia porównanie $\mathrm{ind}(\gamma, p)$ z $\mathrm{ind}(\gamma, q)$ przy następującym bardzo ogólnym założeniu:

$$p, q \notin \mathrm{im}(\gamma) \text{ i zbiór } \gamma^{-1}([p, q]) \text{ jest skończony.} \tag{*}$$

Oznaczmy punkty zbioru $\gamma^{-1}([p, q])$ przez $t_1, \ldots, t_n$; zakładamy, że nie ma wśród nich krańców a, b odcinka, na którym określona jest pętla γ. (Gdy jest inaczej, zastąpimy γ przez pętlę $t \mapsto \gamma(t)$ dla $t \in [a_1, b]$ i $t \mapsto \gamma(t-b+a)$ dla $t \in [b, b+a_1-a]$, gdzie $a_1 \in (a, b) \setminus \gamma^{-1}([p, q])$.)

Niech L^+ oznacza półprostą o początku w p, na której leży punkt q; zawierająca ją prosta dzieli $\mathbb{C}$ na dwie półpłaszczyzny. Za „lewą" przyjmiemy tę z nich, która jest po lewej stronie prostej, gdy patrzeć od p do q; pozostałą nazwiemy „prawą". Ponieważ $\gamma(a) = \gamma(b) \notin [p, q]$, więc dla każdej z liczb t_i istnieją $s_i^- \in (a, t_i)$, $s_i^+ \in (t_i, b)$ takie, że obraz $\gamma((s_i^-, t_i))$ przedziału (s_i^-, t_i) (odp. obraz przedziału (t_i, s_i^+)) jest zawarty w jednej z tych półpłaszczyzn. Niech

$$\varepsilon_i = \begin{cases} 0 & \text{gdy } \gamma(s_i^-) \text{ i } \gamma(s_i^+) \text{ leżą w tej samej półpłaszczyźnie,} \\ 1 & \text{gdy } \gamma(s_i^-) \text{ leży w lewej półpłaszczyźnie, a } \gamma(s_i^+) \text{ w prawej,} \\ -1 & \text{gdy } \gamma(s_i^-) \text{ leży w prawej półpłaszczyźnie, a } \gamma(s_i^+) \text{ w lewej.} \end{cases}$$

(Jeśli myśleć o „moim" przejeździe od p do q i przejeździe „pojazdu" $\gamma(t)$, to $\varepsilon_i = 0$ gdy do kolizji w punkcie $\gamma(t_i)$ nie może dojść, bo pojazd wycofuje się skąd nadjechał, $\varepsilon_i = 1$ gdy może do niej dojść, lecz ja mam pierszeństwo przejazdu, zaś $\varepsilon_i = -1$ w pozostałym razie.)

Twierdzenie 1. *Przy tych oznaczeniach,* $\mathrm{ind}(\gamma, q) - \mathrm{ind}(\gamma, p) = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i$.

Dowód. * Możemy zakładać, że $q = 0$ i $L^+ = \mathbb{R}^+$, bo obie strony dowodzonej równości nie zmienią się, gdy γ, q i p poddamy temu samemu przesunięciu i obrotowi. Rozpatrzymy wpierw przypadek, gdy $\gamma^{-1}(L^+) = \gamma^{-1}([0, p]$; wtedy też $\mathrm{ind}(\gamma, p) = 0$, bo p leży w nieograniczonej składowej zbioru $\mathbb{C} \setminus \mathrm{im}(\gamma)$.

Niech $\tau : [a,b] \to \mathbb{R}$ będzie podzieloną przez 2π gałęzią argumentu funkcji γ; wówczas $\tau(b) - \tau(a) = \operatorname{ind}(\gamma, 0) \in \mathbb{Z}$ i $\{t_1, \ldots, t_n\} = \tau^{-1}(\mathbb{Z})$. Nazwijmy funkcję τ **rosnącą** (odp. **malejącą**) **w punkcie** t_i, jeśli w pewnym jego otoczeniu funkcje $t - t_i$ i $\tau(t) - \tau(t_i)$ są zgodnego (odp.: przeciwnego) znaku –a więc, gdy $\varepsilon_i = 1$ (odp. $\varepsilon_i = -1$). Teza wynika wtedy z następującego po dowodzie zadania, pozostawionego jako łamigłówka.

Gdy dodatkowe założenie o $\gamma^{-1}(L^+)$ nie jest spełnione, to obierzmy na L^+ punkt p' tak daleko położony, by $[q, p') \supset L^+ \cap \operatorname{im}(\gamma)$. Powyższy przypadek szczególny pozwala (z zastrzeżeniem, o którym za chwilę) wyznaczyć $\operatorname{ind}(\gamma, q) - \operatorname{ind}(\gamma, p')$ i $\operatorname{ind}(\gamma, p) - \operatorname{ind}(\gamma, p')$, a odjęcie stronami otrzymanych równości daje tezę.

Rozumowanie to wymaga, by zbiór $\gamma^{-1}([q,p'] = \gamma^{-1}(L^+)$ był skończony. Można je jednak wykorzystać przy γ zmienionym na drogę zamkniętą $\gamma_1 : [a,b] \to \mathbb{C}$ spełniającą ten warunek, równą γ na $T := \bigcup_{i=1}^n [s_i^-, s_i^+]$ i tak bliską γ, by $\operatorname{ind}(\gamma, z)$=$\operatorname{ind}(\gamma_1, z)$ dla $z = q, p$ – którą znajdujemy bez trudu, zastępując γ na zbiorze $[a,b] \setminus T$ przez łamaną, bliską $\gamma_{|[a,b]\setminus T}$. ⊟

Zadanie. Niech funkcja $\tau : [a,b] \to \mathbb{R}$ będzie ciągła, zaś zbiór $\tau^{-1}(\mathbb{Z})$ – skończony i zawarty w (a,b). Dowieść, że jeśli liczba $\tau(b) - \tau(a)$ jest całkowita, to jest ona równa różnicy między liczbą tych punktów $t_i \in \tau^{-1}(\mathbb{Z})$, w których funkcja τ jest rosnąca, a liczbą tych $t_j \in \tau^{-1}(\mathbb{Z})$, w których funkcja τ jest malejąca.

Ćwiczenie. Przy $p = -2$ i $\gamma(t) = \mathrm{e}^{7\mathrm{i}t}$ ($t \in [0, 2\pi]$), czy twierdzenie da $\operatorname{ind}(\gamma, 0) = 7$?

5 Całka po cyklu, zbiory regularne, zastosowanie.

Prócz (kawałkami gładkich) pętli, wygodnie będzie rozważać cykle i całki po nich.

Definicja. **Cyklem** nazywamy wyrażnie postaci $\gamma = \gamma_1 + \cdots + \gamma_k$, gdzie $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$ są drogami zamkniętymi. (Obejmuje to **cykl zerowy**, który traktujemy jako sumę pustego zbioru dróg.) Zbiór $\bigcup_{i=1}^k \operatorname{im}(\gamma_i)$ oznaczamy γ^* i nazywamy **nośnikiem** tego cyklu. Gdy $\gamma^* \subset U$, mówimy, że γ jest cyklem w zbiorze U. Przyjmujemy też

$$\int_\gamma f := \sum_i \int_{\gamma_i} f \quad \text{oraz} \quad \operatorname{ind}(\gamma, p) := \sum_i \operatorname{ind}(\gamma_i, p)$$

dla każdej funkcji f, ciągłej na nośniku γ^* cyklu γ i każdego punktu $p \notin \gamma^*$.

Definicja. Ograniczony zbiór $U \subset \mathbb{C}$ nazwiemy **regularnym**,[8] jeśli istnieje cykl $\gamma = \sum_i \gamma_i$ taki, że:

i) drogi zamknięte γ_i są proste, ich nośniki γ_i^* są parami rozłączne, a nośnik γ^* cyklu γ jest brzegiem (topologicznym) zbioru U w $\mathbb{C}$;

ii) cykl γ ma **własność Cauchy'ego w $\overline{U}$**, tzn. $\int_\gamma f = 0$ dla każdej funkcji $f \in H(\overline{U})$;

iii) $\operatorname{ind}(p, \gamma) = 1$ dla wszystkich $p \in \operatorname{int} U$.

Cykl γ nazwiemy **zorientowanym brzegiem** zbioru regularnego U i oznaczymy przez ∂U.

[8]Obie użyte tu nazwy: „zbiór regularny" i „własność Cauchy'ego", są prowizoryczne i nie są powszechnie używane.

Zauważmy, że gdy U i γ są jak wyżej, to $\mathrm{ind}(\gamma, p) = 0$ dla $p \in \mathbb{C} \setminus \overline{U}$ – bo ii) stosuje się do funkcji $1/(z-p)$. Okazuje się, że ii) można zastąpić przez ostatni warunek (gdy zachować pozostałe), a także sam warunek i), przy odpowiedniej orientacji pętli γ_i, pociąga za sobą ii) oraz iii). Taki opis zbiorów regularnych, a także pełną charakteryzację cykli Cauchy'ego, podamy w materiale uzupełniającym w rozdziale VII. Dla dalszej części wystarczające jednak jest to, że pewne nieliczne obszary są regularne – co uzasadnimy bezpośrednio.

Przykład. Niech dyski D_0, D spełniają warunek $\overline{D_0} \subset D$.

a) Dysk D jest obszarem regularnym: za poświadczający to cykl γ obrać należy dodatnio zorientowany okrąg ∂D. (Patrz przykłady w §1 i w §II.1, część c).)

b) [Wachlarz] Dla niepełnego kąta otwartego K o wierzchołku w środku dysku D_0 utwórzmy **wachlarz** $W := D \cap K \setminus \overline{D_0}$. Twierdzimy, że wachlarz W jest obszarem regularnym.

By tego dowieść zauważmy, że krzywa Jordana $J := \mathrm{Bd}U$ jest sumą dwóch łuków J i J_0, leżących w ∂D i ∂D_0, odpowiednio, oraz dwóch odcinków, leżących na ramionach kąta K. Twierdzimy, że za cykl ∂W można przyjąć tę krzywą, zorientowaną przez nadanie łukowi J orientacji zgodnej z dodatnim obiegiem okręgu ∂D. Istotnie, gdy $p \in W$, to $\mathrm{ind}(\partial W, p) = 1$, o czym przekonujemy się wykorzystując twierdzenie z §4 i tworząc odcinek $[p, q]$ na tak, by $p \in \mathbb{R}^+ q \setminus \overline{W}$. Pozostaje dowieść, że ∂W ma własność Cauchy'ego w $\overline{W}$, tzn. $\int_{\partial W} f = 0$ dla $f \in H(\overline{W})$. Ustalmy więc f; gdy miara α kąta K jest dostatecznie mała, to zbiór $\overline{W}$ jest gwiaździsty, wobec czego $\int_{\partial W} f = 0$. (Wystarczający warunek na α to $\cos\alpha > r/R$, gdzie r to promień dysku D_0, a R to odległość od okręgu ∂D do środka dysku D_0; gwiaździstość sprawdzamy względem jakiegokolwiek punktu punktu $z_0 \in \overline{W} \cap \partial D$.) Zaś dla większych wartości α możemy kąt K podzielić na wiele równych kątów, uzyskując podział wachlarza W na wachlarze $W_1, ..., W_n$ takie, że warunek $\int_{\partial W_j} f = 0$ jest spełniony dla wszystkich j. Stąd $\int_{\partial W} f = 0$, bo $\sum_j \int_{\partial W_j} f = \int_{\partial W} f$.

c) [Pierścień.] Podobnie, pierścień $P = D \setminus \overline{D_0}$ jest obszarem regularnym, a zaświadcza o tym cykl $\partial P := \partial D - \partial D_0$. Dowodzi tego powyższe rozumowanie, gdy zmienić w nim końcową równość całek na $\sum_j \int_{\partial W_j} f = \int_{\partial P} f$.

Zadanie. (N) Zwarty zbiór wypukły, z kawałkami gładkim brzegiem, jest regularny.

Zastosowanie. Niech f i g będą wielomianami, a D dyskiem zawierającym zbiór $g^{-1}(0)$ zer wielomianu g. Twierdzimy, że jeśli $\deg g > \deg f + 1$, to $\int\limits_{\partial D} f/g = 0$. Istotnie, rozważmy dysk $D_r = D(0, r)$ o promieniu tak dużym, by $D_r \supset \overline{D}$. Na podstawie części c) Przykładu, $\int\limits_{\partial D} \frac{f}{g} - \int\limits_{\partial D_r} \frac{f}{g} = 0$, wobec czego

$$\left|\int\limits_{\partial D} \frac{f}{g}\right| = \left|\int\limits_{\partial D_r} \frac{f}{g}\right| \leq 2\pi r \sup\{\left|\frac{f(z)}{g(z)}\right| : |z| = r\} = 2\pi \sup\{\left|\frac{zf(z)}{g(z)}\right| : |z| = r\}.$$

Teza wynika więc stąd, że $\lim_{z\to\infty} |zf(z)/g(z)| = 0$ (bo $\deg(f) + 1 < \deg(g)$).

Zadanie. a) Przy tych oznaczeniach udowodnić, że jeśli współczynniki prowadzące wielomianów f i g są równe a i b, odpowiednio, przy czym $\deg(g) = \deg(f)+1$, to $\int\limits_{\partial D} f/g = \frac{a}{2\pi i b}$.
(Wskazówka: gdy $a = b = 1$ i $h := f/g$ dowieść, że $\lim_{r\to\infty} \int\limits_{\partial D_r} (h(z) - \frac{1}{z})\,\mathrm{d}z = 0$.)

b) Jak jest, jeśli $\deg(g) \le \deg(f)$? (Zbadać możliwe przypadki.)

6 * Dwie uwagi uzupełniające.

Tylko pierwszą z tych uwag wykorzystamy (w dowodzie twierdzeń Rungego, też należących do materiału uzupełniającego). Mają one jednak charakter ogólniejszy i warto je odnotować.

Uwaga 1. * Nietrudno jest wartość całki $\int_\lambda f$ powiązać z sumami całkowymi. Jeśli bowiem punkty $a = t_0 < \cdots < t_n = b$ są takie, że $\operatorname{diam} f(\lambda([t_{i-1}, t_i])) < \varepsilon$ dla $i = 1, \ldots, n$, to

$$|\int_\lambda f - \sum_{i=1}^{n} f(w_i)(\lambda(t_i) - \lambda(t_{i-1}))| < \varepsilon \cdot \ell(\lambda) \quad \text{gdy } w_i \in \lambda([t_{i-1}, t_i]) \text{ dla } i \le n. \tag{8}$$

Istotnie, gdy przyjmiemy $\lambda_i \overset{def}{=} \lambda_{|[t_{i-1},t_i]}$, to $|\int\limits_{\lambda_i} f - \int\limits_{\lambda_i} f(w_i)| < \varepsilon \cdot \ell(\lambda_i)$ i $\int\limits_{\lambda_i} f(w_i) = f(w_i)(\lambda(t_i) - \lambda(t_{i-1}))$, skąd wobec równości $\int_\lambda f = \sum_i \int_{\lambda_i} f_i$ i $\ell(\gamma) = \sum_i \ell(\gamma_i)$ wynika (8).

Obierając dostatecznie drobny podział $a = t_0 < \cdots < t_n = b$ możemy więc całkę $\int_\lambda f$ dowolnie blisko przybliżyć sumą całkową $\sum_{i=1}^n f(w_i)(\lambda(t_i) - \lambda(t_{i-1}))$. □

Uwaga 2. * Można sum całkowych użyć do zdefiniowania całek funkcji ciągłych po tzw. ścieżkach prostowalnych. Istotniejsze dla teorii funkcji analitycznych jest jednak to, że twierdzenie Cauchy'ego pozwala zdefiniować całkę funkcji holomorficznej f po dowolnej ścieżce λ w zbiorze otwartym $U = \operatorname{dom}(f)$, jak następuje. Obierzmy drogę μ w U, która ma tę samą dziedzinę $[a, b]$ i te same krańce, co droga λ, i jest z nią homotopijna w U poprzez homotopię o stałych krańcach; patrz uwaga 2 w §II.4. Rozumowanie z dowodu twierdzenia Cauchy'ego pokazuje, że drogi takie istnieją (można za μ obrać łamaną $[\lambda(a), \lambda(t_1), ..., \lambda(t_n), \lambda(b)]$ dla dostatecznie drobnego podziału $a < t_1 < ... < t_n < b$ odcinka $[a, b]$). Na mocy przytoczonej uwagi, wartość $\int_\mu f$ jest dla wszystkich tych dróg wspólna; przyjmujemy ją za $\int_\lambda f$. Dzięki takiemu rozszerzeniu definicji całki funkcji holomorficznej, można zastąpić drogi przez ścieżki we wszystkich twierdzeniach tu rozpatrywanych.

Inną jeszcze (równoważną) możliwość definiowania całki funkcji holomorficznej f po ścieżce λ daje pojęcie „funkcji pierwotnej funkcji f wzdłuż λ", mające dalsze zastosowania. Nie omawiamy go tu, odsyłając zainteresowanych czytelników do książki Szabata.

Zadanie. * a) Uogólnić końcowe stwierdzenie uwagi 1 na przypadek, gdy λ jest ścieżką (niekoniecznie prostowalną); tu całkę $\int_\lambda f$ wyznaczamy zgodnie z uwagą 2.

b) Dowieść, że równość (7) z §3 pozostaje słuszna dla każdej pętli γ, gdy całkę rozumieć jak opisano wyżej, a indeks – jak w uwadze 2 w §3.

IV Wzory całkowe Cauchy'ego, szeregi Laurenta i twierdzenie o residuach.

1 Wzory Cauchy'ego; rozwijanie funkcji $f \in H(D)$ w szereg Taylora.

Twierdzenie 1 (Wzór całkowy Cauchy'ego)**.** *Gdy D jest dyskiem i $f \in H(\overline{D})$, to*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int\limits_{\partial D} \frac{f(w)}{w-z}\, \mathrm{d}w \quad \text{dla } z \in D. \tag{1}$$

Dowód. Ustalmy punkt $z \in D$ i niech $g(w) \overset{def}{=} \frac{f(w)-f(z)}{w-z}$. Funkcja $g(w)$ jest holomorficzna w $\overline{D} \setminus \{z\}$, więc gdy $D_\varepsilon = D(z,\varepsilon)$ jest dyskiem tak małym, by $\overline{D_\varepsilon} \subset D$, to $\int\limits_{\partial D} g = \int\limits_{\partial D_\varepsilon} g$. (Korzystamy z części c) przykładu z §II.5.) Zatem

$$|\int\limits_{\partial D} g| = |\int\limits_{\partial D_\varepsilon} g| \leqslant \ell(\partial D_\varepsilon) \cdot \sup_{w \in \partial D_\varepsilon} |f(w) - f(z)|/\varepsilon = 2\pi \cdot \sup_{w \in \partial D_\varepsilon} |f(w) - f(z)| \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0$$

Stąd $\int\limits_{\partial D} g = 0$, lub równoważnie, $\int\limits_{\partial D} \frac{f(w)}{w-z}\, \mathrm{d}w = f(z) \int\limits_{\partial D} \frac{1}{w-z}\, \mathrm{d}w$. Ale $\int\limits_{\partial D} \frac{1}{w-z}\, \mathrm{d}w = 2\pi \mathrm{i} \cdot \mathrm{ind}(z, \partial D)$ i $\mathrm{ind}(z, \partial D) = 1$ (bo $z \in D$), więc dowód jest zakończony. □

Uwaga 1. a) Jednak gdy $f \in H(\overline{D})$ i $z \notin \overline{D}$, to $\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int\limits_{\partial D} \frac{f(w)}{w-z}\, \mathrm{d}w = 0$ –dlaczego?

b) Z powyższego dowodu wynika, że równość $f(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int\limits_{\partial D} \frac{f(w)}{w-z}\, \mathrm{d}w$ zachodzi, gdy $z \in D$ i funkcja f jest holomorficzna w $\overline{D} \setminus \{z\}$ i ciągła w z. Wraz z następnym twierdzeniem dowodzi to, że funkcja taka jest analityczna w D (więc ma w z pochodną).

Twierdzenie 2 (O analityczności funkcji, zadanej wzorem Cauchy'ego)**.** *Niech γ będzie drogą i niech funkcja $f : \mathrm{im}(\gamma) \to \mathbb{C}$ będzie ciągła. Przyjmijmy*

$$\widetilde{f}(z) \overset{def}{=} \int\limits_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z}\, \mathrm{d}w \quad \text{dla } z \in \mathbb{C} \setminus \mathrm{im}(\gamma). \tag{2}$$

Wówczas na każdym dysku $D(z_0, r) \subset \mathbb{C} \setminus \mathrm{im}(\gamma)$ funkcja $\widetilde{f}$ rozwija się w szereg potęgowy o środku w z_0:

$$\widetilde{f}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad \text{gdzie } c_n = \int\limits_{\gamma} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}\, \mathrm{d}w \text{ dla } n = 0, 1, 2, \ldots \tag{3}$$

Dowód. Ustalmy punkt $z \in D(z_0, r)$ i niech $r' \overset{def}{=} |z - z_0|$. Wtedy $r' < r$, zaś gdy $w \in \operatorname{im}(\gamma)$, to $|w - z_0| \geqslant r$, skąd $|\frac{z-z_0}{w-z_0}| \leq \frac{r'}{r} < 1$. Stąd dla $w \in \operatorname{im}(\gamma)$:

$$\frac{f(w)}{w-z} = \frac{f(w)}{(w-z_0)(1-\frac{z-z_0}{w-z_0})} = \frac{f(w)}{w-z_0}\left(1 + \frac{z-z_0}{w-z_0} + \left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^2 + \ldots\right),$$

i szereg po prawej, rozpatrywany jako funkcja zmiennej $w \in \operatorname{im}(\gamma)$, jest zbieżny jednostajnie (bo jest majoryzowany przez szereg geometryczny $\sum_{n=0}^{\infty} M(r'/r)^n$, gdzie $M = \sup\{|\frac{f(w)}{w-z_0}| : w \in \operatorname{im}(\gamma)\} < \infty$). Z wniosku 1 w §II.1 wynika więc żądana równość:

$$\widetilde{f}(z) = \int\limits_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w = \int\limits_\gamma \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(w)(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}w = \sum_{n=0}^{\infty}(z-z_0)^n \int\limits_\gamma \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}w. \quad \square$$

Wniosek 1. *Funkcja $f \in H(\overline{D})$, gdzie D jest dyskiem o środku w z_0, rozwija się na D w szereg potęgowy $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$. Współczynniki szeregu są przez f wyznaczone jednoznacznie wzorami Cauchy'ego (wzór pierwszy) i Taylora (drugi):*

$$c_n = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int\limits_{\partial D} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}w = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0) \qquad \textit{dla } n = 0, 1, \ldots \tag{4}$$

Dowód. Jednoznaczność wynika ze wzorów Taylora, udowodnionych już w §I.4. ⊟

Twierdzenie 3. *(N) Funkcja, holomorficzna w zbiorze otwartym $U \subset \mathbb{C}$, jest w nim analityczna i wokół każdego punktu $z_0 \in U$ rozwija się w szereg $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ o promieniu zbieżności niemniejszym, niż odległość z_0 od zbioru $\mathbb{C} \setminus U$.*

Dowód. Wynika to z wiosku 1 i z uwagi 2b) w §1.4. ⊟

Przykład. Niech $z_0, s \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Jak wiemy, na dysku $D = D(z_0, |z_0|)$ istnieje gałąź s–tej potęgi. Wyznaczając jej pochodne $g^{(n)}(z_0)$ przy pomocy wniosku 1 w §I.8, uzyskujemy na D rozwinięcie gałęzi g w szereg Taylora: $g(z) = g(z_0)(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{s}{n} \frac{1}{z_0^n}(z-z_0)^n)$, gdzie $\binom{s}{n} := \frac{1}{n!} \prod_{j=1}^{n-1}(s-j)$. Przy $z_0 = 1$ i $|z| < 1$ daje to tożsamość $g(1+z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{s}{n} z^n$.

Zadanie. Przy oznaczeniach twierdzenia 2, jeśli $\operatorname{im}(\gamma) \subset \overline{D}(z_0, R)$, to dla $z \notin \overline{D}(z_0, R)$ zachodzi $\widetilde{f}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z-z_0)^{-n}$, gdzie $c_{-n} = -\int\limits_\gamma \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n-1}}\,\mathrm{d}w$ dla $n = 1, 2, \ldots$.

2 Rozwijanie funkcji w szereg Laurenta.

Jak wiemy z §1, funkcję $f \in H(U)$ można na dyskach, zawartych w U, rozwijać w szereg Taylora. Na różnych dyskach uzyskujemy jednak różne szeregi i na ogół trzeba użyć nieskończenie wielu szeregów, by opisać funkcję. Jest tak i w najważniejszym dla tego rozdziału przypadku, gdy U jest dyskiem, z którego usunięto środek. Ominięcie tej trudności, wskazane przez P. Laurenta, polega na wykorzystaniu szeregów nieco ogólniejszych od potęgowych.

Definicja. Szeregiem Laurenta o środku w p (lub: **wokół punktu** p) nazywamy szereg funkcyjny

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} \left(\frac{1}{z-p}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-p)^n \tag{5}$$

Pierwszy z szeregów w (5) nazywamy **częścią główną**, zaś drugi – **częścią regularną** szeregu (5). Szereg (5) nazywamy zbieżnym w danym punkcie, czy też (niemal) jednostajnie wzgl. (niemal) normowo zbieżnym w danym zbiorze, jeśli takie są obie te części.

Zwięźlejszy zapis szeregu (5) to $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-p)^n$ lub $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(z-p)^n$.

Z własności szeregów potęgowych wynika, że część główna szeregu (5) jest zbieżna w punkcie z, gdy $|\frac{1}{z-p}| < \rho$, zaś część regularna – gdy $|z-p| < R$, gdzie

$$\rho = 1/\varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_{-n}|} \quad \text{oraz} \quad R = 1/\varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} \tag{6}$$

Przyjmijmy

$$P_{\max} := D(p,R) \text{ gdy } c_n = 0\,\forall n<0, \text{ i } P_{\max} := D(p,R)\setminus \overline{D}(p,1/\rho) \text{ w przeciwnym razie.}$$

Twierdzenie 1. *a) Szereg (5) jest rozbieżny w każdym punkcie* $z \notin \overline{P_{\max}}$.

b) Część główna (odp. regularna) szeregu (5) jest zbieżna niemal normowo w zbiorze $\mathbb{C}\setminus\overline{D}(p,\frac{1}{\rho})$ *(odp. w dysku* $D(p,R)$*), a jej suma jest w nim funkcją holomorficzną.*

c) Suma f *szeregu (5) jest w powyższym pierścieniu* $P_{\max}$ *funkcją holomorficzną, której pochodna jest sumą szeregu* $\sum_{n\in\mathbb{Z}} nc_n(z-p)^{n-1}$*, niemal normowo zbieżnego w* $P_{\max}$.

Zbiór $P_{\max}$ nazywamy **pierścieniem zbieżności** szeregu (5). Gdy $\rho, R \neq \infty$ i $1/\rho < R$, jest on „prawdziwym" pierścieniem; jednak może też być zbiorem pustym (gdy $1/\rho \geq R$), płaszczyzną bez punktu p (gdy $\rho = R = \infty$), kołem $D(p,R)$ bez swego środka (gdy $\rho = \infty, R < \infty$), zewnętrzem dysku $D(p,1/\rho)$ (gdy $R = \infty$ i $0 < \rho < \infty$) lub dyskiem $D(p,R)$ względnie płaszczyzną $\mathbb{C}$ (gdy $c_n = 0$ dla $n < 0$ i $R > 0$).

Dowód twierdzenia 1. Dla prostoty przyjmijmy (co można), że $p = 0$. Część a) i niemal normowa zbieżność szeregów $\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}z^n$ i $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ na dyskach $D(0,\rho)$ i $D(0,R)$, odpowiednio, wynika z własności liczb ρ i R, patrz §I.4. Sumy tych szeregów, które oznaczmy przez g i h, są więc funkcjami holomorficznymi w wymienionych dyskach; przy tym $g'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} nc_{-n}z^{n-1}$ i $h'(z) = \sum_{n=n}^{\infty} nc_n z^{n-1}$ i ostatnie szeregi też są niemal normowo zbieżne na odpowiadających im dyskach. A że homografia $z \mapsto 1/z$ przeprowadza zbiór $D(0,\rho)$ na $\widetilde{\mathbb{C}}\setminus\overline{D}(0,1/\rho)$, to z drugiego z zadań w §I.3 wynika pozostała część tezy b), jak również niemal normowa zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} nc_{-n}z^{-n-1}$ na pierścieniu $\mathbb{C}\setminus\overline{D}(0,1/\rho)$.

Ponadto, dla $z \in P$ zachodzi równość $f(z) = g(1/z) + h(z)$ i wobec tego $f'(z) = -\frac{1}{z^2}g'(1/z) + h'(z)$. Gdy za $g'(1/z)$ i $h'(z)$ wpiszemy sumy wymienionych szeregów, to otrzymamy brakującą równość $f'(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} nc_n z^{n-1}$. $\boxminus$

Wniosek 1. *Niech w pierścieniu $P = D(p,R_1) \setminus \overline{D}(p,R_0)$ funkcja f rozwija się w szereg Laurenta $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(z-p)^n$. Wówczas:*

a) Funkcja $g(z) := f(z) - c_{-1}\frac{1}{z-p}$ ma w P funkcję pierwotną.

b) Dla $r \in (R_0,R_1)$, współczynniki c_n są zadane wzorami Cauchy'ego–Laurenta:

$$c_n = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int\limits_{\partial D(p,r)} \frac{f(w)}{(w-p)^{n+1}}\,\mathrm{d}w \qquad (n\in\mathbb{Z}). \tag{7}$$

Dowód. Ad a). Szereg $\sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{-1\}} \frac{c_n}{n+1}(z-p)^{n+1}$ ma ten sam pierścień zbieżności $P_{\max}$, co szereg $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(z-p)^n$, bo $\lim \sqrt[n]{n} = 1$. Skoro więc drugi z tych szeregów jest zbieżny w P, to $P \subset P_{\max}$ i $(\sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{-1\}} \frac{c_n}{n+1}(z-p)^{n+1})' = f(z) - c_{-1}\frac{1}{z-p}$ dla $z \in P$.

Ad b). Z a) wynika że $\int_{\partial D(p,r)} g = 0$ – co daje wzór (7) przy $n=-1$, bo $\int\limits_{\partial D(p,r)} \frac{c_{-1}}{z-p}\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}c_{-1}$. Dla $n \neq -1$ należy ten wzór odnieść do funkcji $z \mapsto f(z)/(z-p)^{n+1}$. $\boxminus$

Twierdzenie 2 (Laurenta)**.** *Funkcja f, holomorficzna w pierścieniu $P = D(p,R_1)\setminus\overline{D}(p,R_0)$, jest sumą dokładnie jednego szeregu Laurenta o środku w p.*

Dowód. Załóżmy wpierw dodatkowo, że $f \in H(\overline{P})$ (w miejsce $f \in H(P)$). Niech $z \in P$. Przyjmijmy $g(w) := \frac{f(w)-f(z)}{w-z}$ dla $w \in P \setminus \{z\}$, jak w dowodzie wzoru Cauchy'ego w §1, oraz $g(z) := \lim_{w\to z} g(w) = f'(z)$. Na podstawie uwagi 1 w §1, funkcja g jest holomorficzna w otoczeniu punktu z. Tak więc $g \in H(\overline{P})$, skąd $\int\limits_{\partial P} g = 0$; patrz część c) przykładu w §III.5. Równoważnie, $\int\limits_{\partial P} \frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w = \int\limits_{\partial P} \frac{f(z)}{w-z}\,\mathrm{d}w$. Ponadto, $\int\limits_{\partial P} \frac{1}{w-z}\,\mathrm{d}w = 2\pi\mathrm{i}$ (bo $z \in P$) oraz $\int_{\partial P} = \int_{\partial D_1} - \int_{\partial D_0}$, gdzie $D_i = D(p,R_i)$. Zatem

$$f(z) = g_0(z) + g_1(z),\ \text{gdzie } g_1(z) := \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int\limits_{\partial D_1} \frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w,\ g_0(z) := -\frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int\limits_{\partial D_0} \frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w. \tag{8}$$

Równości te zachodzą dla wszystkich $z \in P$. Na podstawie wyników z §1 (twierdzenia 2 i zadania), istnieją też współczynniki c_n $(n \in \mathbb{Z})$, takie, że $g_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-p)^n$ gdy $z \in D_1$ i $g_0(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z-p)^{-n}$ gdy $z \in \mathbb{C} \setminus \overline{D_0}$. Daje to szukane rozwinięcie funkcji $f = g_{0|P} + g_{1|P}$ w szereg Laurenta w pierścieniu $P = D_1 \setminus \overline{D_0}$.

Gdy dodatkowe założenie, że $f \in H(\overline{P})$, nie jest spełnione, to wyczerpujemy P pierścieniami $P' = D(p,r_1) \setminus \overline{D}(p,r_0)$, zawierającymi ustalony okrąg $\partial D(p,r)$. Jeśli $r_0, r_1 \in (R_0,R_1)$, to $\overline{P'} \subset P$, więc uzyskamy rozwinięcie Laurenta funkcji $f_{|P'}$. Jego współczynniki c_n, dane wzorami (7) na podstawie wniosku 1, są jednak od P' niezależne – wobec czego $f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n z^n$ dla wszystkich $z \in P$. Z (7) wynika też jedyność rozwinięcia. $\square$

Przykład. Niech $w, p \in \mathbb{C}$; rozwiniemy funkcję $f(z) = 1/(z-w)^k$ w szereg Laurenta na maksymalnych pierścieniach o środku w p, nie zawierających punktu osobliwego w; są nimi $P_1 := D(p, |w-p|)$ i $P_2 := \mathbb{C} \setminus \overline{D}(p, |w-p|)$. Wygodniejsze od wzorów (7) okaże się elementarne wykorzystanie postępu geometrycznego. Rozpatrzymy oddzielnie różne przypadki:

a) $k = 1$ i pierścieniem jest $P_1 = D(p, |w-p|)$. Ponieważ $1/(z-w) = 1/(p-w)(1-\frac{z-p}{w-p})$ i $\frac{1}{1-q} = \sum_{n=0}^{\infty} q^n$ gdy $|q| < 1$, wynika równość $f(z) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-p)^n}{(w-p)^{n-1}}$ dla $z \in P_1$.

b) $k = 1$ i pierścieniem jest $P_2 = \mathbb{C} \setminus \overline{D}(p, |w-p|)$. Tym razem zauważmy, że $f(z) = 1/(z-p)(1-\frac{w-p}{z-p})$, skąd jak wyżej otrzymujemy $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(w-p)^n}{(z-p)^{n+1}}$ dla $z \in P_2$.

c) $k > 1$. Szukane rozwinięcia otrzymujemy, różniczkując poprzednie: $-1/(z-w)^2 = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(z-p)^{n-1}}{(w-p)^{n-1}}$ dla $z \in P_1$ i $-1/(z-w)^2 = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(w-p)^n}{(z-p)^{n+2}}$ dla $z \in P_2$, i t.d. $\boxminus$

Uwaga 1. Przykład ten wskazuje, jak daną funkcję wymierną $f = g/h$, gdzie g i h są wielomianami, rozwinąć w szereg Laurenta na pierścieniu otwartym, zawartym w jej dziedzinie. Możemy bowiem f przedstawić w postaci skończonej sumy tzw. ułamków prostych, patrz dalej twierdzenie 3 w §V.5, a każdy z nich rozwinąć jak w przykładzie.

Gdy $\mathrm{NWD}(g, h) = 1$, to maksymalnymi takimi pierścieniami są składowe zbioru, powstałego z $\mathbb{C}$ przez usunięcie okręgów, zatoczonych z p i przechodzących przez zera wielomianu h.

Zadanie 1. (N) Niech funkcja f, holomorficzna w $D(p, R) \setminus \{p\}$, rozwija się w szereg Laurenta $\sum_{n \geq -1} c_n z^n$. Dla $r \in (0, R)$, niech L_r będzie zorientowanym łukiem na okręgu $|z-p| = r$, takim, że wyznaczony przez niego zorientowany kąt o wierzchołu w p ma miarę α (niezależną od r). Udowodnić, że $\lim_{r \to 0} \int_{L_r} f = \mathrm{i}\alpha c_{-1}$.

3 Rola współczynników szeregu Laurenta. Twierdzenie o residuach.

Definicja. Powiemy, że podzbiór V sfery Riemanna $\widetilde{\mathbb{C}}$ jest **nakłutym otoczeniem** punktu $p \in \widetilde{\mathbb{C}}$, jeśli $V \cup \{p\}$ jest otoczeniem tego punktu w $\widetilde{\mathbb{C}}$. (Może więc, ale nie musi zachodzić $p \in V$.) Gdy $p \in \mathbb{C}$ oznacza to istnienie liczby $r > 0$ takiej, że $D(p, r) \setminus \{p\} \subset V$, zaś gdy $p = \infty$ – istnienie liczby $r > 0$ takiej, że $\{z \in \mathbb{C} : |z| > r\} \subset V$.

Niech $f \in H(V)$, gdzie V jest otoczeniem nakłutym punktu $p \neq \infty$. Dla pewnego $R > 0$ zachodzi wtedy $D(p, R) \subset V \cup \{p\}$ i funkcję f można w pierścieniu $D(p, R) \setminus \{p\} \subset V$ rozwinąć w szereg Laurenta $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n (z-p)^n$. Ze względu na wzory Cauchy'ego–Laurenta, współczynniki c_n nie zależą od R.

Definicja. Powyższy szereg nazywamy **szeregiem Laurenta funkcji f, o środku w p**. Sumę $\sum_{n<0} c_n (z-p)^n$ jego części głównej oznaczamy $G_p f$. Natomiast współczynnik c_{-1} nazywany jest **residuum funkcji f w punkcie** p i oznaczany $\mathrm{res}_p f$. Znaczenie residuum uwidacznia wniosek 1a) w §2, zaś znaczenie funkcji $G_p f$ – poniższa uwaga:

Uwaga 1. i) Funkcja $G_p f$ jest określona i holomorficzna w całej płaszczyźnie nakłutej $\mathbb{C} \setminus \{p\}$. (Wynika to z twierdzenia 1 w §2.)

ii) Funkcja $f - G_p f_{|V}$ przedłuża się do funkcji, holomorficznej w zbiorze otwartym $V \cup \{p\}$. Dla $z \in D(p,R)$ określimy ją wzorem $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-p)^n$; da to szukane przedłużenie, bo funkcje g i $f - G_p f_{|V}$ są równe na $D(p,R) \setminus \{p\}$ i obie są holomorficzne.

iii) Funkcje f i $G_p f$ mają w punkcie p to samo residuum, którym jest c_{-1}. □

Możemy teraz sformułować jedno z centralnych twierdzeń tego wykładu:

Twierdzenie 1 (Cauchy'ego o residuach). *Niech funkcja f będzie holomorficzna w zbiorze $U \subset \mathbb{C}$ poza zbiorem skończonym $S \subset \operatorname{int} U$ (tzn., $f \in H(U \setminus S)$), a Γ niech będzie cyklem w U, leżącym w $U \setminus S$ i mającym własność Cauchy'ego w U (czyli takim, że $\int\limits_\Gamma h = 0$ dla każdej funkcji $h \in H(U)$). Wówczas*

$$\int\limits_\Gamma f = 2\pi \mathrm{i} \cdot \sum_{p \in S} (\operatorname{res}_p f) \cdot \operatorname{ind}(\Gamma, p) \tag{9}$$

W dowodzie wykorzystamy następujący użyteczny lemat:

Lemat 1 (o usuwaniu osobliwości). *Funkcję $h := f - \sum_{p \in S} G_p f_{|U}$ można przedłużyć do funkcji, holomorficznej w U. (Tu, f, U i S są jak w twierdzeniu.)*

Dowód. Poniżej, pomijamy znaki obcięcia $_{|U}$ przy $G_p f_{|U}$. Dla danego punktu $p \in S$ zapiszmy h tak: $h = (f - G_p f) - \sum_{q \in S \setminus \{p\}} G_q f$. Jak wiemy z uwagi 1ii), funkcja $f - G_p f$ holomorficznie przedłuża się na punkt p, zaś funkcje $G_q f$ są w jego otoczeniu holomorficzne. Zatem i funkcja h holomorficznie przedłuża się na (dowolny) punkt $p \in S$. □

<u>Dowód twierdzenia.</u> Jak dowiedliśmy, funkcja $h := f - \sum_{p \in S} G_p f$ jest holomorficzna w U (czy ściślej: przedłuża się do takiej), wobec czego $\int_\Gamma h = 0$ z założeń twierdzenia. Tak więc

$$\int\limits_\Gamma f = \sum_{p \in S} \int\limits_\Gamma G_p f \tag{*}$$

Ponadto, funkcja $G_p f$ jest określona na całej płaszczyźnie nakłutej $\mathbb{C} \setminus \{p\}$, a jej residuum w punkcie p jest równe $\operatorname{res}_p f$. Odnosząc do $G_p f$ wniosek 1a) w §2 stwierdzamy, że $\int\limits_\Gamma G_p f = \int\limits_\Gamma \frac{\operatorname{res}_p f}{w-p}\, \mathrm{d}w = 2\pi \mathrm{i} \cdot \operatorname{res}_p f \cdot \operatorname{ind}(\Gamma, p)$ dla $p \notin \operatorname{im}(\Gamma)$. Stąd i z (*) wynika teza. □

Uwaga 2. Założenia, dotyczące zbioru S, można nieco osłabić, patrz zadanie .... w §....

b) Ważnym przypadkiem cykli z własnością Cauchy'ego w U są drogi zamknięte, homotopijnie nieistotne w U. (Żądaną własność zapewnia twierdzenie Cauchy'ego z §II.4.)

b) Twierdzenie o residuach będzie jednak stosowane przede wszystkim wtedy, gdy zbiór U jest zwarty i regularny, a $\Gamma = \partial U$ to jego zorientowany brzeg. W tym przypadku $\operatorname{ind}(\Gamma, p) = 1$ dla $p \in U$, wobec czego wzór (9) przybiera postać

$$\int\limits_{\partial U} f = 2\pi \mathrm{i} \cdot \sum_{p \in S} \operatorname{res}_p f \tag{10}$$

4 „Uogólnione zera" i ich krotności. Wyznaczanie residuów.

Oznaczenie. Jak w §3, niech funkcja f będzie holomorficzna w otoczeniu nakłutym V punktu p. Funkcję tę rozwijamy wokół p w szereg Laurenta $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(z-p)^n$. Przyjmujemy

$$k(p) := \inf\{i \in \mathbb{Z} : c_i \neq 0\}$$

(Czasem będziemy pisać $k_f(p)$, by uwidocznić zależność od funkcji f.) Może się zdarzyć, że $k(p) = -\infty$; jednak $k(p) = \infty$ tylko gdy f jest funkcją zerową na $D(p,R) \setminus \{p\}$.

Stwierdzenie 1. *a) Funkcję f wtedy i tylko wtedy można przedłużyć do funkcji $\widetilde{f} \in H(V \cup \{p\})$, gdy $k(p) \geq 0$. Jeśli przedłużenie $\widetilde{f}$ istnieje, to*

$$\widetilde{f}(p) = c_0 \quad i \quad k_f(p) = \inf\{n \geq 0 : \widetilde{f}^{(n)}(p) \neq 0\} \tag{11}$$

b) Liczba $k \neq \pm\infty$ wtedy i tylko wtedy jest równa $k_f(p)$, gdy $f(z) = (z-p)^k g(z)$ dla $z \in V$ i funkcji $g \in H(V \cup \{p\})$, spełniającej warunek $g(p) \neq 0$.

Dowód. Ad a). Gdy $k(p) \geq 0$, to $f - G_p f = f$ i możliwość przedłużenia wynika z uwagi 1 ii) w §3. Odwrotnie, gdy przedłużenie $\widetilde{f}$ istnieje i rozwinąć je w szereg Taylora wokół p, to otrzymamy szereg Laurenta funkcji f, zaświadczający o tym, że $k(p) \geq 0$ i zachodzi (11) (bo $\widetilde{f}^{(n)}(p) = n! c_n$ dla $n \geq 0$, na podstawie wzorów Taylora).

Ad b). Zastępując f przez funkcję $z \mapsto (z-p)^{-k} f(z)$ sprowadzamy dowód do przypadku, gdy $k = 0$ – a wtedy teza wynika z a). □

Definicja. Gdy funkcja f jest holomorficzna w nakłutym otoczniu punktu p, to powiemy, że ma ona w tym punkcie **osobliwość izolowaną**. Osobliwość tę nazwiemy

osobliwością istotną, gdy $k(p) = -\infty$;

osobliwością ną (lub: **pozorną**), gdy $k(p) \geq 0$;

biegunem, gdy $k(p) < 0$ i $k(p) \neq -\infty$; liczbę $|k(p)|$ nazywamy **rzędem** tego bieguna.

Gdy liczba $k = k(p)$ jest skończona to powiemy też, że punkt p jest **uogólnionym zerem k-krotnym** funkcji f. Nazwa ta (która nie jest ogólnie przyjęta) motywowana jest stwierdzeniem 1b): wynika z niego, że gdy $k(p) > 0$, to p można uważać za „prawdziwe" zero krotności $k(p)$. Natomiast nazwę „osobliwość usuwalna" wyjaśnia część a) stwierdzenia.

Przykłady wyznaczania residuum i krotności uogólnionych zer. [9] Gdy nie powiedziano inaczej, rozważamy funkcje określone w nakłutym otoczeniu danego punktu p.

a) Oczywiście $\operatorname{res}_p(f_1 + f_2) = \operatorname{res}_p f_1 + \operatorname{res}_p f_2$. Nieco ogólniej, gdy szereg $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ funkcji holomorficznych jest w pewnym otoczeniu nakłutym punktu p niemal jednostajnie zbieżny do funkcji f, to $\operatorname{res}_p f = \sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{res}_p f_n$. (Wynika to ze wzoru (7) w §2 i wniosku 1 §II.1, bo dla pewnego r jest $\operatorname{res}_p(f) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial D(p,r)} \frac{f(w)}{w-p}\, dw$ i analogicznie dla f_n.)

[9] Na wykładzie omawiałem bardziej rozbudowany przykład, podobny do c), oraz wyrywkowo omówiłem niektóre inne poniższe punkty. Do tego materiału już nie będę wracał, proszę go przemyśleć samodzielnie, by umieć sobie z podobnymi przykładami radzić na ćwiczeniach i na kolokwium.

b) Najskuteczniejsze wydaje się wyznaczanie residuum w oparciu definicję: $\mathrm{res}_p f$ jest współczynnikiem przy z^{-1} rozwinięcia Laurenta funkcji $z \mapsto f(z+p)$ wokół zera. Dla przykładu, niech $f(z) = z^2 e^{1/z}$. Rozwinięcie funkcji exp w szereg prowadzi do równości $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^{-k+2}$. Funkcja f ma więc w punkcie 0 osobliwość istotną i $\mathrm{res}_0 f = \frac{1}{6}$.

c) Oto inny przykład wykorzystania definicji. Niech $f(z) = (z-\pi/2)/(\sin z-1)^2$. Funkcja ta nie jest określona w punktach $p_n = 2\pi n + \pi/2$, $n \in \mathbb{Z}$, będących zerami funkcji $\sin -1$, zaś na nakłutym otoczeniu każdego z tych punktów jest holomorficzna. By wyznaczyć $\mathrm{res}_{p_n} f$ zauważamy, że $\sin(p_n + z) - 1 = \cos z - 1 = -\frac{z^2}{2} h(z)$, gdzie $h(z) = 1 - \frac{1}{12} z^2 + 0z^3 + \ldots$. Tak więc $\mathrm{res}_{p_n} f$ jest współczynnikiem przy $1/z$ rozwinięcia Laurenta (wokół zera) funkcji $\frac{4}{z^4}(z + p_n - \pi/2)/h^2(z)$ – a więc współczynnikiem przy z^3 rozwinięcia Macalurina funkcji $4(z + p_n - \pi/2)/h^2(z)$. Korzystając z przykładu z §I.4 stwierdzamy, że $\mathrm{res}_{p_n} f = 2/3$. (Wyznaczanie $\mathrm{res}_{p_n} f$ w oparciu o dalsze wzory, patrz e) i i) poniżej, byłoby bardziej zawiłe.)

d) Gdy $f(z) = g(z)/(z-p)^k$, gdzie $k > 0$, $g(p) \neq 0$ i funkcja g jest holomorficzna w otoczeniu punktu p, to $\mathrm{res}_p f = \frac{1}{(k-1)!} g^{(k-1)}(p)$. Dla dowodu rozwińmy g w szereg Taylora: $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n (z-p)^n$. Podzielenie tej równości stronami przez $(z-p)^k$ wykazuje, że $\mathrm{res}_p f = d_{k-1} = \frac{1}{(k-1)!} g^{(k-1)}(p)$. (Ostatnia równość to wzór Taylora.) Dla przykładu, gdy $f(z) = \mathrm{e}^z/(z^2+1)^2$, to $\mathrm{res}_{\mathrm{i}} f = -(\cos 1 + \mathrm{i} \sin 1)(1+\mathrm{i})/4$ – dlaczego?

e) Gdy funkcja f ma w punkcie p osobliwość usuwalną, to $\mathrm{res}_p f = 0$. Gdy zaś ma ona w p biegun rzędu k, to

$$\mathrm{res}_p f = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \to p} g^{(k-1)}(z), \quad \text{gdzie } g(z) = (z-p)^k f(z). \tag{12}$$

W tym bowiem przypadku powyższa funkcja g przedłuża się do funkcji $\widetilde{g}$, holomorficznej i niezerowej w otoczeniu punktu p. Stosując do funkcji $f(z) = \widetilde{g}(z)/(z-p)^k$ wzór z d) i wykorzystując ciągłość pochodnych funkcji holomorficznej, otrzymujemy żądaną równość.

f) W szczególności, gdy f ma w p biegun rzędu 1, to $\mathrm{res}_p f = \lim_{z \to p}(z-p) f(z)$.

g) Niech funkcja g będzie holomorficzna w otoczeniu punktu p, przy czym $g(p) \neq 0$. Z e) i f) wynika, że gdy p jest **biegunem prostym** (tzn. rzędu jeden) funkcji h, to $\mathrm{res}_p(g \cdot h) = \lim_{z \to p} g(z)(z-p)h(z) = g(p) \cdot \mathrm{res}_p h$. (Poczynione założenia są istotne!) Gdy zaś p jest zerem jednokrotnym funkcji h, to $\mathrm{res}_p(g/h) = \lim_{z \to p} g(z) \frac{z-p}{h(z)} = g(p)/h'(p)$.

h) W związku z e) powstaje pytanie, jak określić rząd bieguna. Odnotujmy więc, że gdy punkt p jest uogólnionym zerem k–krotnym funkcji g i l–krotnym funkcji h, to p jest uogólnionym zerem $(k-l)$–krotnym funkcji g/h. (Wynika to ze stwierdzenia 1b).) Stąd gdy $k \geq l$, to funkcja g/h ma w p osobliwość usuwalną, a gdy $k < l$, to ma ona w p biegun rzędu $(l-k)$. Podobnie, p jest uogólnionym zerem $(k+l)$–krotnym funkcji $g \cdot h$.

i) Powróćmy na koniec do funkcji $f(z) = (z-\pi/2)/(\sin z - 1)^2$, rozpatrywanej w c). Ma ona osobliwości izolowane w punktach $p_n = 2\pi n + \pi/2$. Pierwsza pochodna funkcji $\sin z - 1$ w p_n jest zerowa, zaś druga jest różna od zera, więc p_n jest zerem dwukrotnym tej funkcji, a czterokrotnym funkcji $(\sin z - 1)^2$. Zarazem p_n jest zerem zerokrotnym funkcji $z - \pi/2$ gdy

$n \neq 0$, a jednokrotnym gdy $n = 0$. Wynika stąd, że f ma w punkcie $p_0 = \pi/2$ biegun rzędu trzy, a w punkcie p_n dla $n \neq 0$ – rzędu cztery. $\square$

Przykład. Dla dalszych potrzeb udowodnimy, że jeśli p jest uogólnionym zerem krotności k funkcji f, to $\mathrm{res}_p(\frac{f'}{f}h) = kh(p)$ dla każdej funkcji h, holomorficznej w otoczeniu punktu p i spełniającej warunek $h(p) \neq 0$.

Istotnie, zachodzi $f = (z-p)^k f_1$, gdzie funkcja f_1 jest holomorficzna w otoczeniu punktu punktu p i $f_1(p) \neq 0$. To daje $\frac{f'}{f} = \frac{1}{z-p}k + \frac{f_1'}{f_1}$; a że funkcje $\frac{f_1'h}{f_1}$ i kh są holomorficzne w otoczeniu punktu p, to $\mathrm{res}_0(\frac{f'}{f}h) = k \cdot \mathrm{res}_0(\frac{1}{z-p}h) = k \cdot h(p)$; patrz a) i g) powyżej. $\square$

Zadanie (reguła de L'Hospitala). Niech punkt p będzie uogólnionym zerem tak funkcji g, jak i funkcji h, przy czym jego krotność jest w obu przypadkach dodatnia lub w obu ujemna. Wówczas w $\widetilde{\mathbb{C}}$ granica $\lim_{z\to p} g(z)/h(z)$ istnieje i jest równa $\lim_{z\to p} g'(z)/h'(z)$.

Ćwiczenie. Niech 0 będzie uogólnionym zerem k–krotnym funkcji g i l–krotnym funkcji h. Gdy $k > 0$, to ilukrotnym jest 0 zerem złożenia $h \circ g$?

5 Twierdzenie o residuach a całki (w tym niewłaściwe) i szeregi

Poniższy materiał omawiany będzie przede wszystkim na ćwiczeniach.

Gdy funkcja zespolona f jest określona i ciągła na zorientowanym odcinku $J = (p,q) \subset \mathbb{C}$, to przez **całkę niewłaściwą** $\int_J f$ rozumiemy granicę $\lim \int_{[p',q']} f$ przy $p' \to p, q' \to q$ i $p', q' \in (p,q)$ – jeśli taka granica istnieje.[10] Podobna definicja stosuje się, gdy J jest zorientowaną pólprostą lub prostą. Tu zajmiemy się całką niewłaściwą $\int_{-\infty}^{\infty}$, gdy $J = (-\infty, \infty)_{\mathbb{R}}$.

Uwaga 1. Istnienie granicy $I = \lim_{r\to\infty} \int_{-r}^{r} f$ to warunek konieczny istnienia całki $\int_{-\infty}^{\infty} f$. Jest on też wystarczający gdy funkcja f jest symetryczna (dlaczego?), lecz już dla $f(z) = z$ granica $\lim_{r\to\infty} \int_{-r}^{r} f$ istnieje, a całka $\int_{-\infty}^{\infty} f$ – nie. Jednak gdy całka $\int_{-\infty}^{\infty} f$ istnieje (co na ogół wymaga dodatkowego uzasadnienia), to jest równa I. $\square$

Poniżej wpierw podamy dwa naturalne warunki, umożliwiające wyznaczenie powyższej granicy I, a następnie dowiedziemy, że zapewniają one też istnienie całki. Oznaczmy przez Π_+ otwartą półpłaszczyznę $\mathrm{Im}\, z > 0$, przez $\overline{\Pi_+}$ jej domknięcie, a przez Γ_r półokrąg $\{re^{\mathrm{i}t} : t \in [0,\pi]\}$, traktowany jako zorientowany łuk o początku w r. Zakładamy niżej, że

$$\underline{f \in H(\overline{\Pi_+} \setminus S) \text{ dla pewnego skończonego zbioru } S \subset \Pi_+ .} \tag{*}$$

Przez s oznaczmy (skończoną) sumę $\sum_{p\in S} \mathrm{res}_p f$ residuów funkcji f w punktach zbioru S.

[10] Całka niewłaściwa $\int_J f$ może istnieć i gdy $\int_J |f| = \infty$. Dla jasności, należałoby całkę niewłasciwą oznaczać inaczej, niż całkę Lebesgue'a – co w literaturze angielskiej ma miejsce (całkę niewłaściwą poprzedza się literami p.v, od „principal value"). Odnotujmy, że dla ograniczonej funkcji ciągłej f i odcinka $J = (p,q)$ zachodzi równość $\int_J f = \int_{[p,q]} f$ (dlaczego?).

Uwaga 2. Jeśli $\lim_{r\to\infty}\int_{\Gamma_r} f = c$, to granica $I = \lim_{r\to\infty}\int_{-r}^{r} f$ istnieje i wynosi $2\pi\mathrm{i}s - c$. Istotnie, gdy liczba r jest większa niż moduł każdego z rozważanych wyżej punktów osobliwych, to na podstawie równości (10) liczba $\int_{-r}^{r} f + \int_{\Gamma_r} f$ jest równa $2\pi\mathrm{i}s$, skąd wynika teza. (Wykorzystaliśmy to, że półkole $\{z : |z| \le r, \mathrm{Im}(z) \ge 0\}$ jest zbiorem regularnym).

Twierdzenie 1. *Jeśli, prócz $(*)$, spełniony jest któryś z poniższych warunków, to* $\lim_{r\to\infty}\int_{\Gamma_r} f = 0$ *i wobec tego* $I = 2\pi\mathrm{i}s$*:*

i) Istnieją stałe $M, R > 0$ takie, że $|f(z)| \le M/|z|^2$ dla $z \in \overline{\Pi_+} \setminus D(0,R)$.

ii) $\lim_{z\to\infty, z\in\overline{\Pi_+}} f(z)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}az} = 0$ *dla pewnej liczby dodatniej a.*

<u>Dodatek:</u> Zachodzi też wówczas $\lim_{r\to\infty}\int_{\Lambda_r} f = 0$, *dla dowolnych łuków $\Lambda_r \subset \Gamma_r$.*

Dowód. Ad i). Mamy $|\int_{\Lambda_r} f| \le \pi r \sup_{z\in\Lambda_r}|f(z)| = \pi \sup_{z\in\Gamma_r}|z||f(z)| \xrightarrow[r\to\infty]{} 0$.

Ad ii).* Podobnie, $|\int_{\Lambda_r} f| \le r\int_0^{\pi}|f(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})|\mathrm{d}t$. Niech

$$\varphi(r) = \sup\{|f(z)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}az}| : z \in \Gamma_r\}$$

Wtedy dla $z = r\mathrm{e}^{it} \in \Gamma_r$ jest $\mathrm{i}az = \mathrm{i}ar\cos t - ar\sin t$, skąd $|f(z)| \le \varphi(r)|\mathrm{e}^{\mathrm{i}az}| = \varphi(r)\mathrm{e}^{-ar\sin t}$. A że dla $t \in [0, \pi/2]$ punkt $(t, \sin t)$ wykresu funkcji sin leży nad prostą przechodzącą przez punkty $(0,0)$ i $(\pi/2, 1)$, to $\sin t \ge \frac{2}{\pi}t$. Zatem

$$|\int\limits_{\Lambda_r} f| \le \int\limits_0^{\pi} \varphi(r)\mathrm{e}^{-ar\sin t} r\,\mathrm{d}t = 2r\varphi(r)\int\limits_0^{\pi/2}\mathrm{e}^{-ar\sin t}\,\mathrm{d}t \le 2r\varphi(r)\int\limits_0^{\pi/2}\mathrm{e}^{-\frac{2}{\pi}art}\,\mathrm{d}t. \tag{13}$$

Ostatnie wyrażenie jest równe $\frac{\pi}{a}\varphi(r)(1-\mathrm{e}^{-ar})$ – co kończy dowód, bo $\lim_{r\to\infty}\varphi(r) = 0$.

Twierdzenie 2. *Jeśli spełnione są warunki (*) i ii), to całka* $\int_{-\infty}^{\infty} f$ *istnieje.*

Dowód. Załóżmy, że zachodzi ii) i oznaczmy przez Λ_r łuk $\{r\mathrm{e}^{it} : t \in [0, \pi/2]\}$. Gdy r_0 jest liczbą większą niż moduł każdego z punktów osobliwych funkcji f, to dla $r > r_0$ otrzymujemy na podstawie twierdzenia o residuach

$$\int\limits_{[r_0, r]} f = \int\limits_{\Lambda_{r_0}} f + \int\limits_{[\mathrm{i}r_0, \mathrm{i}r]} f + \int\limits_{-\Lambda_r} f \tag{14}$$

Jak wiemy z „dodatku” do twierdzenia 1, ostatnia całka w (14) dąży do 0 gdy $r \to \infty$. Ponadto z warunku ii) wynika ograniczoność funkcji $f(\mathrm{i}t)\mathrm{e}^{at}$ dla $t \ge r_0$, i tym samym istnienie całki funkcji $|f|$ na półprostej $J = \{\mathrm{i}t : t \ge r_0\}$. Istnieje więc granica $\lim_{r\to\infty}\int\limits_{r_0}^{r} f$, równa $\int\limits_{\Lambda_{r_0}} f + \int\limits_J f$, i podobnie istnieje całka $\int\limits_{-\infty}^{-r_0} f$. Zatem całka $\int_{-\infty}^{\infty} f$ też istnieje.

Uwaga 3. Część ii) twierdzenia 1 i twierdzenie 2 nazywane są „lematem Jordana". Lemat ten umożliwia wyznaczenie tzw. **transformaty Fouriera** $\hat{g}(a) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}ax}\mathrm{d}x$ pewnych funkcji g. Jest on też użyteczny przy badaniu całek $\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\cos(ax)\mathrm{d}x$ lub $\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\sin(ax)\mathrm{d}x$, gdzie $a > 0$ (czy ogólniej $a \neq 0$), a funkcja g przyjmuje na $\mathbb{R}$ wartości rzeczywiste i rozszerza się do funkcji $\widetilde{g}$, holomorficznej w $\overline{\Pi_+}$ poza zbiorem skończonym. Ponieważ bowiem $\cos(ax) = \operatorname{Re}\mathrm{e}^{iax}$, $\sin(ax) = \operatorname{Im}\mathrm{e}^{iax}$, więc rzecz sprowadza się do wyznaczenia całki $\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\mathrm{e}^{iax}\mathrm{d}x$, a to – dzięki lematowi Jordana – do wyznaczenia sumy pewnych residuów, o ile tylko założenia lematu są spełnione. („Naturalniejsze" całkowanie funkcji $\widetilde{g}(z)\cos(az)$ wzgl. $\widetilde{g}(z)\sin(az)$ w miejsce $\widetilde{g}(z)\mathrm{e}^{iaz}$ okazuje się mniej dogodne.) □

Użyjemy szacowania Jordana do wyznaczenia całek nieco innego typu.

Przykład. Udowodnimy, że $\int_0^{\infty} \exp(\mathrm{i}z^2)\mathrm{d}z = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}$, lub równoważnie, że tzw. **całki Fresnela** $\int_0^{\infty} \cos(z^2)\mathrm{d}z$ i $\int_0^{\infty} \sin(z^2)\mathrm{d}z$ są równe $\sqrt{\pi/8}$. W tym celu oznaczmy przez Λ_r łuk $\{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} : t \in [0, \pi/4]\}$, zaś przez p_r punkt $r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}$. Przy $f(z) = \exp(\mathrm{i}z^2)$ otrzymujemy $|\int_{\Lambda_r} f| \to 0$ gdy $r \to \infty$. (Uzasadnienie, podobne jak dla (13), pozostawione jest jako zadanie.) Stosując twierdzenie Cauchy'ego o równości całek do pętli $[0, r]\#\Lambda_r\#[p_r, 0]$ stwierdzamy więc, że $|\int_0^r f - \int\limits_{[p_r, 0]} f| \to 0$ gdy $r \to \infty$. A że $\int\limits_{[p_r, 0]} f = \int_0^r \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}\mathrm{d}t$ i tzw. **całka Poissona** $\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$ istnieje i wynosi $\sqrt{\pi}/2$, więc wynika stąd teza. □

Gdy funkcja f ma osobliwość w pewnym punkcie $p \in \mathbb{R}$, to celowe może być użycie małych półokręgów wokół p, pozwalających ominąć punkt osobliwy.

Przykład. Całkując funkcję $f(z) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z}$ po drodze $[-R, -r]\#(-\Gamma_r)\#[r, R]\#\Gamma_R$ stwierdzamy, że $\int_{-R}^{-r} f + \int_r^R f = \int_{\Gamma_r} f - \int_{\Gamma_R} f$. Ponadto, funkcja $F(z) = f(z) - \frac{1}{z}$ przedłuża się holomorficznie na punkt 0, skąd $\int_{\Gamma_r} f = \int_{\Gamma_r} F + \int_{\Gamma_r} \frac{1}{z}\mathrm{d}z \to \pi\mathrm{i}$ gdy $r \to 0$ (bo $\int_{\Gamma_r} F \to 0$ gdy $r \to 0$ i $\int_{\Gamma_r} \frac{1}{z}\mathrm{d}z = \pi\mathrm{i}$). Wobec tego $\operatorname{Im}\big(\int_{-R}^{-r} f + \int_r^R f\big) \to \pi$ gdy $r \to 0$ i $R \to \infty$, na podstawie twierdzenia 1ii), z $a = 1$. Po uwzględnieniu symetrii funkcji $\operatorname{Im}(f_{|\mathbb{R}})$, równej $\sin x/x$, daje to równość $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x = \pi/2$.

Twierdzenie o residuach jest pomocne nie tylko przy wyznaczaniu całek niewłaściwych, ale i całek funkcji okresowych. Przekonuje o tym proste

Twierdzenie 3. *Gdy f jest funkcją dwóch zmiennych rzeczywistych, ciągłą na brzegu koła jednostkowego $D = \{z : |z| = 1\}$, to*

$$\int\limits_0^{2\pi} f(\cos t, \sin t)\,\mathrm{d}t = \int\limits_{\partial D} g, \quad \textit{gdzie } g(z) := \tfrac{1}{\mathrm{i}z} f\big(\tfrac{1}{2}(z + \tfrac{1}{z}), \tfrac{1}{2\mathrm{i}}(z - \tfrac{1}{z})\big) \textit{ dla } z \in \partial D. \tag{15}$$

Jeśli więc powyższa funkcja g przedłuża się do funkcji $\widetilde{g}$, holomorficznej w $\overline{D}$ poza zbiorem skończonym $S \subset D$, to $\int\limits_0^{2\pi} f(\cos t, \sin t)\,\mathrm{d}t = 2\pi\mathrm{i}\sum_{p\in S} \operatorname{res}_p \widetilde{g}$.

Dowód. Równość (15) wynika z definicji całki $\int\limits_{\partial D} g$ i wzorów Eulera. ⊟

(Można wzór (15) łatwo zapamiętać: „podstawiamy” $z := \mathrm{e}^{\mathrm{i}t} = \cos t + \mathrm{i}\sin t$, co daje $\mathrm{d}z = \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\mathrm{d}t = \mathrm{i}z\mathrm{d}t$ oraz $\frac{1}{z} = \cos t - \mathrm{i}\sin t$, skąd dalej $\cos t = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$, $\sin t = \frac{1}{2\mathrm{i}}(z - \frac{1}{z})$.)

Dalsze sposoby wykorzystania twierdzenia o residuach do wyznaczania całek wskazane są w §XVI.4 trzeciego tomu „Analizy” K. Maurina. Tu podamy jeszcze pewne zastosowania do sumowania szeregów.

Twierdzenie 4. *Niech funkcja h będzie holomorficzna w $\mathbb{C}$ poza skończonym zbiorem S i spełnia warunek $|h(z)| \le C/|z|^2$ dla dostatecznie dużych $|z|$, gdzie $C > 0$ jest stałą. Wówczas $\sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus S} h(n) = -\pi \sum_{p\in S} \mathrm{res}_p g$, gdzie $g(z) := h(z)\,\mathrm{ctg}(\pi z)$.*

Dowód. Zbieżność (bezwzględna) szeregu $\sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus S} h(n)$ wynika z założenia.

Rozważmy teraz kwadrat K_N o środku w 0 i bokach długości $2N+1$, równoległych do osi urojonej i rzeczywistej, odpowiednio. Na podstawie ostatniego zadania z §I.6.A, dla dostatecznie dużych liczb naturalnych N funkcja $|\,\mathrm{ctg}(\pi z)|$ jest na jego brzegu ograniczona przez 2, skąd $|\int_{\partial K_N} g| \le 4(2N+1)\cdot 2\sup\{|f(z)| : z \in \partial K_N\}$. A że $|z| \ge N$ gdy $z \in \partial K_N$, to dla dużych N uzyskujemy $|\int_{\partial K_N} g| \le (8N+4)2C/N^2 \le 17C/N$.

Z drugiej strony, przy $S_1 := S \cup \mathbb{Z}$ zachodzi $\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\partial K_N} g = \sum_{p\in S_1\cap K_N} \mathrm{res}_p g$, na podstawie równości (10) zastosowanej do regularnego zbioru K_N. Ponadto, $\mathrm{res}_n g = \frac{1}{\pi}h(n)$ dla $n \in \mathbb{Z}\setminus S$, patrz przykład na końcu §4, przy $f(z) = \sin(\pi z)$. Stąd $|\sum_{p\in S} \mathrm{res}_p g + \frac{1}{\pi}\sum_{n\in K_N\setminus S} h(n)| \le 17C/N$ dla dużych N. (Literą n oznaczamy wyłącznie liczby całkowite.) A że $n \in K_N \Leftrightarrow |n| \le N$, to wobec skończoności S i sumowalności szeregu $\sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus S} h(n)$, sumą tego ostatniego jest $-\pi\sum_{p\in S} \mathrm{res}_p g$. □

Zadanie 1. Dowieść, powtarzając powyższe rozumowanie, że przy założeniach twierdzenia 4 ma miejsce równość $\sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus S}(-1)^n h(n) = -\pi\sum_{p\in S} \mathrm{res}_p f$, gdzie $f(z) := h(z)/\sin(\pi z)$.

Zadanie 2. Zastosować twierdzenie 4, gdy

a) $h(z) = 1/z^2$;

b) $h(z) = 1/(z-w)^2$, gdzie liczba $w \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$ jest ustalona;

c) $h(z) = 1/(z^2 - w^2)$, gdzie nadal $w \notin \mathbb{Z}$;

d) $h(z) = 1/z^4$.

Zadanie 3.* Obliczyć $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^6$.

V Osobliwości izolowane; funkcje meromorficzne.

1 Zasady izolowanych zer i identyczności.

Z licznych konsekwencji dowiedzionych już twierdzeń omówimy teraz tylko jedną.

Twierdzenie 1 (zasada izolowanych zer). *Gdy $f \in H(U)$, gdzie $U \subset \mathbb{C}$ jest* **obszarem** *(tzn. otwartym zbiorem spójnym), to równoważne są warunki:*
a) zbiór $f^{-1}(0)$ zer funkcji f ma w U punkt skupienia;
b) istnieje punkt $p \in U$ taki, że $f^{(n)}(p) = 0$ dla $n = 0, 1, \dots;$
c) $f = 0$.

Dowód. *a)* $\Rightarrow$ *b)*. Niech $p \in U$ będzie punktem skupienia zbioru $f^{-1}(0)$ i niech $N = \inf\{n \geq 0 : f^{(n)}(p) \neq 0\}$. Na podstawie uwagi 1 i stwierdzenia 1 w §IV.4, jeśliby $N < \infty$, to zachodziłaby równość $f(z) = (z-p)^N g(z)$, gdzie $g \in H(U)$ i $g(p) \neq 0$. Tym samym zachodziłoby $g(z) \neq 0$ dla z z pewnego otoczenia V punktu p, który byłby wobec tego jedynym zerem funkcji f w V, wbrew wyborowi tegoż punktu. Dowodzi to, że $N = \infty$.

b) $\Rightarrow$ *c)*. Niech

$$P = \{p \in U : f^{(n)}(p) = 0 \quad \text{dla każdego } n \geq 0\}$$

Zbiór P jest domknięty w U, jako przecięcie miejsc zerowych funkcji ciągłych. Ponadto

$$\text{gdy } p \in P, \text{ to } f_{|G} = 0 \text{ dla pewnego otoczenia } G \text{ punktu } p \text{ w } U \tag{*}$$

– bo szereg Taylora funkcji f o środku w punkcie $p \in P$ jest zerowy! Zbiór P jest więc zarazem otwarty w U, bo zawiera otoczenie każdego swego punktu. A że $P \neq \varnothing$ (na podstawie b)) i przestrzeń U jest spójna, to $P = U$. Stąd i z (*) wynika, że $f = 0$.

Implikacja *c)* $\Rightarrow$ *a)* jest oczywista. □

Wniosek 1 (zasada identyczności). *Niech $g, h \in H(U)$, gdzie U jest obszarem w $\mathbb{C}$. Jeśli zbiór $\{z \in U : g(z) = h(z)\}$ ma w U punkt skupienia, to $g = h$.*

Dowód. Wynika to z twierdzenia, odniesionego do funkcji $f = g - h$. □

Wniosek 2. *(N) Gdy f jest niezerową funkcją, holomorficzną w obszarze $U \subset \mathbb{C}$, to krotność $k_f(p)$ każdego punktu $p \in U$ jako pierwiastka funkcji f jest skończona.*

Dowód. Wynika to z równoważności b)$\Leftrightarrow$c) w twierdzeniu. □

2 Funkcje meromorficzne i zasada argumentu.

Niech $U \subset \mathbb{C}$ będzie zbiorem otwartym, a f – funkcją zespoloną, określoną na podzbiorze płaszczyzny $\mathbb{C}$.

Zadanie. Przy tych oznaczeniach, równoważne są warunki:

i) Dla każdego punktu $p \in U$, funkcja f jest określona i holomorficzna w pewnym jego nakłutym otoczeniu.

ii) Istnieje zbiór $S(f) \subset U$, który jest **dyskretny w** U (tzn., nie ma w U punktów skupienia) i taki, że funkcja f jest określona i holomorficzna w $U \setminus S(f)$.

Odnotujmy, że zbiór $S(f)$ nie jest przez funkcję f wyznaczony jednoznacznie: możemy go n.p. powiększyć o dowolny punkt $p \in U$. Możemy też przedłużyć funkcję f na wszystkie punkty pozornie osobliwe $p \in S(f)$ i tym samym usunąć je z $S(f)$.

Definicja. a) Gdy powyższe równoważne warunki są spełnione to powiemy, że f jest funkcją **holomorficzną w** U **poza izolowanymi osobliwościami** (lub: **poza zbiorem dyskretnym w** U).

b) Jeśli ponadto f nie ma osobliwości istotnej w żadnym punkcie zbioru $S(f)$, to f nazywamy funkcją **meromorficzną** w U. Zbiór takich funkcji oznaczamy przez $M(U)$.

Lemat 1. *Gdy U jest obszarem w $\mathbb{C}$ i $f \in M(U)$, to $f = 0$ lub zbiór $S(f) \cup f^{-1}(0)$ jest dyskretny w U.*

Dowód. Niech $f \neq 0$. Zakładamy niżej, że f rozszerzono na wszystkie punkty pozornie osobliwe. Ponieważ zbiór $S(f)$ jest dyskretny w U, więc pozostaje dowieść, że każdy punkt $p \in U$ ma otoczenie V_p takie, że $V_p \cap f^{-1}(0) \subset \{p\}$.

Gdy $p \in S(f)$, to istnienie V_p wynika stąd, że $\lim_{z\to p} f(z) = \infty$. Gdy zaś $p \in U \setminus S(f)$, to wynika ono z zasady izolowanych zer, odniesionej do funkcji $f \in H(U \setminus S(f))$. By mieć prawo z tej zasady skorzystać, trzeba rozwiązać część a) następującego zadania:

Zadanie. Gdy zbiór $S \subset U$ jest dyskretny w zbiorze U, to

a) $U \setminus S$ jest obszarem, jeśli U nim jest;

b) każdy zbiór $S' \subset S$ jest domknięty w U;

c) $\#(K \cap S) < \infty$ dla każdego zbioru zwartego $K \subset U$ (skąd $\#S \leq \aleph_0$).

Twierdzenie 1. *Niech U będzie obszarem w $\mathbb{C}$. Wówczas $M(U)$ jest ciałem (przy naturalnych działaniach), zamkniętym ze względu na różniczkowanie.*

Dowód. Niech $f, g \in M(U)$. Stwierdzamy, że:

i) $g/f \in M(U)$ gdy $f \neq 0$, bo funkcja g/f jest holomorficzna w U poza zbiorem $S = S(g) \cup f^{-1}(0) \cup S(f)$, dyskretnym w U, przy czym w każdym punkcie $p \in S$ ma ona biegun lub osobliwość pozorną. (Korzystamy z przykładu h) w §IV.4.)

ii) $f + g \in M(U)$, bo wokół każdego punktu $p \in U$ funkcja $f + g$ rozwija się w szereg Laurenta, którego część główna, w ślad za f i za g, zawiera tylko skończenie wiele wyrazów.

iii) Tak samo, $f' \in M(U)$. □

Oznaczenie. Niech $f \in M(U) \setminus \{0\}$. Przez $N_{f,K}$ oznaczamy sumę krotności uogólnionych zer funkcji f, leżących w danym zbiorze $K \subset U$. Gdy zbiór K jest zwarty, to zer tych jest skończenie wiele i liczba $N_{f,K}$ jest dobrze określona. (Patrz wyżej i wniosek 2 w §1.)

Uwaga 1. Załóżmy, zgodnie z uwagą 1 w §IV.4, że f nie ma osobliwości usuwalnych. Wtedy

$$N_{f,K} = Z_{f,K} - B_{f,K} \tag{16}$$

gdzie $Z_{f,K}$ to suma krotności „prawdziwych" zer funkcji $f \in M(U)$, leżących w K, zaś $B_{f,K}$ to suma rzędów jej biegunów w K. Gdy więc funkcja f jest holomorficzna (nie ma biegunów), to $N_{f,K}$ daje informację o liczbie jej zer, liczonych z krotnościami. □

Twierdzenie 2 (zasada argumentu)**.** *Niech niech funkcja f, meromorficzna w otoczeniu zwartego zbioru regularnego K, nie ma zer ani biegunów na jego brzegu. Wówczas*

$$N_{f,K} = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int\limits_{\Gamma} \frac{f'}{f} = \mathrm{ind}(f \circ \Gamma, 0), \quad \textit{gdzie } \Gamma := \partial K \textit{ to zorientowany brzeg.} \tag{17}$$

Uwaga 2. a) Wyżej, dla cyklu $\Gamma = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i$, gdzie $\gamma_i : [a_i, b_i] \to \mathbb{C}$ są drogami zamkniętymi, definiujemy $f \circ \Gamma$ jako cykl $\sum_{i=1}^{n} f \circ \gamma_i$. (Każda z dróg $f \circ \gamma_i$ jest zamknięta.)

b) Nazwa „zasada argumentu" bierze się stąd, że jeśli $\Gamma = \gamma$ jest drogą zamkniętą, to $2\pi \cdot \mathrm{ind}(f \circ \gamma, 0)$ jest przyrostem argumentu punktu $f(p)$, gdy punkt $p = \gamma(t)$ jednokrotnie obiega krzywą $\mathrm{im}(\gamma)$ (tzn. parametr t w sposób rosnący przebiega dziedzinę pętli γ). Równość ta wynika z części i) uwagi 1 w §III.3. □

Dowód twierdzenia. Druga równość w (17) wynika (jak?) z definicji indeksu. Pozostaje dowieść pierwszej.

Przez U oznaczmy otoczenie, o którym mowa w twierdzeniu. Niech $S := K \cap (S(f) \cup f^{-1}(0))$; z zadania wiemy, że $\#S < \infty$. Funkcja f'/f jest holomorficzna w $K \setminus S$, bo tak $1/f$, jak i f' są holomorficzne w otoczeniu tego zbioru. Ponadto, w punktach $p \in S$ jej residuum jest równe krotności $k(p)$ punktu p jako uogólnionego zera funkcji f; patrz końcowy przykład w §IV.4. Wobec tego z twierdzenia o residuach (patrz wzór (10)) uzyskujemy:

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int\limits_{\Gamma} \frac{f'}{f} = \sum_{p \in S} \mathrm{res}_p(f'/f) = \sum_{p \in S} k(p) = N_{f,K} \qquad \square$$

Ćwiczenie. Przy założeniach zasady argumentu, niech $h \in H(K)$ i $h(z) \neq 0$ dla $z \in \partial K$. Dowieść, że $\int_{\partial K} h \frac{f'}{f} = 2\pi \mathrm{i} \sum_{p \in K} k_f(p) h(p)$, gdzie sumujemy po wszystkich uogólnionych zerach p funkcji f w K.

Ćwiczenie. Dowieść, że gdy funkcje f, g są meromorficzne w obszarze $U \subset \mathbb{C}$ i zbiór $K \subset U$ jest zwarty, to $N_{f \cdot g, K} = N_{f,K} + N_{g,K}$.

3 Twierdzenie Rouchégo.

Twierdzenie 1 (Rouchégo)**.** *Niech funkcje f i g będą meromorficzne w otoczeniu zwartego zbioru regularnego K i nie mają biegunów na jego brzegu. Jeśli*

$$|f(w) - g(w)| < |f(w)| \quad \textit{dla} \;\; w \in \mathrm{Bd} K, \tag{18}$$

to $N_{f,K} = N_{g,K}$.

Dowód. Niech pętla γ_i będzie jedną ze składowych cyklu $\Gamma = \partial K$. Z założenia, pętle $\lambda := f \circ \gamma_i$ i $\mu := g \circ \gamma_i$ spełniają warunek $|\lambda - \mu| < |\lambda|$, skąd homotopia $(s\mu + (1 - s)\lambda)_{s\in[0,1]}$ pomiędzy λ i μ przyjmuje wartości w $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. (Korzystamy z tego, że gdy $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ i $|z_1 - z_2| < |z_1|$, to $[z_1, z_2] \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$.) Zatem $\mathrm{ind}(\lambda, 0) = \mathrm{ind}(\mu, 0)$, czy równoważnie $\mathrm{ind}(f \circ \gamma_i, 0) = \mathrm{ind}(g \circ \gamma_i, 0)$. Sumując po wszystkich składowych γ_i wnosimy, że $\mathrm{ind}(f \circ \Gamma, 0) = \mathrm{ind}(g \circ \Gamma, 0)$. Teza wynika więc z zasady argumentu. □

Uwaga 1. * Wyżej, regularność zbioru K jest zbędna: wystarcza zwartość. Patrz §VII.5.

Wskażmy na pewne zastosowania twierdzenia Rouchégo:

Twierdzenie 2 (Hurwitza). *Niech $U \subset \mathbb{C}$ będzie obszarem i niech ciąg funkcji $f_n \in H(U)$ będzie niemal jednostajnie zbieżny do funkcji f, różnej od stałej. Jeśli równanie $f(z) = w$ ma w U co najmniej k różnych pierwiastków, to dla dostatecznie dużych n równanie $f_n(z) = w$ też ma w U co najmniej k różnych pierwiastków.*

Dowód. Możemy założyć, że $w = 0$ – inaczej funkcje f_n zastąpimy przez $f_n - w$, a f przez $f - w$. Niech $p_1, \ldots, p_k$ będą różnymi zerami funkcji f. Obierzmy parami rozłączne koła $\overline{D}_i = \overline{D}(p_i, r) \subset U$ tak, by $\overline{D}_i \cap f^{-1}(0) = \{p_i\}$ dla $1 \le i \le k$. (Korzystamy z zasady izolowanych zer.) Liczba $\varepsilon = \inf_{z\in K}|f(z)|$, gdzie $K = \bigcup_{i=1}^n \partial D_i$, jest wtedy dodatnia. Dla n tak dużych, by $\|f - f_n\|_K < \varepsilon$, i każdego i, mamy $Z_{f_n,D_i} = Z_{f,D_i}$ na podstawie twierdzenia Rouchégo. Funkcja f ma więc zero w każdym dysku D_i i łącznie ma ich niemniej, niż k. □

Zadanie. f Gdy funkcja f jest holomorficzna w kole domkniętym $\overline{D}$ o środku w p i spełnia nierówność $|f(z) - f(p)| \ge R$ dla $z \in \partial D$, to jej obraz zawiera dysk $D(f(p), R)$.

4 Charakteryzacja różnych typów osobliwości izolowanych

Poniżej zakładamy, że V jest nakłutym otoczeniem punktu $p \in \mathbb{C}$ i $f \in H(V)$.

Twierdzenie 1 (Wersja lematu Riemanna o przedłużaniu). *Równoważne są warunki:*

a) osobliwość w punkcie p jest usuwalna,
b) f można przedłużyć do funkcji $\widetilde{f} \in H(V \cup \{p\})$.
c) istnieje granica $\lim_{z\to p} f(z) \in \mathbb{C}$.
d) $\lim_{z\to p}(z - p)f(z) = 0$.

Dowód. Równoważności $a) \Leftrightarrow b)$ dowiedziono w §IV.4, a implikacje $b) \Rightarrow c) \Rightarrow d)$ są oczywiste. Gdy zaś zachodzi d), to funkcja $z \mapsto (z - p)f(z)$ przedłuża się do funkcji ciągłej g, a ta jest holomorficzna na podstawie uwagi 1b) w §IV.1. Ponieważ $g(p) = 0$, więc $g(z) = (z-p)\widetilde{f}(z)$ dla wszystkich $z \in V$ i pewnej funkcji $\widetilde{f} \in H(V \cup \{p\})$, mającej własność wymaganą w b) (bo $(z - p)f(z) = (z - p)\widetilde{f}(z)$ dla $z \in V \setminus \{p\}$). Tak więc d) $\Longrightarrow$ b). □

Twierdzenie 2 (Casoratiego–Sochockiego–Weierstrassa). *Równoważne są warunki:*
a) dla każdego nakłutego otoczenia $V_0 \subset V$ punktu p, zbiór $f(V_0)$ jest gęsty w $\mathbb{C}$;
b) w $\widetilde{\mathbb{C}}$ nie istnieje granica $\lim_{z\to p} f(z)$;
c) osobliwość w punkcie p jest istotna.

Dowód. Implikacja $a) \Rightarrow b)$ jest oczywista. By dowieść, że $\neg c)\neg b)$ zauważmy, że – na podstawie stwierdzenia 1b) w §IV.4 – jeśli $k_f(p) \neq -\infty$, to $\lim_{z\to p} f(z) = \infty$ lub też istnieje $\lim_{z\to p} f(z) \in \mathbb{C}$, zależnie od tego, czy $k_f(p) < 0$ (tzn., w p jest biegun), czy też $k_f(p) \geq 0$ (tzn. osobliwość w p jest usuwalna).

Gdy zaś obraz $f(V_0)$ nakłutego otoczenia V_0 punktu p nie jest gęsty w $\mathbb{C}$, to jest rozłączny z pewnym dyskiem $D(z_0, r)$. Funkcja $g(z) = 1/(f(z) - z_0)$ jest wtedy poprawnie określona i holomorficzna w V_0, przy czym $|g| < 1/r$. Na podstawie twierdzenia 1, istnieje $\lim_{z\to p} g(z) \in \mathbb{C}$ wobec czego funkcja $f = z_0 + 1/g$ ma granicę w $\widetilde{\mathbb{C}}$. To dowodzi, że $\neg a) \Rightarrow \neg c)$. □

Wniosek 1. *Funkcja f ma punkcie p biegun wtedy i tylko wtedy, gdy* $\lim_{z\to p} f(z) = \infty$. □

Dodatek do §4: informacja o wielkim twierdzeniu Picarda.

Twierdzenie 2 można znacznie wzmocnić: obraz nakłutego otoczenia punktu istotnie osobliwego nie tylko jest gęsty w $\mathbb{C}$, ale „prawie równy" $\mathbb{C}$:

Twierdzenie 3 (Picarda, wielkie). *Obraz dowolnego otoczenia nakłutego punktu $p \in \mathbb{C}$, przy funkcji mającej nim osobliwość istotną, jest całą płaszczyzną $\mathbb{C}$ z pominięciem być może jednego punktu.*

Twierdzenie to udowodnimy w §VIII.3; tu ograniczymy się do poniższych komentarzy.

Uwaga 1. Nietrudno wywnioskować, że przy założeniach twierdzenia istnieje punkt $q \in \mathbb{C}$ taki, że każda wartość z $\mathbb{C} \setminus \{q\}$ jest przyjmowana w dowolnym otoczeniu nakłutym punktu p – a wiec nieskończenie wiele razy w takim otoczeniu. ⊟

Wniosek 2. *Funkcja $f \in H(\mathbb{C})$, nie będąca wielomianem, przyjmuje nieskończenie wiele razy każdą wartość w $\mathbb{C}$, prócz być może jednej.*

Dowód. Funkcja $z \mapsto f(1/z)$ ma w zerze osobliwość istotną; patrz dalej twierdzenie 2 w §5.

Uwaga 2. „Wartość pomijana" we wniosku może istnieć – np., dla funkcji exp jest nią 0. Podobnie jest z twierdzeniem Picarda i funkcją $z \mapsto \exp(1/z)$, mającą osobliwość istotną.

5 Równouprawnienie nieskończoności.

Niech funkcja f będzie holomorficzna w otoczeniu nakłutym V punktu ∞ (a więc w zbiorze, zawierającym pewien pierścień $|z| > r$). Twierdzenia z §4 sugerują przyjęcie takich definicji:

Definicja. a) Powiemy, że f ma **w nieskończoności** (tzn. w punkcie $p = \infty \in \widetilde{\mathbb{C}}$):
osobliwość usuwalną (czy: **pozorną**), gdy w $\mathbb{C}$ istnieje granica $\lim_{z\to\infty} f(z)$;
biegun, gdy $\lim_{z\to\infty} f(z) = \infty$;
osobliwość istotną, gdy w rozszerzonej płaszczyźnie $\widetilde{\mathbb{C}}$ nie istnieje granica $\lim_{z\to\infty} f(z)$.

Uwaga 1. (N) Przy $j : \widetilde{\mathbb{C}} \to \widetilde{\mathbb{C}}$ oznaczającym homografię $j(z) = 1/z$, typ osobliwości funkcji f w nieskończoności jest taki sam, jak typ osobliwości funkcji $f \circ j$ w zerze.

Wniosek 1. *(N) a) Twierdzenie Casoratiego–Sochockiego–Weierstrassa z §V.4 pozostaje prawdziwe, gdy $p = \infty$.*
b) f ma w punkcie $p = \infty$ osobliwość pozorną wtedy i tylko wtedy, gdy $\lim_{z\to\infty} \frac{f(z)}{z} = 0$.

Dowód. Ad a). Ponieważ V_0 jest nakłutym otoczeniem nieskończoności wtedy i tylko wtedy, gdy $j(V_0)$ jest nakłutym otoczeniem zera, więc wystarcza skorzystać z uwagi 1.

Ad b). Z twierdzenia 1 w §4 wiemy, że $f \circ j$ ma w zerze osobliwość pozorną wtedy i tylko wtedy, gdy $\lim_{z\to 0} zf(1/z) = 0$ – a więc wtedy i tylko wtedy, gdy $\lim_{z\to\infty} f(z)/z = 0$. ⊟

Wniosek 2. *Rozwińmy funkcję f w pierścieniu $|z| > r$ w szereg Laurenta $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n z^n$.*
a) Jeśli f ma w nieskończoności osobliwość pozorną, to $c_n = 0$ dla $n > 0$.
b) Jeśli f ma w nieskończoności biegun, to $c_n \neq 0$ tylko dla skończenie wielu $n > 0$.
c) Implikacje odwrotne też są prawdziwe. □

Zadanie 1. Wywnioskować, że jeśli $\lim_{z\to\infty} z^k f(z) = 0$ dla pewnego $k \in \mathbb{Z}$, to $c_n = 0$ dla $n \geq -k$ i wobec tego $|f(z)| \leq C/|z|^{k+1}$ dla pewnej stałej C i dostatecznie dużych $|z|$.

Definicja. Funkcja f jest **meromorficzna** w zbiorze otwartym $U \subset \widetilde{\mathbb{C}}$, co zapisujemy $f \in M(U)$, gdy jest ona holomorficzna w U poza pewnym zbiorem $S(f)$, dyskretnym w U, i w żadnym punkcie $p \in S(f)$ nie ma osobliwości istotnej. (Zakładamy, że $\infty \in S(f)$ jeśli $\infty \in U$, by można było mówić o holomorficzności w $U \setminus S(f)$.)

Przykład. Funkcja exp jest nie jest meromorficzna w $\widetilde{\mathbb{C}}$, choć jest holomorficzna poza $p = \infty$. Bierze się to stąd, że ma ona w ∞ osobliwość istotną (co widać n.p. z wniosku 2).

Uwaga 2. a) Funkcja $f \in M(U)$ wyznacza funkcję $g : U \to \widetilde{\mathbb{C}}$ taką, że $f(z) = g(z)$ dla $z \in U \setminus S(f)$ i $g(z) = \infty$ dla $z \in S(f)$. Oczywiście, g jest ciągła w U i holomorficzna w $U \cap \mathbb{C}$ poza zbiorem $g^{-1}(\infty)$, dyskretnym w U. Odwrotnie, funkcja $g : U \to \widetilde{\mathbb{C}}$, spełniająca te warunki, wyznacza funkcję $f = g_{|U\cap\mathbb{C}} \in M(U)$, przy czym $S(f) = g^{-1}(\infty) \cup U \cap \{\infty\}$.

b) Można więc na funkcje $f \in M(U)$ patrzeć jako na pewne funkcje ciągłe $U \to \widetilde{\mathbb{C}}$. W tym ujęciu, nie mają one żadnych „osobliwości” (=punktów nieokreśloności) i powinny raczej być nazywane funkcjami holomorficznymi z U do $\widetilde{\mathbb{C}}$. Wymaga to jednak zdefiniowania pochodnej $f'(p)$, a także i innych używanych dotąd pojęć, gdy $p = \infty$ czy $f(p) = \infty$. W tym wykładzie wprowadzimy tylko residuum w nieskończoności.

Definicja. Przy oznaczeniach zadania 1, liczbę $-c_{-1}$ nazywamy **residuum funkcji f w nieskończoności.**

Twierdzenie 1 (Cauchy'ego o residuach, jedna z wersji dla $\widetilde{\mathbb{C}}$). *Gdy $D \subset \mathbb{C}$ jest dyskiem, a funkcja f jest meromorficzna w $\mathbb{C} \setminus D$ i nie ma biegunów na brzegu ∂D dysku D, to $\int_{\partial D} f = -2\pi \mathrm{i} \sum_{p \in S(f)\setminus D} \mathrm{res}_p f$.*

Dowód. Wobec zwartości $\widetilde{\mathbb{C}} \setminus D$, zbiór $S(f)$ jest skończony, a $S(f)\setminus\{\infty\}$ –zawarty w pewnym kole $D_1 := \{z : |z| < R\}$. Jak wiemy, pierścień $P = D_1 \setminus D$ jest zbiorem regularnym, skąd na podstawie twierdzenia o residuach z §IV.3, ma miejsce równość $\int_{\partial P} f = 2\pi \mathrm{i} \sum_p \mathrm{res}_p f$, gdzie sumowanie jest po wszystkich punktach $p \in S(f) \cap P = (S(f) \setminus D) \setminus \{\infty\}$. A że $\int_{\partial P} = \int_{\partial D_1} - \int_{\partial D}$, to $\int_{\partial D} f = -2\pi \mathrm{i} \sum_p \mathrm{res}_p f + \int_{\partial D_1} f$. Pozostaje skorzystać z równości $\int_{\partial D_1} f = 2\pi \mathrm{i} c_{-1}$, wynikającej w holomorficzności f w pierścieniu $\mathbb{C} \setminus D_1$. (Patrz (7) w §IV.2.) □

Wniosek 3. *Gdy funkcja f jest holomorficzna w $\mathbb{C}$ poza zbiorem skończonym, to suma jej residuów (włączając residuum w nieskończoności) jest równa zeru.*

Dowód. Obierzmy mały dysk D tak, by funkcja f była holomorficzna w $\overline{D}$. Wówczas $\int_{\partial D} f = 0$ i teza wynika z twierdzenia 1. □

Zbadajmy najprostsze funkcje meromorficzne.

Twierdzenie 2. *Gdy $f \in H(\mathbb{C})$ i istnieje granica $\lim_{z\to\infty} f(z) \in \widetilde{\mathbb{C}}$, to f jest wielomianem.*

Dowód. Z założenia, f rozwija się w $\mathbb{C}$ w szereg Maclaurina $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$. Ponieważ osobliwość w nieskończoności jest pozorna, to $c_n = 0$ dla prawie wszystkich $n > 0$, patrz zadanie 1. Stąd wynika teza. □

Zadanie 2. Z zadania 1 uzyskać wersję **twierdzenia Liouville'a**: jeśli $f \in H(\mathbb{C})$ i $|f(z)| \leq C|z|^s$ dla pewnych $s, C \geq 0$ i dostatecznie dużych $|z|$, to f jest wielomianem stopnia $\leq \lfloor s \rfloor$.

Twierdzenie 3. *Funkcja, meromorficzna w całej sferze $\widetilde{\mathbb{C}}$, jest sumą wielomianu i skończenie wielu ułamków prostych właściwych – a więc jest funkcją wymierną.*

Powyżej, **funkcją wymierną** nazywamy iloraz dwóch wielomianów (patrz §I.6.B), natomiast **ułamek prosty właściwy** to funkcja postaci $c/(z-p)^n$, gdzie $p, c \in \mathbb{C}$ i $n \in \mathbb{N}$.

<u>Dowód twierdzenia.</u> Rozważana funkcja, którą nazwijmy f, ma w zwartej przestrzeni $\widetilde{\mathbb{C}}$ pewien skończony zbiór P_0 biegunów. Niech $P = P_0 \setminus \{\infty\}$ oraz

$$Gf \overset{def}{=} \sum_{p \in P} G_p f, \quad \text{łączna część osobliwa funkcji } f.$$

Wiemy z lematu 1 w §IV.3, że $f - Gf$ przedłuża się do funkcji holomorficznej $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Ponadto, każda z funkcji $G_p f$, a przez to i Gf, jest skończoną sumą ułamków prostych właściwych. Zatem $\lim_{z\to\infty}(Gf)(z) = 0$ i istnieje granica $\lim_{z\to\infty} g(z)$, równa $\lim_{z\to\infty} f(z)$. Na podstawie twierdzenia 2, g jest wielomianem, a $f = g + Gf$ szukanym rozkładem. $\square$

Twierdzenie 3 daje więc rozkład funkcji wymiernej na ułamki proste. Istotne jest też:

Twierdzenie 4. *Funkcja, różnowartościowa i holomorficzna w $\mathbb{C}$ poza zbiorem dyskretnym, jest homografią (ściślej: przedłuża się do homografii).*

Dowód. Twierdzenie ma prostszą wersję, w *której zakłada* się przedłużalność f do różnowartościowej funkcji ciągłej $\widetilde{f} : \widetilde{\mathbb{C}} \to \widetilde{\mathbb{C}}$, mającej w $\mathbb{C}$ skończony zbiór biegunów. Jeśli wówczas $\widetilde{f}(\infty) = \infty$, to $\widetilde{f}(p) \neq \infty$ dla $p \in \mathbb{C}$, wobec czego z twierdzenia 1 wynika, że $\widetilde{f}$ jest wielomianem, zaś z zasadniczego twierdzenia algebry – że $\deg(\widetilde{f}) = 1$. (Inaczej funkcja $\widetilde{f}$ nie byłaby różnowartościowa.) Gdy zaś $\widetilde{f}(\infty) \neq \infty$, to odnosi się to do funkcji $g = 1/(\widetilde{f} - \widetilde{f}(\infty))$, skąd i w tym przypadku $\widetilde{f} = \widetilde{f}(\infty) + 1/g$ jest homografią.

* Poniższy dowód wersji mocniejszej (podanej w sformułowaniu twierdzenia) jest materiałem uzupełniający. Udowodnimy wpierw, że gdy funkcja f jest różnowartościowa i holomorficzna w zbiorze otwartym $U \subset \widetilde{\mathbb{C}}$ poza zbiorem S, dyskretnym w U, to jest meromorficzna, a jej ciągłe przedłużenie $\widetilde{f} : U \to \widetilde{\mathbb{C}}$ jest funkcją różnowartościową. Uzasadnienie oparte jest o twierdzenie o zachowywaniu obszaru, które udowodnimy w §VI.1.

Obierzmy w tym celu dysk $D \subset U \setminus S(f)$. Zbiór $U_0 = U \setminus D \setminus S(f)$ jest otoczeniem nakłutym każdego punktu $p \in S$, a jego obraz $f(U_0)$ jest rozłączny ze zbiorem $f(D)$. Ponieważ ten ostatni jest otwarty w $\mathbb{C}$ (na mocy przywołanego twierdzenia), więc z twierdzenia Casoratiego–Sochockiego–Weierstrassa wynika, że f nie ma osobliwości istotnej – a zatem przedłuża się do funkcji ciągłej $\widetilde{f} : U \to \widetilde{\mathbb{C}}$. Ponadto, jeśli $p, q \in U$ i $p \neq q$, to istnieją w U rozłączne otoczenia: V_p punktu p i V_q punktu q. Z twierdzenia o zachowywaniu obszaru, w wersji z zadania z §VI.1B, wynika tym razem, że zbiór $\widetilde{f}(V_p)$ jest otoczeniem punktu $\widetilde{f}(p)$, zaś $\widetilde{f}(V_q)$ – punktu $\widetilde{f}(q)$. A że $f(V_p \setminus \{p\}) \cap f(V_q \setminus \{p\}) = \emptyset$, to $\widetilde{f}(p) \neq \widetilde{f}(q)$ – co dowodzi różnowartościowości funkcji $\widetilde{f}$.

Wróćmy do dowodu tezy twierdzenia. Udowodniliśmy, że badana funkcja f przedłuża się do ciągłej różnowartościowej funkcji $\widetilde{f} : \mathbb{C} \to \widetilde{\mathbb{C}}$ Zbiór $\widetilde{f}^{-1}(\infty) \cup \{\infty\}$, poza którym $\widetilde{f}$ jest holomorficzna, jest więc skończony i możemy teraz rozszerzyć $\widetilde{f}$ do różnowartościowej funkcji ciągłej $\widetilde{\mathbb{C}} \to \widetilde{\mathbb{C}}$. Gdy funkcję tę nadal nazwać $\widetilde{f}$, to znajdziemy się w przypadku, rozpatrzonym na początku. $\square$

Zadanie 3. Utożsamijmy każdą funkcję $f \in M(U)$, gdzie U jest zbiorem otwartym w $\widetilde{\mathbb{C}}$, z odpowiadającą jej funkcją ciągłą $U \to \widetilde{\mathbb{C}}$. Dowieść, że:

a) Gdy $f \in M(U)$, to zbiór $f^{-1}(w)$ jest dyskretny w U dla każdego $w \in \widetilde{\mathbb{C}}$.

b) Gdy $f \in M(U)$, $g \in M(V)$ i $f(U) \subset V$, to $g \circ f \in M(U)$.

Ćwiczenie. Udowodnić, że $\mathrm{res}_\infty f = \mathrm{res}_0 g$, gdzie $g(z) := -\frac{1}{z^2} f(\frac{1}{z})$.

VI PODSTAWOWE KONSEKWENCJE

1 Konsekwencje analityczności funkcji holomorficznych

A. Lokalny opis funkcji holomorficznej.

Zakładamy niżej, że $U \subset \mathbb{C}$ jest obszarem, funkcja $f \in H(U)$ nie jest stała i $p \in U$. Oczywiście, p jest pierwiastkiem równania $f(z) = f(p)$; niech będzie to pierwiastek n–krotny.

Twierdzenie 1 (o opisie funkcji w otoczeniu punktu). *Przy tych założeniach, istnieje otoczenie G punktu p w U takie, że $f(z) = (h(z))^n + f(p)$ dla $z \in G$, gdzie funkcja $h \in H(G)$ przekształca G homeomorficznie na pewien dysk $D(0, r)$ i spełnia warunki $h(p) = 0$ i $h'(p) \neq 0$.*

Schematyczny
rysunek:

Wniosek 1. *Równoważne są warunki:*
a) funkcja f jest różnowartościowa na pewnym otoczeniu punktu p;
b) p jest jednokrotnym pierwiastkiem równania $f(z) = f(p)$;
c) $f'(p) \neq 0$.

Dowód. Równoważność *b*) $\Leftrightarrow$ *c*) wynika z definicji, a *a*) $\Leftrightarrow$ *b*) – z twierdzenia, bo tylko dla $n = 1$ funkcja $z \mapsto z^n + f(p)$ jest różnowartościowa w pewnym otoczeniu zera. □

Wniosek 2. *Przy oznaczeniach twierdzenia, równanie $f(z) = q$ ma dla $q \in D(f(p), r^n) \setminus \{f(p)\}$ dokładnie n pierwiastków w G, każdy krotności 1.*

Dowód. Równanie $g(z) = q$, gdzie $g(z)=z^n + f(p)$, ma w $D(0, r)$ dokładnie n pierwiastków, i na otoczeniu każdego z nich funkcja g jest różnowartościowa. Ponieważ $h : G \to D(0, r)$ jest homeomorfizmem, więc równanie $g \circ h(z) = q$ ma n pierwiastków w G, każdy krotności 1. (Korzystamy z równoważności a)$\Leftrightarrow$b) we wniosku 1.) □

Dowód twierdzenia. Mamy $f(z) - f(p) = (z - p)^n g(z)$ dla pewnej funkcji $g \in H(U)$ spełniającej warunek $g(p) \neq 0$. Funkcja g jest niezerowa na małym dysku $D \subset U$ o środku w p. Na mocy twierdzenia 3 z §III.2, istnieje funkcja $g_0 \in H(D)$ taka, że $g_0^n = g_{|D}$. Niech $h_0(z) = (z - p)g_0(z)$ dla $z \in D$; wtedy $f_{|D} = h_0^n + f(p)$ oraz $h_0'(p) = g_0(p) \neq 0$. Ponieważ ponadto $h_0(p) = 0$, więc h_0 przekształca pewne otoczenie G punktu p homeomorficznie na pewien dysk $D(0, r)$. (Wykorzystaliśmy twierdzenie 1 z §I.8.) Przyjmujemy $h = h_{0|G}$. □

B. Otwartość funkcji holomorficznych i zasada maksimum.

Twierdzenie 1 (o zachowywaniu obszarów). *Gdy zbiór $U \subset \mathbb{C}$ jest obszarem i funkcja $f \in H(U)$ nie jest stała, to zbiór $f(U)$ jest obszarem, a przekształcenie f jest otwarte.*

Dowód. Dla każdego punktu $p \in U$ poprzednie twierdzenie daje zbiór $G_p \subset U$ taki, że $f(G_p)$ jest dyskiem o środku w $f(p)$. Zbiór $f(U) = \bigcup\{f(G_p) : p \in W\}$ jest więc otwarty w $\mathbb{C}$, a jako ciągły obraz zbioru spójnego jest też spójny (czyli jest obszarem).

Stosując to przy U zastąpionym przez dysk $D \subset U$ stwierdzamy, że przekształcenie $f : U \to \mathbb{C}$ jest otwarte, bo przeprowadza dowolny taki dysk na zbiór otwarty. $\square$

Twierdzenie 2 (zasada maksimum)**.** *Przy założenich twierdzenia 1, funkcja $|f|$ nie przyjmuje maksimum w U, zaś minimum przyjmuje w swych zerach (jeśli je ma).*

Dowód. Niech $p \in U$. Jak już wiemy, zbiór $f(U)$ zawiera pewien dysk o środku w $f(p)$. Oczywiście, do dysku tego należy punkt w taki, że $|w| > |f(p)|$. Zatem $|f(p)| < \sup_{z\in U}|f(z)|$, dla każdego $p \in U$. Tak samo, gdy $f(p) \neq 0$, to $|f(p)| > \inf_{z\in U}|f(z)|$. $\square$

Uwaga 1. a) Z dowodu wynika, że funkcja $|f|$ nie ma w U punktów lokalnego maksimum, a punktami jej lokalnego minimum są jej zera.

b) Tak samo, funkcje $\operatorname{Re} f$ i $\operatorname{Im} f$ nie mają w U punktów (lokalnego) ekstremum.

c) Wyżej, zakłada się niestałość f. Niekiedy jednak wygodniej jest a) czy b) stosować w takiej postaci: jeśli U jest obszarem, $f \in H(U)$ i któraś z funkcji $|f|, \pm\operatorname{Re} f, \pm\operatorname{Im} f$ ma w U punkt lokalnego maksimum, to funkcja f jest stała.

d) Stąd i z twierdzenia o przyjmowaniu kresów przez funkcję ciągłą na zbiorze zwartym wynika, że gdy funkcja f jest ciągła na domknięciu ograniczonego obszaru $U \subset \mathbb{C}$ i holomorficzna w U, to funkcje $|f|, \pm\operatorname{Im} f, \pm\operatorname{Re} f$ swój kres górny przyjmują na brzegu zbioru U. (Dla niestałej funkcji f przyjmują go bowiem w punktach zbioru zwartego $\overline{U}$, lecz nie w U.)

Zadanie. Udowodnić, że obraz spójnego zbioru otwartego $U \subset \widetilde{\mathbb{C}}$ przy niestałej funkcji meromorficznej f jest zbiorem otwartym w $\widetilde{\mathbb{C}}$. (Wskazówka: otwartość wystarcza sprawdzać w otoczeniach punktów $p \in U$. Gdy $p \neq \infty \neq f(p)$, wykorzystać twierdzenie 1 i lemat Riemanna z §V.4. Pozostałe przypadki sprowadzić do powyższego przez rozpatrzenie funkcji $f \circ j$ lub $j \circ f$ lub $j \circ f \circ j$, gdzie j to inwersja $z \mapsto 1/z$.)

C. Twierdzenie Morery i zasada symetrii Riemanna–Schwarza

Twierdzenie 1 (Morery)**.** *Funkcja $f : U \to \mathbb{C}$, ciągła w zbiorze otwartym $U \subset \mathbb{C}$, jest holomorficzna wtedy i tylko wtedy, gdy $\int_{\partial\triangle} f = 0$ dla każdego trójkąta $\triangle \subset U$.*

Dowód. ($\Rightarrow$) Wynika to z lematu Goursata.
($\Leftarrow$) Niech $D \subset U$ będzie dyskiem. Z wniosku w §II.2 wynika istnienie funkcji funkcji F, pierwotnej dla $f_{|D}$. Funkcja F jest holomorficzna, więc analityczna; jej pochodna $f_{|D}$ jest zatem holomorficzna. (Korzystamy z wniosku w §I.5.) Wobec dowolności dysku $D \subset U$, funkcja f jest holomorficzna. $\square$

Oto dwa przykładowe zastosowania twierdzenia Morery.

Twierdzenie 2. *Niech $L \subset \mathbb{C}$ będzie prostą, a $U \subset \mathbb{C}$ – zbiorem otwartym. Gdy funkcja ciągła $f : U \to \mathbb{C}$ jest holomorficzna w zbiorze $U \setminus L$, to jest holomorficzna w U.*

Dowód. Oznaczmy przez U^+ i U^- przecięcia zbioru U z półpłaszczyznami otwartymi, na które prosta L dzieli płaszczyznę. Posłużymy się twierdzeniem Morerey i rozważymy kilka przypadków, zależnych od położenia trójkąta $\triangle$.

i) Gdy $\triangle \subset U^+$ lub $\triangle \subset U^-$, to $\int_{\partial\triangle} f = 0$ na mocy lematu Goursata.

ii) Gdy $\triangle \subset U^+ \cup L$ lub $\triangle \subset U^- \cup L$, to we wnętrzu trójkąta $\triangle$ budujemy trójkąty $\triangle_n$ $(n \geqslant 1)$, których wierzchołki dążą do wierzchołków trójkąta $\triangle$. Z i) wynika, że

$$\int_{\partial\triangle} f = \lim_{n\to\infty} \int_{\partial\triangle_n} f = \lim_{n\to\infty} 0 = 0.$$

iii) Jeśli $\triangle$ przecina zarówno U^+, jak i U^-, to dzielimy trójkąt $\triangle$ na trzy mniejsze, jak na rysunku. Jak już wiemy, $\int_{\partial\triangle_i} f = 0$ dla $i = 1, 2, 3$, skąd $\int_{\partial\triangle} f = \sum_{i=1}^3 \int_{\partial\triangle_i} f = 0$. □

Uwaga 1. Ta sama teza pozostaje słuszna, gdy L jest okręgiem. Istotnie, by sprawdzić różniczkowalność w punkcie $p \in L$ możemy obrać taką homografię h, przeprowadzającą ten okrąg na pewną prostą L_1, by $h(p) \neq \infty$. Wówczas założenia twierdzenia są spełnione przez zbiór $U_1 := h(U) \setminus \{\infty\}$ i funkcję $f_1 := f \circ h^{-1}$. Funkcja f_1 ma więc pochodną w punkcie $h(p)$, a funkcja $f = f_1 \circ h^{-1}$ ma ją w punkcie p.

Poniższą **zasadę symetrii Riemanna–Schwarza** [11] sformułujemy w wersji dotyczącej opisanej w §I.6.C symetrii s_T względem uogólnionego okręgu T. Zbiór U nazwiemy symetrycznym względem tego okręgu, gdy $s_T(U) = U$; para zaś punktów z_1, z_2 jest symetryczna względem T, gdy symetryczny jest zbiór $\{z_1, z_2\}$. Czytelnik może przy pierwszym czytaniu chcieć ograniczyć się do przypadku, gdy okrąg jest prostą $\operatorname{Im} z = 0$; wtedy symetria s_T jest zwykłą symetrią zwierciadlaną $z \mapsto \overline{z}$.

Twierdzenie 3. *Niech obszar $U \subset \mathbb{C}$ będzie symetryczny względem okręgu T_1 i niech funkcja ciągła $f : U \to \mathbb{C}$ przeprowadza $T_1 \cap U$ w podzbiór okręgu T_2. (Okręgi mogą być uogólnione.) Wówczas równoważne są warunki:*

a) funkcja f jest holomorficzna,

b) funkcja f jest holomorficzna na jednej z dwóch składowych zbioru $U \setminus T_1$ i przeprowadza pary punktów z U, symetryczne względem T_1, w pary symetryczne względem T_2.

Dowód gdy $T_1 = T_2 = \mathbb{R}$. b) $\Longrightarrow$ a). Oznaczmy rozważaną składową przez U^+, a pozostałą przez U^-. Funkcja f, ze względu na założoną własność symetrii, spełnia dla $z \in U^-$

[11] Por. uwaga 5 w §I.6.C. Według Ahlforsa, Riemann i Schwarz rozważali dalsze szczególne przypadki, a zasadę sformułował Caratheodory. W wielu pracach nazywana jest ona „zasadą Schwarza–Caratheodory'ego".

warunek $f(z) = \overline{f(\overline{z})}$. Jest więc ona holomorficzna nie tylko w U^+, ale i w U^-, patrz zadanie w §I.3. Zatem $f \in H(U)$ na podstawie twierdzenia 2, zastosowanego przy $L = \mathbb{R}$.

a) $\Longrightarrow$ b). Gdy $f \in H(U)$, to zadajemy funkcję $g : U \to \mathbb{C}$ wzorem $g(z) = f(z)$ dla $z \in U \setminus U^-$ i $g(z) = \overline{f(\overline{z})}$ dla $z \in U \setminus U^+$. Funkcja g jest poprawnie określona i ciągła, bo oba wzory dają ten sam wynik na części wspólnej dziedzin, zawartej w $\mathbb{R}$. Jak udowodniono wyżej, $g \in H(U)$, skąd $f = g$ na podstawie zasady identyczności, bo $f(z) = g(z)$ dla $z \in U^+$. A że g spełnia żądany warunek symetrii, to spełnia go i f.

Przypadek ogólny.* Sprowadzamy go do powyższego jak w uwadze 1, przeprowadzając okrąg $T_i\,(i = 1, 2)$ homografią h_i na prostą $\mathbb{R}$ i stosując powyższy przypadek szczególny do przekształcenia $h_2 \circ f \circ h_1^{-1}$. (Gra oczywiście rolę to, że homografie zachowują symetrię względem okręgów; patrz uwaga 5 w §I.6.C.) $\boxminus$

2 Konsekwencje twierdzenia i całkowych wzorów Cauchy'ego.

A. Nierówności Cauchy'ego i twierdzenie Liouville'a.

Twierdzenie 1 (Nierówności Cauchy'ego). *Gdy $D = D(z_0, r)$ i $f \in H(\overline{D})$, to*

$$|f^{(n)}(z_0)| \leqslant n!M/r^n \, dla \;\; n \geqslant 0, \;\; gdzie \; M = \|f\|_{\partial D}. \tag{19}$$

Dowód. Na podstawie wzorów całkowych Cauchy'ego (patrz (4) w §IV.1),

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\partial D} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} \, \mathrm{d}w.$$

Ponieważ $|f(w)| \leq M$ i $|w - z_0| = r$ dla $w \in \partial D$, więc otrzymujemy stąd

$$|f^{(n)}(z_0)| \leqslant \frac{n!}{|2\pi \mathrm{i}|} \, \ell(\partial D) \cdot \frac{M}{r^{n+1}} = \frac{n!}{r^n} M. \quad \square$$

Oto zastosowanie tego twierdzenia:

Twierdzenie 2 (Liouville'a). *Jedynymi ograniczonymi funkcjami* **całkowitymi** *(tzn., holomorficznymi w całej płaszczyźnie $\mathbb{C}$) są funkcje stałe.*

Dowód. Ogólniejsza wersja została już wskazana w zadaniu 2 z §V.5; podamy jednak uzasadnienie oparte na twierdzeniu 1. Niech $f \in H(\mathbb{C})$ i $\|f\|_{\mathbb{C}} < \infty$. Z twierdzenia 1, zastosowanego do $D(z, r)$ wynika, że $|f'(z)| \leqslant \|f\|_{\mathbb{C}}/r$ dla każdych $r > 0$ i $z \in \mathbb{C}$. Stąd $f' = 0$ i wobec tego $f = \mathrm{const}$. $\square$

Uwaga 1. Odnotujmy, że funkcja exp, różna od stałej i holomorficzna w całej płaszczyźnie, jest ograniczona na każdej półpłaszczyznie $\operatorname{Re} z \leq c$.

Ćwiczenie. Niech funkcja $f \in H(\mathbb{C})$ będzie ograniczona. Dla danych $a, b \in \mathbb{C}$ dowieść, że $\lim_{r\to\infty} \int\limits_{|w|=r} \frac{f(w)}{(w-a)(w-b)}\,\mathrm{d}w = 0$ i użyć twierdzenia o residuach do uzyskania jeszcze innego dowodu twierdzenia Liouville'a.

B.* Aproksymacja funkcjami wymiernymi.

Niech K będzie zwartym podzbiorem wnętrza ograniczonego zbioru regularnego W i niech $f \in H(\overline{W})$. Udowodnimy, że f można na K jednostajnie przybliżać funkcjami wymiernymi, i to bardzo specjalnej postaci:

Twierdzenie 1 (Rungego, wstępne). * *Przy tych oznaczeniach, dla danej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje funkcja wymierna g taka, że $\|f - g\|_K < \varepsilon$ oraz $g(z) = \sum_{i=1}^{n} c_i/(z - w_i)$, gdzie $w_1, \dots, w_n \in \mathrm{Bd}(W)$ i $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{C}$.*

Dowód. Z twierdzenia o residuach wynika, że $f(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int\limits_{\partial W} \frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w$ dla wszystkich $z \in W$. (Patrz wzór (9) w §IV.5.) Cykl ∂W przedstawmy w postaci $\sum_{j=1}^{n} \gamma_j$, dla pewnych dróg γ_j. Jeśli dla każdej z funkcji $f_j(z) := \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int\limits_{\gamma_j} \frac{f(w)}{w-z}\mathrm{d}w$, $z \in \mathbb{C}\setminus\mathrm{im}(\gamma_j)$, znajdziemy funkcję g_j żądanej postaci, taką, że $\|f_j - g_j\|_K < \varepsilon$, to pozostanie przyjąć $g := \sum_j g_j$.

Ustalmy więc drogę $\gamma = \gamma_j : [a, b] \to \overline{W}$ i niech $\widetilde{\varepsilon} := \varepsilon/n$. Na zwartym zbiorze $\mathrm{im}(\gamma) \times K$ funkcja $h(w, z) \overset{def}{=} f(w)/(w - z)$ jest jednostajnie ciągła, wobec czego istnieje liczba $\delta > 0$ taka, że $\operatorname{diam} h(G \times \{z\}) < \widetilde{\varepsilon}/\ell(\gamma)$ gdy tylko $z \in K$ i zbiór $G \subset \mathrm{im}(\gamma)$ ma średnicę mniejszą niż δ. Podzielmy teraz przedział $[a, b]$ punktami $a = t_0 < \cdots < t_N = b$ tak drobno, by średnica każdego zbioru $\gamma([t_{i-1}, t_i])$ była mniejsza niż δ, i niech $w_i = \gamma(t_i)$ dla $i = 0, \dots, N$. Na podstawie uwagi 1 w §II.6, zastosowanej do funkcji $w \mapsto h(w, z)$, ma dla $z \in K$ miejsce nierówność $|\int\limits_{\gamma} h(w, z)\,\mathrm{d}w - \sum_{i=1}^{N} h(w_i, z)(w_i - w_{i-1})| < \widetilde{\varepsilon}$ – a zatem i nierówność $|f_j(z) - \sum_{i=1}^{N} c_i/(z - w_i)| < \widetilde{\varepsilon}$, przy $c_i = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} f(w_i)(w_{i-1} - w_i)$. $\square$

Wynik ten posłuży do dowodu dalszych twierdzeń aproksymacyjnych Rungego w §VIII.1.

3 Varia: „zasadnicze twierdzenie algebry"; funkcje harmoniczne.

Twierdzenie 1 („Zasadnicze twierdzenie algebry"). *Niech $f(z) = c_0 + c_1 z + \ldots + c_n z^n$, gdzie $n \geqslant 1$ i $c_n \neq 0$. Wówczas $f(z_0) = 0$ dla pewnego $z_0 \in \mathbb{C}$.*

Podamy trzy dowody, wykorzystujące własności funkcji analitycznych.

<u>Dowód, oparty na twierdzeniu Liouville'a.</u> W przeciwnym razie $1/f \in H(\mathbb{C})$; a że $\sup_{z\in\mathbb{C}} |1/f(z)| < \infty$ (bo $\lim_{z\to\infty} 1/f(z) = 0$, patrz §I.6.B), to $1/f = \mathrm{const}$ na podstawie twierdzenia Liouville'a. Jest to sprzeczne z tym, że $n \geqslant 1$.

Dowód, oparty na zasadzie maksimum. Z zasady tej wynika, że f ma zero w dysku $D = D(0,R)$, o ile $|f(z)| \geq |c_0| = |f(0)|$ dla wszystkich $z \in \partial D$. Ponieważ $\lim_{z\to\infty} f(z) = \infty$, więc ostatni warunek jest spełniony dla dostatecznie dużych R – co dowodzi tezy. Jako zadanie pozostawiamy udowodnienie, że żądany warunek jest spełniony już dla $R \geq 2M + |c_0/c_n|$, gdzie $M = \max\{|c_k/c_n| : k = 0,\dots,n-1\}$. (Wskazówka: gdy $|z| > 1$, to $|f(z)| > |c_n z^n|(1 - M\sum_{k=1}^{n-1}|z|^{-k}) > |c_n z|(1 - \frac{M}{|z|-1})$.)

Dowód, oparty na twierdzeniu Rouchégo. Niech $g(z) := c_n z^n$. Ponieważ $\lim_{z\to\infty}(g(z) - f(z))/z^n = 0$, więc przy $D := D(0,R)$ i dużych R jest $|f(z) - g(z)| < |g(z)|$ dla $z \in \partial D$. Dla tych R jest więc $Z_{f,D} = Z_{g,D} = n$ – co kończy dowód. (Nietrudno też wskazać liczbę $R = R(c_0,...,c_n)$, dla której $D(0,R)$ zawiera wszystkie pierwiastki wielomianu f.)

Uzyskane wyniki mają też bezpośrednie konsekwencje dla teorii funkcji harmonicznych. Rozważamy niżej tylko rzeczywiste takie funkcje.

Twierdzenie 2. *a) Funkcja harmoniczna, określona w jednospójnym obszarze otwartym, jest w nim częścią rzeczywistą pewnej funkcji holomorficznej.*

b) Dla funkcji u, harmonicznej w kole $\overline{D}(z_0,r)$, zachodzi równość Gaussa o wartości średniej: $u(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{it})dt$. (Tak samo jest dla funkcji holomorficznych w $\overline{D}(z_0,r)$.)

c) Funkcja harmoniczna, określona w obszarze i mająca w nim punkt lokalnego ekstremum, jest stała.

Dowód. Część a) wynika z twierdzenia 3 w §II.2 i wniosku 1 w §III.1 o istnieniu funkcji pierwotnej w obszarze jednospójnym.

Ad b). Niech $D := D(z_0,r)$. Z a) wynika, że $u = \operatorname{Re} f$ dla pewnej funkcji $f \in H(\overline{D})$. Na podstawie wzoru Cauchy'ego mamy dalej $f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{f(w)}{w-z_0}dw = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it})dt$, więc przyrównanie części rzeczywistej pierwszego i ostatniego członu daje tezę.

Ad c). Niech Z oznacza domknięcie, w rozważanym obszarze G, punktów lokalnego ekstremum badanej funkcji harmonicznej u. Gdy $z \in Z$ i za D obrać dysk wokół z, zawarty w G, to na podstawie a) zachodzi $u_{|D} = \operatorname{Re} f$ dla pewnej funkcji $f \in H(D)$ – a tym samym funkcja $u_{|D}$ jest stała na D, na podstawie uwagi 1a) w §1B. Funkcja u jest więc stała na otoczeniu każdego punktu $z \in Z$, a zbiór Z jest otwarty w G. Ponieważ jest on też domknięty i niepusty (z konstrukcji i założenia), to jest równy G, a funkcja jest stała (bo jest lokalnie stała; dwukrotnie wykorzystano też spójność obszaru G). □

Wniosek 1. *Dwie funkcje, harmoniczne w danym obszarze ograniczonym i równe i ciągłe w punktach jego brzegu, są w tym obszarze równe. Tak samo jest z funkcjami holomorficznymi.*

Dowód. Gdy funkcje są holomorficzne, należy do ich różnicy zastosować uwagę 1c) w §1.B. Dla funkcji harmonicznych rozumowanie jest analogiczne. □

Zadanie. W oparciu o część a) twierdzenia dowieść, że funkcję, harmoniczną w dysku $D(0,r)$, można dla $r' < r$ rozwinąć na $D(0,r')$ w normowo zbieżny szereg $\sum_{n,k=0}^{\infty} d_{kl}x^k y^l$.

4 Twierdzenia o zbieżności ciągów funkcji holomorficznych.

Twierdzenie 1 (Weierstrassa). *Niech U będzie otwartym podzbiorem płaszczyzny $\mathbb{C}$ i niech $f_n \in H(U)$ dla $n \geq 1$. Jeśli ciąg (f_n) jest zbieżny niemal jednostajnie do funkcji $f : U \to \mathbb{C}$, to funkcja ta jest holomorficzna, zaś ciąg (f_n') jest zbieżny niemal jednostajnie do funkcji f'.*

Dowód. a) Ciągłość funkcji f wynika z uwagi 1 z §I.3. Holomorficzności dowieść wiec można sprawdzając, czy dla dowolnego trójkąta $\triangle \subset U$ spełniony jest warunek Morery-Goursata: $\int_{\partial\triangle} f = 0$. Warunek ten spełnia jednak każda z funkcji $f_n \in H(U)$, zaś na podstawie wniosku 1 w §II.1, $\int_{\partial\triangle} f_n \to \int_{\partial\triangle} f$. Zatem $\int_{\partial\triangle} f = 0$.

b) Pozostaje dowieść, że gdy $K \subset U$ jest zbiorem zwartym, to $\|f' - f_n'\|_K \to 0$. W tym celu przyjmijmy $r = \frac{1}{3}\operatorname{dist}(K, \mathbb{C} \setminus U)$ oraz $L = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{dist}(z, K) \leq r\}$. Wtedy $L \subset U$ i z nierówności Cauchy'ego wynika, że $|f'(z) - f_n'(z)| \leq \frac{1}{r}\|f - f_n\|_L$ dla $z \in K$. (Nierówność Cauchy'ego odnosimy do funkcji $f - f_n$, określonej na kole domkniętym $\overline{D}(z, r) \subset L$.) A że ciąg (f_n) jest na <u>zwartym</u> zbiorze L jednostajnie zbieżny do f, to $\|f' - f_n'\|_K \to 0$. $\square$

Zadanie. Niech ciąg funkcji $f_n : U \to \mathbb{C}$, gdzie $U \subset \mathbb{C}$ jest zbiorem otwartym, będzie niemal jednostajnie zbieżny do funkcji f. Dowieść, że jeśli każda z funkcji f_n ma funkcję pierwotną, to i f ją ma. (Wskazówka: część a) dowodu i twierdzenie 1 w §II.2.)

Twierdzenie 2 (Montela–Osgooda–Stieltjesa). *Niech zbiór $U \subset \mathbb{C}$ będzie otwarty i niech funkcje $f_n \in H(U)$, $n \geq 1$, będą wspólnie ograniczone (tzn. istnieje stała M taka, że $|f_n| < M$ dla $n = 1, 2 \ldots$). Wówczas:*

a) Jeśli ciąg $(f_n(p))$ jest zbieżny dla wszystkich punktów p z pewnego gęstego podzbioru P zbioru U, to ciąg (f_n) jest zbieżny niemal jednostajnie.

b) Z ciągu (f_n) można wybrać podciąg zbieżny niemal jednostajnie.

W dowodzie wykorzystamy następujący

Lemat 1. *Gdy $f \in H(\overline{D}(p, r))$ i $|f| \leq M$, to $|f(z_1) - f(z_2)| \leq (4M/r)|z_1 - z_2|$ dla $z_1, z_2 \in D(p, r/2)$.*

Dowód. Ustalmy punkty $z_1, z_2 \in D(p, r/2)$ i niech $D := D(p, r)$. Ze wzoru Cauchy'ego,

$$|f(z_1) - f(z_2)| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_{\partial D} f(w)\left(\frac{1}{w - z_1} - \frac{1}{w - z_2}\right) \mathrm{d}w\right| \leq \frac{2\pi r}{2\pi} \sup_{w \in \partial D} \frac{|f(w)||z_1 - z_2|}{|w - z_1||w - z_2|}$$

Stąd wynika teza, bo $|w - z_i| \geq r/2$ dla $i = 1, 2$ i wszystkich $w \in \partial D$.

Dowód twierdzenia 2. Czytelnik znający twierdzenie Arzeli–Ascolie'ego może łatwo, w oparciu o lemat, uzyskać zasadniczą część b). Podamy jednak bezpośredni dowód obu części.

Ad a). Należy dowieść, że gdy $K \subset U$ jest zbiorem zwartym (dowolnym, lecz ustalonym), to ciąg $(f_{n|K})$ jest zbieżny jednostajnie.

W tym celu ustalmy liczbę $r < \mathrm{dist}(K, \mathbb{C}\setminus U)$. Dla dowolnej liczby $\varepsilon \in (0, r/2)$ możemy z pokrycia $\{D(p,\varepsilon)\}_{p\in P}$ zbioru K wybrać pokrycie skończone, $\{D(p,\varepsilon)\}_{p\in P_0}$. Ponieważ każdy ze skończenie wielu ciągów $(f_n(p))$, $p \in P_0$, jest zbieżny, więc istnieje liczba n taka, że

$$|f_k(p) - f_l(p)| \leq \varepsilon \quad \text{dla } k, l > n \ \text{ i } \ p \in P_0.$$

Oznaczmy przez M stałą taką, że $|f_n| < M$ dla każdego n. Gdy $z \in K$, to istnieje punkt $p \in P_0 \cap D(z, \varepsilon)$ i na podstawie lematu zastosowanego do $g := f_i$,

$$|f_i(z) - f_i(p)| \leq (4M/r)|z - p| < (4M/r)\varepsilon \quad \text{dla } i = 1, 2 \ldots$$

Zatem gdy $k, l > n$, to

$$|f_k(z) - f_l(z)| \leq |f_k(z) - f_k(p)| + |f_k(p) - f_l(p)| + |f_l(p) - f_l(z)| \leq \frac{4M\varepsilon}{r} + \varepsilon + \frac{4M\varepsilon}{r}$$

Wobec dowolności punktu $z \in K$ wynika stąd, że ciąg $(f_{n|K})$ spełnia w normie $\| \, \|_K$ warunek Cauchy'ego, czyli jest zbieżny jednostajnie.

Ad b). Obierzmy przeliczalny zbiór $P = \{p_1, p_2, \ldots\}$, gęsty w U. Ponieważ ciąg $(f_n(p_1))$ jest ograniczony, więc można z niego wybrać podciąg zbieżny $(f_{n1}(p_1))$. Indukcyjnie, dla $i \geq 2$ tworzymy podciąg (f_{ni}) ciągu $(f_{n,i-1})$ tak, by ciąg $(f_{ni}(p_i))_{n=1}^{\infty}$ był zbieżny. Podciąg (f_{nn}) ciągu (f_n) jest zbieżny w każdym punkcie p_i, więc na mocy a) jest zbieżny niemal jednostajnie. □

Uwaga 1. * a) Założenie wspólnej ograniczoności funkcji $f_n \in H(U)$ można w twierdzeniu 2 osłabić tak: funkcje te są **lokalnie wspólnie ograniczone**, tzn. dla każdego punktu $p \in U$ istnieje jego otoczenie D takie, że $\sup_n ||f_n||_D < \infty$. Wynika to z obecnej wersji twierdzenia, bo funkcje spełniające osłabiony warunek są wspólnie ograniczone na każdym zbiorze zwartym $K \subset U$ (dlaczego?).

b) To samo założenie zostało w zasadniczy sposób osłabione przez Montela: wystarczające jest istnienie dwóch punktów płaszczyzny $\mathbb{C}$, nie będących wartością żadnej z funkcji f_n. Dowód twierdzenia Montela podajemy w §VIII.2.

Uwaga 2. * Za Vitalim odnotujmy, że gdy U jest obszarem, to część a) twierdzenia pozostanie słuszna gdy zażądać w niej jedynie, by zbiór P miał w U punkt skupienia (w miejsce tego, by był w U gęsty). Istotnie, w przeciwnym razie istniałyby –na mocy dowiedzionej już wersji części a)– punkt $z \in U$ i podciągi (g_n) i (h_n) ciągu (f_n) takie, że $\lim_n g_n(z) \neq \lim_n h_n(z)$. Z (g_n) i (h_n) można zaś wybrać podciągi zbieżne niemal jednostajnie, zgodnie z częścią b). Granice tych podciągów byłyby funkcjami holomorficznymi w U, różnymi w punkcie z i równymi na zbiorze P mającym w U punkt skupienia – wbrew zasadzie identyczności. □

VII Wybrane aspekty topologiczne i geometryczne

1 Przekształcenia biholomorficzne i konforemne.

Definicja. Niech $U, V \subset \mathbb{C}$, przy czym zbiór U jest otwarty. Przekształcenie $f : U \to V$ nazwiemy **biholomorficznym**, jeśli jest ono bijektywne i holomorficzne.

Przekształcenia biholomorficzne nazywane są też konforemnymi, lecz temu słowu nadamy inne znaczenie. W książce Saksa i Zygmunda nazwane są one najładniej: wierne.

Uwaga 1. Jeśli U jest obszarem i przekształcenie $f : U \to V$ jest biholomorficzne, to:
i) $f'(p) \neq 0$ dla każdego $p \in U$ (wynika to z wniosku 1 w §VI.1.A),
ii) V jest obszarem i przekształcenie f^{-1} jest biholomorficzne (wynika to z twierdzeń 1 w §VI.1.B i 1 w §I.8.),
iii) f jest homeomorfizmem U na V. (Wynika to z ciągłości f i f^{-1}, patrz wyżej.)

Uwaga 2. Gdy U jest obszarem w $\mathbb{C}$ i ciąg różnowartościowych funkcji $f_n \in H(U)$ jest niemal jednostajnie zbieżny, to graniczna funkcja f bądź jest różnowartościowa (i wtedy przekształca U biholomorficznie na $f(U)$), bądź stała. Istotnie, jeśli nie, to dla pewnego w równanie $f(z) = w$ ma co najmniej dwa rozwiązania i na podstawie twierdzenia Hurwitza z §V.2 jest tak przy f zastąpionym przez f_n, dla dostatecznie dużych n – wbrew różnowartościowości funkcji f_n. □

Ważną własnością przekształceń biholomorficznych jest ich konforemność. Przysługiwać ona może przekształceniom pomiędzy podzbiorami przestrzeni euklidesowej dowolnego wymiaru.

Definicja. a) Niech U i V będą otwartymi podzbiorami przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^k$. Przekształcenie $f : U \to V$ nazwiemy **konforemnym**, gdy jest ono homeomorfizmem klasy C^1 i pochodna $\mathrm{d}f(p)$ jest podobieństwem, dla każdego punktu $p \in U$.
b) **Miarą kąta pomiędzy gładkimi łukami**, w ich wspólnym początku p, nazywamy liczbę $\alpha \in [0, \pi]$, będącą miarą kąta pomiędzy wektorami stycznymi do tych łuków w punkcie p. (Tak więc $\cos\alpha = \langle \lambda_1'(0), \lambda_2'(0)\rangle / \|\lambda_1'(0)\| \cdot \|\lambda_2'(0)\|$, gdzie λ_1 i λ_2 to parametryzacje rozważanych łuków, obrane tak, by $\lambda_1(0) = p = \lambda_2(0)$.)
c) Gdy $k = 2$, to można analogicznie zdefiniować miarę **zorientowanego kąta pomiędzy gładkimi łukami**, w ich wspólnym początku p. (Kolejność łuków jest istotna!)

Uwaga 3. Złożenie przekształceń konforemnych $f : U \to V$ i $g : V \to W$ jest przekształceniem konforemnym U na W. Wynika to ze wzoru na pochodną złożenia, bo złożenie podobieństw jest podobieństwem.

Twierdzenie 1. *Gdy $f : U \to V$ jest przekształceniem konforemnym i $p \in U$, to*
i) granica $\mu = \lim_{a \to p} \|f(a) - f(p)\| / \|a - p\|$ istnieje i jest różna od zera.

ii) f zachowuje miarę kąta drogami, tzn. miara kąta pomiędzy łukami L_1, K_2 w ich wspólnym początku p jest równa mierze kąta między łukami $f(L_1)$ i $f(L_2)$ w ich wspólnym początku $f(p)$.

Dowód. i) Z definicji pochodnej $\|f(a) - f(p)\|/\|a - p\| = \|\mathrm{d}f(p)\frac{a-p}{\|a-p\|}\| + r(a)$, gdzie $\lim_{a\to p} r(a) = 0$. Skoro $\mathrm{d}f(p)$ jest podobieństwem, którego skalę oznaczmy przez μ, to $\|\mathrm{d}f(p)v\| = \mu \neq 0$ dla wektorów jednostkowych v, skąd wynika i).

ii) Niech $\mu_i := f \circ \lambda_i$, gdzie $\lambda_i : [0,1] \to \mathbb{C}$ to taka parametryzacja łuku L_i, dla której $\lambda_i(0) = p\,(i = 1, 2)$. Wówczas $\mu_i' = (\mathrm{d}f(p))\lambda_i'(0)$ dla $i = 1, 2$; a że $\mathrm{d}f(p)$ jest podobieństwem, to $\angle(\mu_1'(0), \mu_2'(0)) = \angle(\lambda_1'(0), \lambda_2'(0))$. □

Twierdzenie 2. *a) Każde przekształcenie biholomorficzne $f : U \to V$, gdzie zbiory $U, V \subset \mathbb{C}$ są otwarte, jest konforemne. (Utożsamiamy tu $\mathbb{C}$ z $\mathbb{R}^2$.)*

b) Symetria przestrzeni nakłutej względem sfery jest przekształceniem konforemnym.*

Dowód. a) Jak wiemy, f jest homeomorfizmem i $f'(p) \neq 0$ dla $p \in U$; patrz uwaga 1. Pochodna rzeczywista $\mathrm{d}f(p)$ jest więc podobieństwem dla $p \in U$, patrz §I.2.

b) Wystarcza rozważyć przypadek symetrii $J(x) = x/\|x\|^2$ względem sfery jednostkowej $\{v : \|v\| = 1\}$, gdyż inwersja f względem sfery $S = \{x : \|x - o\| = r\}$ jest związana z J zależnością $f = G^{-1} \circ J \circ G$, gdzie G to podobieństwo, przeprowadzające S na sferę jednostkową. Pozostaje więc rozwiązać następujące zadanie:

Zadanie. * Wyznaczyć pochodną przekształcenia $J(x) = x/\|x\|^2$ ($x \in \mathbb{R}^k \setminus \{0\}$) i dowieść, że jest ona podobieństwem. (Odp. z dokładnością do czynnika $\|x\|^{-2}$, pochodna $\mathrm{d}J(x)$ jest równa symetrii lustrzanej względem podprzestrzeni $x^\perp$: mamy $\mathrm{d}J(x)(u) = \frac{1}{\|x\|^2}(u - 2\langle \frac{x}{\|x\|}, u\rangle \frac{x}{\|x\|})$. Inaczej: macierz Jacobiego pochodnych cząstkowych inwersji J jest równa $\|x\|^{-2}(I - 2A)$, gdzie $A = A(x) \overset{def}{=} (x_i x_j \|x\|^{-2})_{i,j=1}^k = yy^t$, przy $y := x/\|x\|$; macierz A jest symetryczna i spełnia warunek $A^2 = A$, wobec czego macierz $I - 2A$ jest ortogonalna.)

Uwaga 4. * Jak wiemy z zadania 12 w §I.6.C, każdy rzut stereograficzny jest obcięciem (do rzutowanej sfery nakłutej) symetrii względem sfery. Stąd już wynika, że rzut stereograficzny sfery nakłutej również spełnia warunki i) oraz ii) twierdzenia 2. Jest on też przekształceniem konforemnym, jeśli definicję konforemności w sposób naturalny rozszerzyć na przekształcenia pomiędzy rozmaitościami riemannowskimi.

Uwaga 5. Uzasadnienie twierdzeń 1 i 2a) pokazuje, że przekształcenie biholomorficzne zachowuje miarę *zorientowanego* kąta pomiędzy łukami gładkimi. Wynika to stąd, że pochodna rzeczywista $\mathrm{d}f(p)$ takiego przekształcenia jest podobieństwem zachowującym orientację, patrz uwaga 2 w §I.2.

2 Przekształcenia dysku.

Udowodnimy tu dwa ważne lematy o holomorficznych przekształceniach dysku. Pierwszy, należący do Schwarza, posłuży w §4 do dowodu twierdzenia Riemanna o holomorficznej równoważności obszarów jednospójnych, zaś drugi – lemat Blocha–Landaua – do dowodu twierdzenia Montela w §VIII.2. (Pośrednio gra on rolę w dowodzie twierdzenia Picarda z §V.3.) Lemat Blocha–Landaua stanowi nieobowiązkowy materiał uzupełniający, podobnie jak omawiany w „dodatku 1" związek lematu Schwarza z geometrią hiperboliczną płaszczyzny.

Lemat 1 (Schwarza o dysku)**.** *Niech holomorficzna funkcja $f : D(0,r) \to D(0,R)$ spełnia warunek $f(0) = 0$. Wówczas prawdziwe są nierówności $|f'(0)| \leq R/r$ i $|f(z)| \leq (R/r)|z|$ dla $z \neq 0$; ponadto, albo wszystkie te nierówności są ostre, albo $f(z) = kz$ dla wszystkich $z \in D(0,r)$ i pewnej stałej k o module R/r. (W ostatnim przypadku, f jest złożeniem obrotu wokół 0 i jednokładności o skali R/r.)*

Dowód. Ponieważ $f(0) = 0$, to $f(z) = zg(z)$ dla pewnej holomorficznej funkcji $g : D \to \mathbb{C}$. Przy tym, dla $r' < r$ jest $|g(z)| \leq R/r'$ gdy $|z| = r'$ (bo $|f(z)| < R$), więc z zasady maksimum wynika, że $|g(z)| \leq R/r'$ dla $z \in D(0,r')$, a z dowolności r' – że $|g| \leq R/r$. Wraz z równościami $f'(0) = g(0)$ i $f(z) = zg(z)$ dowodzi to pierwszej części tezy. Druga zaś część wynika stąd, że jeśli $|f'(0)| = R/r$ lub $|f(z_0)| = (R/r)|z_0|$ dla pewnego $z_0 \in D(0,r)$, to funkcja $|g|$ osiąga w zerze lub w z_0 swe maksimum, wobec czego g jest stała – co oznacza, że $f(z) = kz$ dla k będącego jej wartością. □

Dla $p \in D = D(0,1)$ rozważmy **przekształcenie Blaschkego** $b_p : \widetilde{\mathbb{C}} \to \widetilde{\mathbb{C}}$ dane wzorem

$$b_p(z) = \frac{z-p}{1-\overline{p}z} \tag{20}$$

Wówczas:

a) b_p jest homografią z biegunem w punkcie $1/\overline{p} \notin D$.

b) $b_p(D) \subset D$ na podstawie zadania 7 w §I.6.

c) $b_{-p} \circ b_p$ =identyczność, skąd i z b) wynika, że przekształcenie $b_{p|D} : D \to D$ jest biholomorficzne. Poniżej obcięcie $b_{p|D}$ oznaczamy nadal przez b_p.

Wniosek 1. *Każde przekształcenie biholomorficzne $f : D \to D$ jest postaci $z \mapsto k \cdot b_p(z)$, dla pewnych $p \in D$ i $k \in \partial D$. W szczególności, gdy ponadto $f(0) = 0$, to f jest obrotem: $f = k \cdot id_D$, gdzie $|k| = 1$.*

Dowód. Niech wpierw $f(0) = 0$. Z lematu Schwarza wynika, że wtedy $|f(z)| \leq |z|$ dla $z \in D$. Tak samo $|f^{-1}(z)| \leq |z|$ i wobec tego $|f(z)| = |z|$ dla $z \in D$. Z końcowej części lematu Schwarza wnosimy więc, że f jest obrotem wokół 0.

W ogólnym przypadku niech $p = f^{-1}(0)$ i $g = f \circ b_p^{-1}$. Ponieważ $b_p(p) = 0$, więc $g(0) = 0$. Wobec tego g jest obrotem wokół 0 i $f = g \circ b_p = k \cdot b_p$, dla pewnego $k \in \partial D$. □

Ćwiczenie. Niech funkcja $f \in H(D)$, gdzie $D = D(0,1)$, spełnia warunek $f(0) = ... = f^{(n-1)}(0) = 0$. Dowieść, że jeśli $f(D) \subset D$, to $|f^{(n)}(0)| \leq 1$ i $|f(z)| \leq |z|^n \, \forall z \in D$; ponadto, albo nierówności te są ostre, albo $f(z) = kz^n \, \forall z \in D$, gdzie $|k| = 1$.

Ćwiczenie. Niech funkcja $f \in H(D)$ spełnia warunki $f(D) \subset D$ i $f(p) = 0$, gdzie $p \in D$.

a) Dowieść, że $f = b_p \cdot g$, gdzie nadal $g \in H(D)$ i $g(D) \subset D$. (Wskazówka: modyfikować dowód lematu Schwarza zauważając, że $b_p(\partial D) \subset \partial D$.)

b) Wywnioskować, że gdy $p_1, ..., p_n \in f^{-1}(0)$ są różne, to $|f(z)| \leq \prod_{i=1}^{n} |b_{p_i}(z)|$ dla $z \in D$.

* Dodatek 1: Informacja o geometrii hiperbolicznej (zadania).

Zadanie 1. Składając przekształcenie holomorficzne $f : D \to D$ z obu stron z odpowiednimi przekształceniami Blaschkego dowieść, że:

a) $\delta(f(p), f(q)) \leq \delta(p, q)$ dla wszystkich $p, q \in D$, gdzie $\delta(p, q) \stackrel{def}{=} |b_p(q)| = \frac{|p \, - \, q|}{| \, 1 \, - \, \overline{p} \; q \, |}$.

b) $|f'(p)| \leq (1 - |f(p)|^2)/(1 - |p|^2)$ dla wszystkich $p \in D$.

c) Jeśli w a) (lub w b)) w miejsce nierówności $\leq$ zachodzi równość dla pewnych $p \neq q$ (odp. dla pewnego p), to przekształcenie f jest biholomorficzne. Odwrotnie, gdy jest ono biholomorficzne, to obie strony nierówności są równe jako funkcje.

Choć powyższa funkcja δ nie spełnia nierówności trójkąta, to może ona posłużyć do wyznaczenia tzw. **metryki hiperbolicznej** na dysku D, przekształcającej D w tzw. **model Poincaré'go płaszczyzny Bolayia–Łobaczewskiego**.

Zadanie 2. a) Dowieść, że funkcja $d \stackrel{def}{=} \ln(\frac{1+\delta}{1-\delta})$ jest metryką na dysku D. (Wskazówka: sprowadzić nierówność trójkąta do nierówności $\frac{1+|p|}{1-|p|} \cdot \frac{1+|q|}{1-|q|} \geq \frac{1+\delta(p,q)}{1-\delta(p,q)}$ dla $p, q \in D$, a tę do jednej z nierówności rozpatrywanych w zadaniu z §I.1.)

b) Gdy dysk D rozpatrywać z metryką d, to każde przekształcenie holomorficzne $D \to D$ spełnia warunek Lipschitza ze stałą 1. (Jest to **wersja Picka lematu Schwarza**.)

c) Każde koło w metryce d jest zarazem kołem euklidesowym, choć na ogół o innym środku i innym promieniu. (Wskazówka: rozpatrzeć koła o środku w 0 i skorzystać z b).)

d) Nazwijmy **odcinkiem hiperbolicznym** o końcach $p, q \in D$ zbiór $[p, q]_h \stackrel{def}{=} \{z \in D : d(p, z) + d(z, q) = d(p, q)\}$. Dowieść, że bądź $[p, q]_h = [p, q]$ i punkty p i q leżą na wspólnej średnicy dysku D, bądź $[p, q]_h$ jest łukiem okręgu prostopadłego do ∂D, mającym p i q jako swe krańce. (Chodzi oczywiście o łuk zawarty w D, i taki jest jedyny. Wskazówka: przyjąć wpierw $p = 0$, a w przypadku ogólnym skorzystać z tego, że przekształcenie b_p przeprowadza p na 0 i jest homografią, a więc ma własności omówione w §2 i w §I.6.)

Uwaga 1. Skąd bierze się wzór na metrykę d? Otóż gdy d jest jakąkolwiek metryką na dysku D, w której każde przekształcenie biholomorficzne $D \to D$ jest izometrią i która spełnia warunek $\lim_{q \to 0} d(q, 0)/|q| = 1$, to ze wzoru na $|b_p'(p)|$ wynika równość $\lim_{q \to p} \frac{d(p,q)}{|q-p|} = \lim_{q \to p} \frac{d(b_p(q),0)}{|b_p(q)|} \frac{|b_p(q)|}{|q-p|} = \frac{1}{1-|p|^2}$. Uzasadnia to przyjęcie $d(p, q) = \inf_\gamma \int_0^1 \frac{|\gamma'(t)|}{1-|\gamma(t)|^2} \mathrm{d}t$, gdzie γ

przebiega wszystkie drogi w dysku D, łączące p i q. Nietrudny rachunek utwierdza nas w tym, że $d(0,q) = \frac{1}{2}\ln\frac{1+q}{1-q}$ dla $q \in (0,1)$, skąd już –z dokładnością do czynnika $\frac{1}{2}$ –wynika przyjęty w zadaniu wzór, wyznaczający $d(p,q)$. (Uzupełnienie szczegółów pozostawione jest jako zadanie. „Rachunkiem" nazwano sprawdzenie, że gdy użyć zapisu biegunowego $\gamma(t) = r(t)\exp(\mathrm{i}\alpha(t))$, to $\int_0^1 \frac{|\gamma'(t)|}{1-|\gamma(t)|^2}\mathrm{d}t \geq |\int_0^1 \frac{r'(t)}{1-r(t)^2}\mathrm{d}t| = \frac{1}{2}\ln\frac{1+q}{1-q}$, przy czym dla pewnej drogi γ, łączącej 0 z q, zachodzi równość.)

* Dodatek 2: Lematy Blocha–Landaua i Blocha.

Lemat 2 (Blocha–Landaua). *Gdy funkcja h jest holomoficzna w kole domkniętym $\overline{D}(p,r)$, to jej obraz zawiera pewien dysk o promieniu $Lr|h'(p)|$, gdzie $L = 1/24$.*

Dowód. Załóżmy bez zmniejszenia ogólności, że $p = 0$ (inaczej zastąpimy h przez funkcję $z \mapsto h(z-p)$) i że $h'(0) \neq 0$. Dowód oparty jest na następującej obserwacji: jeśli dla wszystkich z z pewnego koła $\overline{D}(z_0, r_0) \subset \overline{D}(0,r)$ spełniona jest nierówność $|h'(z)| \leq 2|h'(z_0)|$, a zatem i $|h'(z) - h'(z_0)| \leq 3|h'(z_0)|$, to dla $z \in \overline{D}(z_0, \frac{1}{6}r_0)$ wynika z lematu Schwarza nierówność $|h'(z) - h'(z_0)| \leq \frac{1}{2}|h'(z_0)|$. Na podstawie zadania 4 w §II.1 i twierdzenia 2 w §V.2, funkcja h jest więc na kole $\overline{D} = \overline{D}(z_0, \frac{1}{6}r_0)$ różnowartościowa i przekształca je na zbiór zawierający koło o promieniu $\frac{1}{12}r_0|h'(z_0)|$. Pozostaje znaleźć z_0 i r_0 tak, by prócz poprzedniego spełniony był warunek $r_0|h'(z_0)| = \frac{1}{2}r|h'(0)|$.

Oto jak E. Landau proponuje wskazać z_0 i r_0. Niech

$$\varphi(z) \overset{def}{=} |h'(z)| \cdot (r - |z|) \text{ dla } z \in \overline{D}(0,r)$$

i niech z_0 będzie jednym z pierwiastków równania $\varphi(z) = r|h'(0)|$, mających największy moduł. (Pierwiastki takie istnieją, bo $\varphi(0) = r|h'(0)|$ i funkcja φ jest ciągła; ponadto $|z_0| < r$, bo $\varphi_{|\partial D(0,r)} = 0$.) Przyjmijmy $r_0 = \frac{1}{2}(r - |z_0|)$. Z przyjętych definicji wnosimy, że $r|h'(0)| = (r - |z_0|)|h'(z_0)| = 2r_0|h'(z_0)|$, a także $\overline{D}(z_0, r_0) \subset \overline{D}(0, r_1)$, gdzie $r_1 \overset{def}{=} r - r_0$. Ponieważ $r_1 \in (|z_0|, r)$, więc $r|h'(0)| > \varphi(z) = |h'(z)|(r - r_1)$ dla $z \in \partial D(0, r_1)$. Wykorzystując zasadę maksimum otrzymujemy żądaną nierówność:

$$\|h'\|_{D(z_0,r_0)} \leq \|h'\|_{D(0,r_1)} = \|h'\|_{\partial D(0,r_1)} \leq r|h'(0)|/(r - r_1) = r|h'(0)|/r_0 = 2|h'(z_0)|. \quad \Box$$

Uwaga 2. a) „Lemat Blocha–Landaua" był przez Blocha (który pierwszy go sformułował i dowiódł) przypisany Landauowi, zaś przez Landaua – Blochowi. Powyższy dowód dał w zasadzie Landau; pokazuje on zarazem, że na pewnym dysku o promieniu $Br|h'(p)|$ określona jest dla $B = 1/24$ gałąź funkcji h^{-1} (bo jest nią $(h_{|\overline{D}})^{-1}$). Takie wzmocnienie lematu Blocha–Landaua należy jednak do Blocha, którego dowód był znacznie dłuższy. W lematach Blocha–Landaua i Blocha można liczby $L = 1/24$ czy $B = 1/24$ zastąpić przez większe; lecz przez jak duże – nie wiadomo dokładnie, choć znane są dość wąskie szacunki: istnieją największe stałe L_0 i B_0, z błędem ≤ 0.03 przybliżane przez 0.53 i 0.45, odpowiednio. (Cytuję za książką .....)

b) Nie należy sądzić, że środkiem dysku, o którym mowa w tezie, może być punkt $h(p)$, jeśli stała L jest odpowiednia. Gdy bowiem $h(z) = \varepsilon e^{z/\varepsilon} + 1 - \varepsilon$, to zbiór $h(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \setminus \{1 - \varepsilon\}$ nie zawiera dysku o środku w $h(0) = 1$ i promieniu ε – choć zawiera dyski o dowolnie dużych promieniach, w zgodzie z lematem.

3 Przykłady biholomorficznych przekształceń na dysk.

Definicja. Zbiory otwarte $U, V \subset \mathbb{C}$ nazywamy **holomorficznie równoważnymi**, jeśli istnieje biholomorficzne przekształcenie jednego z nich na drugi.

Przykłady obszarów holomorficznie równoważnych z dyskiem omawiane były na ćwiczeniach. Obejmują one: półpłaszczyzny, soczewki właściwe (w tym półkola i kąty), pasy i półpasy, przecięcia kątów z dyskiem zatoczonym z wierzchołka kąta, elipsy pełne, płaszczyzny z usuniętymi rozłącznymi dwiema półprostymi. Biholomorficzne przekształcenie każdego z tych zbiorów na dysk lub półpłaszczyznę można jawnie wskazać, wykorzystując omawiane w §I.6 własności homografii, funkcji wykładniczej i funkcji trygonometrycznych. Przypomnijmy pokrótce, jak takie przekształcenia budować.

Nazwijmy **dyskiem w** $\widetilde{\mathbb{C}}$ każdą z dwóch składowych zbioru $\widetilde{\mathbb{C}} \setminus T$, gdzie T jest okręgiem w $\widetilde{\mathbb{C}}$. **Soczewką** w $\widetilde{\mathbb{C}}$ nazwiemy niepusty zbiór, będący częścią wspólną dwóch dysków w $\widetilde{\mathbb{C}}$, których brzegi się przecinają. Jeśli dyski te są półpłaszczyznami, to soczewka jest **pasem** (gdy brzegi półpłaszczyzn są równoległe) lub kątem (gdy nie są). Soczewka S jest **właściwa**, gdy ∞ nie leży w jej domknięciu.

1) <u>Przekształcenie soczewki właściwej na pas lub kąt.</u> Rozważana soczewka S jest przecięciem dwóch dysków, których brzegi oznaczymy T_1 i T_2. Obierzmy punkt $p \in T_1 \cap T_2$ i przeprowadźmy go homografią $h(z) = 1/(z - p)$ na ∞. Ponieważ okręgi uogólnione $h(T_1)$ i $h(T_2)$ przechodzą przez ∞, więc są one prostymi, zaś $h(S)$ jest kątem lub pasem. Zauważmy, że $h(S) \subset \mathbb{C}$, gdyż $h^{-1}(\infty) = p \notin S$.

2) <u>Przekształcenie pasa lub kąta na półpłaszczyznę.</u> Kąt łatwo jest przeprowadzić na zbiór $K = \{z : 0 < \operatorname{Arg}(z) < \alpha\}$, gdzie $0 < \alpha \le 2\pi$, a ten gałęzią funkcji $z \mapsto z^{\pi/\alpha}$ na półpłaszczyznę $\Pi_+ = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$. (Gałąź ta na K istnieje, bo $K \cap [0, \infty) = \emptyset$, a na $\mathbb{C} \setminus [0, \infty)$ określona jest gałąź logarytmu.) Natomiast pas przeprowadźmy funkcją liniową na pas poziomy $\{z : 0 < \operatorname{Im} z < \alpha\}$, gdzie $\alpha \le 2\pi$, a ten funkcją exp na kąt $\{z : 0 < \operatorname{Arg} z < \alpha\}$. Gdy zadbać o to, by $\alpha = \pi$, to w obrazie otrzymamy półpłaszczyznę Π_+; gdy zaś $\alpha = 2\pi$, to otrzymamy kąt pełny $\mathbb{C} \setminus [0, \infty)_{\mathbb{R}}$.

3) <u>Przekształcenie wycinka koła lub półpasa.</u> „Półpas" $\{z : 0 < \operatorname{Im} z < \alpha, \operatorname{Re} z < c\}$ przy przekształceniu exp przejdzie na wycinek koła $\{z : |z| < e^c, 0 < \operatorname{Arg} z < \alpha\}$, a ten z kolei funkcją $z \mapsto z^{\pi/\alpha}$ przeprowadzić możemy na półkole (a wiec na soczewkę).

4) <u>Przekształcenie półpłaszczyzny na dysk.</u> Gdy półpłaszczyzną jest $\Pi_+ = \{z : \operatorname{Im}(z) > 0\}$, zaś dyskiem – $D(0, 1)$, to przekształcenie możemy zadać dowolnym ze wzorów opisanych w zadaniu 8 w §I.6.C, np. $f(z) = (z - i)/(z + i)$.

5)* Przekształcenie płaszczyzny z wyjętymi współliniowymi półprostymi. Z §I.6.A wiemy, że zbiór $\mathbb{C}\setminus(L_1 \cup L_2)$, gdzie $L_1 = [1, \infty)_{\mathbb{R}}$ i $L_2 = (-\infty, -1]_{\mathbb{R}}$, jest obrazem pasa $V_0 = \{z : 0 < \operatorname{Re} z < \pi\}$ przy przekształceniu cos, a także –na podstawie zadania w §I.1 i §I.7–jest obrazem półpłaszczyzny Π_+ przy przekształceniu $u(z) = \frac{1}{2}(z + z^{-1})$. Przekształcenia $u_{|\Pi_+}$ i $\cos_{|V_0}$ i są różnowartościowe, a przekształcenia do nich odwrotne, przekształcające $\mathbb{C} \setminus (L_1 \cup L_2)$ na Π_+ czy V_0, można zadać wzorami $w \mapsto w + \sqrt{w^2 - 1}$ i $w \mapsto -\mathrm{i}\operatorname{Log}(w + \sqrt{w^2 - 1})$, odpowiednio. (Wzorom tym umiemy nadać sens, bo $w^2 - 1 \notin [0, \infty)_{\mathbb{R}}$ dla $w \notin L_1 \cup L_2$.)

Każdy z powyższych zbiorów możemy na inny z nich przeprowadzić złożeniem opisanych przekształceń lub ich odwrotności.

4 Twierdzenie Riemanna o holomorficznej równoważności płaskich obszarów jednospójnych.

Dowiedziemy obecnie, że wiele wcześniej rozpatrywanych własności obszaru jest równoważnych temu, by był on jednospójny. Są one też równoważne własności oznaczonej niżej literą R, po raz pierwszy rozważanej przez Riemanna.

Twierdzenie 1. *Gdy U jest niepustym obszarem w $\mathbb{C}$, różnym od $\mathbb{C}$, to równoważne są warunki:*

a) obszar U jest jednospójny;

b) $\int_\gamma f = 0$ dla każdej funkcji $f \in H(U)$ i każdej kawałkami gładkiej pętli γ w U;

c) każda funkcja $f \in H(U)$ ma funkcję pierwotną;

d) każda funkcja holomorficzna $f : U \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ma gałąź logarytmu;

e) każda funkcja holomorficzna $f : U \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ma gałąź argumentu;

f) każda funkcja holomorficzna $f : U \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ma dla każdego $w \in \mathbb{C}$ gałąź swej w–tej potęgi;

g) każda różnowartościowa funkcja holomorficzna $f : U \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ma gałąź pierwiastka kwadratowego;

R) istnieje biholomorficzne przekształcenie obszaru U na dysk $D = \{z : |z| < 1\}$.

Implikacje $d) \Leftrightarrow e)$ i $a) \Rightarrow b) \Rightarrow c) \Rightarrow d) \Rightarrow f) \Rightarrow g)$ bądź są oczywiste, jak ostatnia z nich, bądź zostały omówione wcześniej (odpowiednio w §§I.7, III.1, II.2, III.2, I,7). Implikacja $R) \Rightarrow a)$ wynika stąd, że jednospójność jest zachowywana przez homeomorfizmy, zaś dysk D jest jednospójny. Natomiast to, że jakikolwiek z warunków a)–g) implikuje R), nazywane jest na ogół twierdzeniem Riemanna o przekształceniach biholomorficznych. Najczęściej, nazwę tą odnosi się do implikacji $a) \Rightarrow R)$. Poniżej twierdzenie udowodnimy wykazując, że $g) \Rightarrow R)$, w oparciu o następujący

Lemat 1 (zasadniczy)**.** *Niech punkt $p \in U$ i przekształcenie biholomorficzne $f : U \to f(U) \subset D$ spełnia warunek $f(p) = 0$. Jeśli $f(U) \neq D$ i zachodzi g), to istnieje przekształ-*

cenie biholomorficzne $f_1 : U \to f_1(U) \subset D$ *takie, że*

$$f_1(p) = 0 \quad i \quad |f_1'(p)| > |f'(p)|. \tag{21}$$

Dowód. * Obierzmy punkt $q \in D \setminus f(U)$ i homografię h_0, przeprowadzającą D na D i q na 0. (Można za h_0 przyjąć przekształcenie Blaschkego b_q, patrz przykład w §2.) Wtedy $0 \notin h_0 \circ f(U)$ i z założenia istnieje gałąź f_0 pierwiastka kwadratowego z $h_0 \circ f$. Inaczej mówiąc,

$$F \circ f_0 = h_0 \circ f, \quad \text{gdzie } F(z) = z^2 \text{ dla } z \in D \tag{22}$$

Niech h_1 będzie homografią, przeprowadzającą D na D, zaś $f_0(p)$ na 0. Z (22) wynika, że

$$f = G \circ f_1, \quad \text{gdzie } f_1 := h_1 \circ f_0 \ \text{ i } \ G := h_0^{-1} \circ F \circ h_1^{-1}.$$

Ponieważ $f(p) = 0 = f_1(p)$, więc $G(0) = 0$. Ponadto, przekształcenie G przeprowadza D w D (bo czynią to h_0^{-1}, h_1^{-1} i F), lecz nie jest różnowartościowe (gdyż F nie jest i $h_1^{-1}(D) = D$). Nie jest więc ono obrotem i z lematu Schwarza wynika, że $|G'(0)| < 1$. Stąd $|f'(p)| = |G'(0)||f_1'(p)| < |f_1'(p)|$. □

W dowodzie milcząco wykorzystaliśmy to, że gałąź pierwiastka funkcji biholomorficznej też jest taką funkcją (i dlatego jest nią f_0, a przez to i f_1). Wykorzystamy to też niżej, wraz z tym, że obraz przekształcenia biholomorficznego jest zbiorem otwartym.

* Dowód implikacji $g) \Rightarrow R)$ w twierdzeniu. Podzielimy go na 4 części.

1. Przeprowadzimy obszar U biholomorficznie na taki, który nie jest gęsty w $\mathbb{C}$.

W tym celu niech $q \in \mathbb{C} \setminus U$ i niech f będzie gałęzią pierwiastka kwadratowego z funkcji $\mathrm{id}_U - q$. Zbiór $V = f(U)$ jest otwarty i wobec tego zbiór $-V = \{-v : v \in V\}$ –też. Pozostaje zauważyć, że $V \cap (-V) = \emptyset$. Jeśliby jednak $f(a) = -f(b)$ dla pewnych $a, b \in U$, to $a - q = (f(a))^2 = (f(b))^2 = b - q$, skąd $a = b$ i $f(a) = -f(a)$. Jest to niemożliwe, bo wówczas $0 = (f(a))^2 = a - q$, wbrew temu, że $q \notin U$ i $a \in U$.

2. Ustalmy punkt $p \in U$ i oznaczmy przez $\mathcal{F}$ zbiór wszystkich różnowartościowych przekształceń $f \in H(U)$, dla których $f(p) = 0$ i $f(U) \subset D$. Jest on niepusty, bo do $\mathcal{F}$ należy złożenie $h \circ f_0$ dowolnego różnowartościwego przekształcenia $f_0 \in H(U)$, którego obraz jest rozłączny z pewnym dyskiem D_0 (patrz wyżej), z homografią h, przeprowadzającą D_0 na $\widetilde{\mathbb{C}} \setminus \overline{D}$, a $f_0(p)$ na 0. Przyjmujemy

$$M := \sup\{|f'(p)| : f \in \mathcal{F}\} \in [0, \infty]$$

3. Z uwagi 1 i) w §1 wynika, że $M > 0$. Ponadto, $M = |f'(p)|$ dla pewnego $f \in \mathcal{F}$. Istotnie, istnieją $f_1, f_2, \dots \in \mathcal{F}$ dla których $\lim_{n\to\infty} |f_n'(p)| = M$. Na mocy twierdzeń Montela–Osgooda–Stieltjesa i Weierstrassa, można z ciągu (f_n) wybrać podciąg zbieżny

niemal jednostajnie do funkcji $f \in H(U)$ takiej, że $|f'(p)| = M$. Stąd $f'(p) \neq 0$ i funkcja f, nie będąc stałą, przekształca obszar U biholomorficznie na zbiór otwarty $f(U)$. (Korzystamy z uwag 1 i 2 w §1.) A że zbiór ten jest zawarty w $\overline{D}$, to jest zawarty i w $\mathrm{Int}(\overline{D}) = D$.

4. Jeśliby $f(U) \neq D$, to z lematu wynikałoby istnienie przekształcenie $f_1 \in \mathcal{F}$ takiego, że $|f_1'(p)| > |f'(p)| = M$, wbrew definicji liczby M. Zatem $f(U) = D$ i f jest szukanym przekształceniem. (Jest ono biholomorficzne, bo należy do $\mathcal{F}$.) $\square$

Uwaga 1. Płaszczyzna $\mathbb{C}$ nie jest holomorficznie równoważna z dyskiem D, bo każda funkcja holomorficzna $\mathbb{C} \to D$ jest stała (co wynika z twierdzenia Liouville'a).

Uwaga 2. * Dowiedliśmy zarazem, że jeśli warunek R) jest spełniony, to pewne przekształcenie biholomorficzne $f_p : U \to D$ przeprowadza dany punkt $p \in U$ na 0. Każde inne przekształcenie o tych własnościach jest postaci $k \cdot f_p$, gdzie $|k| = 1$ (bo jego złożenie z f_p^{-1} biholomorficznie przeprowadza dysk D na D, a 0 na 0; patrz wniosek 1 w §2).