1 Przykłady biholomorficznych przekształceń na dysk.

Definicja. Niech zbiory $U, V \subset \mathbb{C}$ będą otwarte. Przekształcenie $f : U \to V$ nazywamy **biholomorficznym**, jeśli jest ono bijektywne i zarówno f, jak i f^{-1} są holomorficzne. Gdy takie przekształcenie istnieje, zbiory nazywamy **holomorficznie równoważnymi**.

Przykłady obszarów holomorficznie równoważnych z dyskiem omawiane były na ćwiczeniach. Obejmują one: półpłaszczyzny, soczewki właściwe (w tym półkola i kąty), pasy i półpasy, przecięcia kątów z dyskiem zatoczonym z wierzchołka kąta, elipsy pełne, płaszczyzny z usuniętymi rozłącznymi dwiema półprostymi. Biholomorficzne przekształcenie każdego z tych zbiorów na dysk lub półpłaszczyznę można jawnie wskazać, wykorzystując omawiane w §I.6 własności homografii, funkcji wykładniczej i funkcji trygonometrycznych. Przypomnijmy pokrótce, jak takie przekształcenia budować.

Nazwijmy **dyskiem w** $\widetilde{\mathbb{C}}$ każdą z dwóch składowych zbioru $\widetilde{\mathbb{C}} \setminus T$, gdzie T jest okręgiem w $\widetilde{\mathbb{C}}$. **Soczewką** w $\widetilde{\mathbb{C}}$ nazwiemy niepusty zbiór, będący częścią wspólną dwóch dysków w $\widetilde{\mathbb{C}}$, których brzegi się przecinają. Jeśli dyski te są półpłaszczyznami, to soczewka jest **pasem** (gdy brzegi półpłaszczyzn są równoległe) lub kątem (gdy nie są). Soczewka S jest **właściwa**, gdy ∞ nie leży w jej domknięciu.

1) Przekształcenie soczewki właściwej na pas lub kąt. Rozważana soczewka S jest przecięciem dwóch dysków, których brzegi oznaczymy T_1 i T_2. Obierzmy punkt $p \in T_1 \cap T_2$ i przeprowadźmy go homografią $h(z) = 1/(z-p)$ na ∞. Ponieważ okręgi uogólnione $h(T_1)$ i $h(T_2)$ przechodzą przez ∞, więc są one prostymi, zaś $h(S)$ jest kątem lub pasem. Zauważmy, że $h(S) \subset \mathbb{C}$, gdyż $h^{-1}(\infty) = p \notin S$.

2) Przekształcenie pasa lub kąta na półpłaszczyznę. Kąt łatwo jest przeprowadzić na zbiór $K = \{z : 0 < \operatorname{Arg}(z) < \alpha\}$, gdzie $0 < \alpha \le 2\pi$, a ten gałęzią funkcji $z \mapsto z^{\pi/\alpha}$ na półpłaszczyznę $\Pi_+ = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$. (Gałąź ta na K istnieje, bo $K \cap [0,\infty) = \emptyset$, a na $\mathbb{C} \setminus [0,\infty)$ określona jest gałąź logarytmu.) Natomiast pas przeprowadźmy funkcją liniową na pas poziomy $\{z : 0 < \operatorname{Im} z < \alpha\}$, gdzie $\alpha \le 2\pi$, a ten funkcją exp na kąt $\{z : 0 < \operatorname{Arg} z < \alpha\}$. Gdy zadbać o to, by $\alpha = \pi$, to w obrazie otrzymamy półpłaszczyznę Π_+; gdy zaś $\alpha = 2\pi$, to otrzymamy kąt pełny $\mathbb{C} \setminus [0,\infty)_{\mathbb{R}}$.

3) Przekształcenie wycinka koła lub półpasa. „Półpas" $\{z : 0 < \operatorname{Im} z < \alpha, \operatorname{Re} z < c\}$ przy przekształceniu exp przejdzie na wycinek koła $\{z : |z| < \mathrm{e}^c, 0 < \operatorname{Arg} z < \alpha\}$, a ten z kolei funkcją $z \mapsto z^{\pi/\alpha}$ przeprowadzić możemy na półkole (a wiec na soczewkę).

4) Przekształcenie półpłaszczyzny na dysk. Gdy półpłaszczyzną jest $\Pi_+ = \{z : \operatorname{Im}(z) > 0\}$, zaś dyskiem – $D(0,1)$, to przekształcenie możemy zadać dowolnym ze wzorów opisanych w zadaniu 8 w §I.6.C, np. $f(z) = (z-\mathrm{i})/(z+\mathrm{i})$.

5)* Przekształcenie płaszczyzny z wyjętymi współliniowymi półprostymi. Z §I.6.A wiemy, że zbiór $\mathbb{C} \setminus (L_1 \cup L_2)$, gdzie $L_1 = [1,\infty)_{\mathbb{R}}$ i $L_2 = (-\infty,-1]_{\mathbb{R}}$, jest obrazem pasa $V_0 = \{z : 0 < \operatorname{Re} z < \pi\}$ przy przekształceniu cos, a także –na podstawie zadania w §I.1 i §I.7–jest obrazem półpłaszczyzny Π_+ przy przekształceniu $u(z) = \frac{1}{2}(z + z^{-1})$. Przekształcenia $u_{|\Pi_+}$ i $\cos_{|V_0}$

i są różnowartościowe, a przekształcenia do nich odwrotne, przekształcające $\mathbb{C} \setminus (L_1 \cup L_2)$ na Π_+ czy V_0, można zadać wzorami $w \mapsto w + \sqrt{w^2 - 1}$ i $w \mapsto -\mathrm{i}\,\mathrm{Log}(w + \sqrt{w^2 - 1})$, odpowiednio. (Wzorom tym umiemy nadać sens, bo $w^2 - 1 \notin [0, \infty)_{\mathbb{R}}$ dla $w \notin L_1 \cup L_2$.)

Każdy z powyższych zbiorów możemy na inny z nich przeprowadzić złożeniem opisanych przekształceń lub ich odwrotności.