Notatki te odpowiadają, z niewielkimi zmianami, wykładowi prowadzonemu przeze mnie w semestrach jesiennych 2003 i 2004r. Mogą one ułatwić zrozumienie wykładu, lecz z konieczności nie są wyczerpujące. Głębsze omówienie poruszanych zagadnień można znaleźć w podręcznikach wymienionych niżej. Zapisaniem w TeXu dużej części notatek zajął się Pan Wojciech Bagiński.

Materiał bądź to nieco trudniejszy i wykraczający poza minimum, zakreślone programem, bądź to mniej w dalszej części wykorzystywany, oznaczono gwiazdką *; tylko niewielką jego część omówiono na wykładzie. Znak $\Box$ oznacza koniec rozumowania czy (gdy rozumowanie jest zbędne) koniec sformułowania. Znak $\boxminus$ ma podobne znaczenie, ale używany jest wtedy, gdy pewne fragmenty rozumowania są pozostawione czytelnikowi.

„Zadaniami" nazwano wybrane lematy, których dowód jest na tyle prosty, że z pożytkiem może być znaleziony przez czytelnika, podczas gdy podawanie go zaciemniłoby tylko układ materiału; zadania z gwiazdką grają te sama rolę w odniesieniu do materiału uzupełniającego. Nie zastępują więc one tych, które rozwiązywane były na ćwiczeniach lub które można znaleźć w znanych zbiorach (np. prof. J. Krzyża).

Niektóre podręczniki w języku polskim:

J. Chądzyński, Wstęp do analizy zespolonej.
F. Leja Teoria funkcji analitycznych.
F. Leja, Funkcje analityczne i harmoniczne.[1]
K. Maurin, Analiza (w szczególności rozdział XVI).
W. Rudin, Analiza rzeczywista i zespolona.
S. Saks, A. Zygmund, Funkcje analityczne.[1]
B.W. Szabat, Analiza zespolona.

[1]Plik .pdf osiągalny pod http://matwbn.icm.edu.pl/ksspis.php?wyd=10

I PRZENIESIENIE NA PRZYPADEK ZESPOLONY WSTĘPNYCH POJĘĆ ANALIZY

1 Liczby zespolone (przypomnienie).

Element (x, y) płaszczyzny $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ oznaczamy przez $x + y\mathrm{i}$. Wprowadzamy następujące działania:

$$(x + y\mathrm{i}) \pm (x' + y'\mathrm{i}) \stackrel{def}{=} (x + x') \pm (y + y')\mathrm{i}$$
$$(x + y\mathrm{i})(x' + y'\mathrm{i}) \stackrel{def}{=} (xx' - yy') + (xy' + x'y)\mathrm{i}.$$

Odpowiadają one działaniom na wyrażeniach algebraicznych gdy przyjąć, że $\mathrm{i}^2 = -1$. Zamiast $x + y\mathrm{i}$ możemy pisać x jeśli $y = 0$, zaś $y\mathrm{i}$ jeśli $x = 0$. Przy tych umowach dotyczących zapisu i działań, zbiór $\mathbb{R}^2$ oznaczamy przez $\mathbb{C}$, a jego elementy nazywamy *liczbami zespolonymi.* (Możemy je też nazywać wektorami lub punktami, zależnie od tego, czy $\mathbb{R}^2$ interpretujemy jako przestrzeń wektorową czy afiniczną.)

Liczbę $x - y\mathrm{i}$ nazywamy *liczbą sprzężoną* do liczby $z = x + y\mathrm{i} \in \mathbb{C}$ i oznaczamy $\overline{z}$. Ponieważ

$$z\overline{z} = |z|^2, \quad \text{gdzie } \ |z| \stackrel{def}{=} \sqrt{x^2 + y^2} \in [0, \infty) \text{ jest } \textit{modułem} \text{ liczby } z,$$

więc $\frac{1}{|z|^2}\overline{z}$ jest odwrotnością liczby $z \neq 0$. Stąd już wynika łatwo, że $\mathbb{C}$ jest ciałem. (Nieco kłopotu sprawia łączność mnożenia – jak jej dowieść?) Dla $z = x + yi$ przyjmujemy

$$\mathrm{Re}(z) \stackrel{def}{=} x = \frac{z + \overline{z}}{2}, \quad \mathrm{Im}(z) \stackrel{def}{=} y = \frac{z - \overline{z}}{2\mathrm{i}}.$$

Są to *część rzeczywista* i *część urojona* liczby z. (Częścią urojoną „czysto urojonej” liczby i nie jest więc i, lecz 1.)

Dzięki utożsamieniu każdej liczby $x \in \mathbb{R}$ z liczbą $x + 0\mathrm{i}$, możemy $\mathbb{R}$ traktować jako podzbiór (i podciało) ciała $\mathbb{C}$. Przedział $\{x + 0i : x \leq a\} \subset \mathbb{C}$, gdzie $a \in \mathbb{R}$, będziemy jednak oznaczać $(-\infty, a]_{\mathbb{R}}$, a nie $(-\infty, a]$, i podobnie wprowadzamy oznaczenia $[a, \infty)_{\mathbb{R}}$, $(-\infty, a)_{\mathbb{R}}$ i $(a, \infty)_{\mathbb{R}}$. Ta drobiazgowość spowodowana jest tym, że dołączymy niebawem do $\mathbb{C}$ punkt ∞, ale nie punkt $-\infty$; ponadto, analogiczne przedziały nie będą wprowadzane gdy $\mathrm{Im}(a) \neq 0$. (W $\mathbb{C}$ nie definiujemy bowiem relacji nierówności poza tymi, które dotyczą liczb rzeczywistych – czyli leżących na osi $\mathrm{Im}\, z = 0$.) Dla $a, b \in \mathbb{C}$ możemy jednak rozważać *odcinek domknięty* $[a, b] = \{tb + (1 - t)a : 0 \leq t \leq 1\}$ i analogiczne odcinki otwarte z jednej czy z obu stron.

Punkt $z = x + y\mathrm{i}$ płaszczyzny $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ można też zapisać w postaci biegunowej:

$$z = |z|(\cos(\alpha) + \mathrm{i}\sin(\alpha)), \quad \text{gdzie } \alpha \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

(Dlaczego?) Piszemy:

$\alpha = \arg(z)$, gdy zachodzi (1),

$\alpha = \mathrm{Arg}(z)$, gdy zachodzi (1) i $\alpha \in [0, 2\pi)$.

Liczbę α nazywamy *argumentem* liczby z, jeśli $\alpha = \arg(z)$, zaś *argumentem głównym*, jeśli $\alpha = \mathrm{Arg}(z)$. Dla $z \neq 0$ główny argument $\mathrm{Arg}(z)$ jest jedyny, zaś każdy inny różni się od niego o całkowitą wielokrotność liczby 2π.

Zapiszmy najważniejsze własności modułu, sprzężenia i argumentu:

1. $|\mathrm{Re}(z)| \leqslant |z|, \quad |\mathrm{Im}(z)| \leqslant |z|, \quad |\overline{z}| = |z|$
2. $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}, \quad \overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$
3. $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$
4. $\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$, $\arg(z_1/z_2) = \arg(z_1) - \arg(z_2)$ gdy $z_2 \neq 0$ (Oznacza to: gdy $\alpha_i = \arg(z_i)$ dla $i = 1, 2$, to $\alpha_1 + a_2$ jest argumentem liczby $z_1 z_2$, zaś gdy ponadto $z_2 \neq 0$, to $\alpha_1 - \alpha_2$ jest argumentem liczby z_1/z_2.)
5. $|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\,\mathrm{Re}(z_1 \overline{z_2}) = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\,\mathrm{Re}(\overline{z_1} z_2)$
6. $|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$ i równość ma miejsce $\Leftrightarrow z_1 = 0$ lub $z_2 = t z_1, t \in [0, \infty)_{\mathbb{R}}$

Zadanie. Niech $f(z) = \frac{1}{2}(z + z^{-1})$ dla $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Udowodnić, że funkcja f przekształca w sposób różnowartościowy zbiory $\{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$ i $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\}$ na $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$, zaś zbiór $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) > 0\}$ na $(\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}) \cup (-1, 1)$. (Wskazówka: wyznaczyć obraz $f(\partial X)$ brzegu ∂X rozważanego zbioru X i dowieść, że dla $w \notin f(\partial X)$ równanie $z + z^{-1} = 2w$ ma dwa rozwiązania z_1, z_2; z nich jedno należy do X, bo $z_1 z_2 = 1$.)

Zadanie. * Dowieść, że gdy $|p| = P < 1$ i $|q| = Q < 1$, to $\frac{|P-Q|}{1-PQ} \leq \frac{|p-q|}{|1-\bar{p}q|} \leq \frac{P+Q}{1+PQ}$. (Wskazówka: mnożąc p i q przez liczbę P/p sprowadzić zadanie do przypadku, gdy $p = P$ i $q = Q(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$. Korzystając z 5 wyrazić kwadrat środkowego członu nierówności jako funkcję zmiennej φ i dowieść, że ma ona ekstrema tylko gdy $\sin\varphi = 0$.)

Ważne jest badanie podstawowych przekształceń $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Pewne z nich poznamy później. Na razie odnotujmy (dowód jest pozostawiony jako zadanie):

Stwierdzenie 1. *a) Przekształcenie $z \mapsto \overline{z}$ jest symetrią prostopadłą płaszczyzny względem osi rzeczywistej.*

b) Gdy $a, b \in \mathbb{C}$ i $a \neq 0$, to przekształcenie $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ zadane wzorem $f(z) = az + b$ jest podobieństwem. Ściślej biorąc, jest ono:

i) przesunięciem, gdy $a = 1$,

ii) obrotem wokół 0 *o kąt* $\arg(a)$*, gdy* $|a| = 1$ *i* $b = 0$*,*

iii) jednokładnością o środku w 0 *i skali* $|a|$*, gdy* $a \in \mathbb{R}$ *i* $b = 0$*,*

iv) złożeniem obrotu wokół punktu $z_0 = b/(1-a)$ *o kąt* $\arg(a)$ *i jednokładności o środku w tym punkcie i skali* $|a|$*, gdy* $a \neq 1$. $\boxminus$

Uwaga 1. Powyżej, z_0 jest jedynym punktem stałym przekształcenia f.

Ćwiczenie. Dowieść, że gdy $\operatorname{Re} u < 0$ i $\operatorname{Re} v < 0$, to $|u - v| < |u + \overline{v}|$. (Zaleźć dowód analityczny, oparty na równości 5, i geometryczny, oparty na części a) stwierdzenia.)

Przez *macierz przekształcenia liniowego* $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ będziemy rozumieli macierz tego przekształcenia w standardowej bazie $(1,0),(0,1)$ przestrzeni $\mathbb{R}^2$.

Uwaga 2. Dla $a = p + q$i przekształcenie $z \mapsto az$ wyznacza, po utożsamieniu $\mathbb{C}$ z $\mathbb{R}^2$, przekształcenie liniowe $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, którego macierz jest równa $\left(\begin{smallmatrix} p & -q \\ q & p \end{smallmatrix}\right)$ (bo w kolumnach wpisujemy obrazy wektorów $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) = 1_{\mathbb{C}}$ oraz $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) = \mathrm{i}_{\mathbb{C}}$). Oczywiście, każde $\mathbb{C}$–liniowe przekształcenie $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ jest postaci $z \mapsto az$, gdzie $a \in \mathbb{C}$.

Uwaga 3. Wynika stąd, że nie każde $\mathbb{R}$–liniowe przekształcenie $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ jest $\mathbb{C}$-liniowe. Przykład: funkcja $f(z) = \overline{z}$ nie jest $\mathbb{C}$ – liniowa, bo $f(cz) \neq cf(z)$ gdy $c \notin \mathbb{R}$ i $z \neq 0$. (Jaka jest macierz tego przekształcenia?)

Zadanie. Udowodnić, że każde podobieństwo $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ jest postaci $z \mapsto az + b$ (gdy zachowuje ono orientację płaszczyzny $\mathbb{C}$) lub $z \mapsto a\overline{z} + b$ (gdy zmienia orientację), gdzie $a, b \in \mathbb{C}, a \neq 0$.

Oznaczenia i nazwy. Na płaszczyźnie $\mathbb{C}$ rozważamy „zwykłą” metrykę euklidesową $(z_1, z_2) \mapsto |z_1 - z_2|$ i wyznaczoną przez nią topologię. Otwarty zbiór spójny $U \subset \mathbb{C}$ nazywamy *obszarem.* Przez $D(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$ oznaczamy *koło otwarte* o środku z_0 i promieniu r, zaś przez $\overline{D}(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq r\}$ – odpowiednie *koło domknięte.* Niepuste koło otwarte nazywamy *dyskiem.*

2 Ciągłość i różniczkowalność funkcji zespolonych.

Dla $z, z_1, z_2 \dots \in \mathbb{C}$ piszemy $\lim_{n\to\infty} z_n = z$, gdy $\lim_{n\to\infty}|z_n - z| = 0$ (równoważnie: $\lim_{n\to\infty} \operatorname{Re} z_n = \operatorname{Re} z$ oraz $\lim_{n\to\infty} \operatorname{Im} z_n = \operatorname{Im} z$). Jest to więc ta sama zbieżność ciągu punktów płaszczyzny, którą badamy na Analizie II. Podobnie, dla $U \subset \mathbb{C}$ możemy funkcję $f : U \to \mathbb{C}$ traktować jako funkcję dwóch zmiennych o wartościach w $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$; pozwala to określić, kiedy ta funkcja jest ciągła na całym zbiorze U lub w danym punkcie $z_0 \in U$.

Zadanie. Funkcje $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, określone wzorami $(z_1, z_2) \mapsto z_1 + z_2$ i $(z_1, z_2) \mapsto z_1 z_2$, są ciągłe. Podobnie, ciągłe są funkcje $\mathbb{C} \ni z \mapsto \overline{z} \in \mathbb{C}$ i $\mathbb{C} \setminus \{0\} \ni z \mapsto 1/z \in \mathbb{C}$.

Gdy $t_0 \in (a,b) \subset \mathbb{R}$, to dla funkcji $f:(a,b)\to\mathbb{C}$ przyjmujemy

$$f'(t_0) \stackrel{def}{=} \lim_{t\to t_0}\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0},\quad \text{gdy ta granica istnieje (w przestrzeni } \mathbb{C}).$$

Także dla zbioru otwartego $U\subset\mathbb{C}$, funkcji $f:U\to\mathbb{C}$ i $z_0\in U$:

$$f'(z_0) \stackrel{def}{=} \lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0},\quad \text{gdy ta granica istnieje (w przestrzeni } \mathbb{C}).$$

Mają miejsce zwykłe reguły:

1. $(f\pm g)'(z_0)=f'(z_0)\pm g'(z_0)$, gdy $z_0\in \mathrm{dom}(f)=\mathrm{dom}(g)$,
2. $(fg)'(z_0)=f'(z_0)g(z_0)+f(z_0)g'(z_0)$, gdy $z_0\in \mathrm{dom}(f)=\mathrm{dom}(g)$,
3. $\left(\frac{1}{g}\right)'(z_0)=\frac{-g'(z_0)}{g(z_0)^2}$, gdy $z_0\in\mathrm{dom}(g)$ i $g(z_0)\neq 0$,
4. $(f\circ g)'(z_0)=f'(g(z_0))g'(z_0)$, gdy $z_0\in\mathrm{dom}(g)$ i $\mathrm{im}(g)\subset\mathrm{dom}(f)$.

Oznaczają one: gdy wyrażenia po prawej są zdefiniowane, to wyrażenia po lewej — też i są im równe.

Przypomnijmy, że gdy f traktować jako funkcję dwóch zmiennych rzeczywistych, to jest ona różniczkowalna (w sensie omawianym na Analizie II) w punkcie $z_0\in U$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje przekształcenie liniowe $L:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ spełniające warunek:

$$\lim_{h\to 0}\frac{|f(z_0+h)-f(z_0)-Lh|}{|h|}=0. \tag{*}$$

Przekształcenie L, jeśli istnieje, to jest jedyne. Nazywamy je *pochodną rzeczywistą* funkcji f, w punkcie z_0, i oznaczamy przez $\mathrm{d}f(z_0)$. Jego macierz (oznaczmy ją $[L]$) jest taka:

$$[L]=\begin{pmatrix} u_x(z_0) & u_y(z_0)\\ v_x(z_0) & v_y(z_0)\end{pmatrix},\qquad \text{gdzie } f(z)=(u(z),v(z))\in\mathbb{R}^2 \text{ dla } z\in U. \tag{**}$$

Przypomnijmy też, że warunkiem wystarczającym istnienia pochodnej rzeczywistej $L=\mathrm{d}f(z_0)$ jest istnienie i ciągłość pochodnych cząstkowych u_x,u_y,v_x,v_y w pewnym otoczeniu punktu z_0, zaś warunkiem koniecznym – ich istnienie w punkcie z_0.

Twierdzenie 1. *Dla przekształcenia $f:U\to\mathbb{C}$, gdzie $U\subset\mathbb{C}$ jest zbiorem otwartym, równoważne są warunki:*

a) istnieje pochodna $f'(z_0)$ w punkcie z_0;

b) istnieje pochodna rzeczywista funkcji f w punkcie z_0 i jej macierz jest postaci $\left(\begin{smallmatrix} p & -q\\ q & p\end{smallmatrix}\right)$, gdzie $p,q\in\mathbb{R}$.

Ponadto, gdy warunek b) jest spełniony, to $f'(z_0)=p+q\mathrm{i}$.

Dowód. $b) \implies a)$. Niech przekształcenie liniowe L spełnia warunek (*) i $[L] = \left(\begin{smallmatrix} p & -q \\ q & p \end{smallmatrix}\right)$. Na mocy uwagi 2 w §1 zachodzi $L(h) = (p + q\mathrm{i}) \cdot h$ dla $h \in \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$, wobec czego (*) oznacza, że $\lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} = p + q\mathrm{i}$.

$a) \implies b)$. Przeciwnie, gdy $f'(z_0) = a \in \mathbb{C}$, to biorąc $p = \operatorname{Re} a, q = \operatorname{Im} a$ stwierdzamy, że dla $L(h) \overset{def}{=} (p + q\mathrm{i}) \cdot h$ spełniony jest warunek (*). Istnieje więc pochodna rzeczywista $\mathrm{d}f(z_0)$ i jej macierz jest na mocy uwagi 2 w §1 równa $\left(\begin{smallmatrix} p & -q \\ q & p \end{smallmatrix}\right)$. □

Uwaga 1. Z (**) wynika, że warunek b) jest równoważny następującemu:

b') istnieje pochodna rzeczywista $\mathrm{d}f(z_0)$ i spełnione są *równania Cauchy'ego – Riemanna*:

$$u_x(z_0) = v_y(z_0) \ \text{ i } \ v_x(z_0) = -u_y(z_0).$$

Uwaga 2. Geometrycznie, warunek b) oznacza, że pochodna rzeczywista $\mathrm{d}f(z_0)$ istnieje i jest złożeniem obrotu i jednokładności płaszczyzny, oba o środku w zerze. (Patrz stwierdzenie 1 w §1. Przekształcenie zerowe traktujemy jako jednokładność o skali 0.) ⊟

Zadanie. Niech $f : U \to \mathbb{C}$, gdzie zbiór $U \subset \mathbb{C}$ jest otwarty. Udowodnić, że:

a) Gdy zbiór U jest spójny oraz $f' = 0$, to $f = \text{const}$.

b) Gdy istnieje pochodna $f'(z_0)$, to istnieje i pochodna $g'(\overline{z_0})$ funkcji $g(z) \overset{def}{=} \overline{f(\overline{z})}$.

3 Ciągi i szeregi funkcji zespolonych.

Niech U będzie zbiorem otwartym w $\mathbb{C}$ i niech $f, f_n : U \to \mathbb{C}$, gdzie $n = 1, 2, \ldots$. Przyjmijmy dla $K \subset U$:

$$\|f\|_K = \sup\{|f(z)| : z \in K\}.$$

Zadanie. Dowieść równoważności następujących warunków:

i) Na każdym zbiorze zwartym $K \subset U$, ciąg $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ jest zbieżny jednostajnie do funkcji f (przez co rozumiemy, że $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_K = 0$, dla każdego zbioru K j.w.).

ii) Każdy punkt $z_0 \in U$ posiada otoczenie $D \subset U$, na którym ciąg $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ jest zbieżny jednostajnie do funkcji f.

(Wskazówka: warunki te są równoważne i wtedy, gdy U jest dowolną przestrzenią *lokalnie zwartą* – taką, w której każdy punkt posiada zwarte otoczenie.)

Definicja. Gdy te dwa warunki są spełnione to mówimy, że ciąg $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ jest na zbiorze U *niemal jednostajnie zbieżny* do funkcji f.

Uwaga 1. Granica niemal jednostajnie zbieżnego ciągu $(f_n : U \to \mathbb{C})_{n=1}^{\infty}$ funkcji ciągłych jest funkcją ciągłą. Istotnie, jest tak dla ciągów jednostajnie zbieżnych, wobec czego każdy punkt $z_0 \in U$ ma otoczenie, na którym funkcja graniczna jest ciągła. $\square$

Zajmować nas też będą szeregi funkcyjne $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$, gdzie każda z funkcji f_n jest określona na podzbiorze płaszczyzny $\mathbb{C}$ i przyjmuje wartości zespolone. Powiemy, że szereg taki jest niemal jednostajnie zbieżny (odpowiednio: jednostajnie zbieżny) na danym zbiorze $U \subset \mathbb{C}$, jeśli własność tę ma ciąg funkcji

$$\sigma_n(z) = \sum_{k=0}^{n} f_k(z), \quad z \in U.$$

Uwaga 2. Ma miejsce *kryterium porównawcze Weierstrassa*: jeśli na zbiorze U szereg funkcyjny $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ jest *majoryzowany* przez liczbowy szereg zbieżny $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ (tzn. jeśli dla wszystkich $z \in U$ i $n \geq 0$ spełnione są nierówności $|f_n(z)| \leq c_n$, gdzie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n < \infty$), to szereg $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ jest na U zbieżny jednostajnie. Jeśli więc ponadto funkcje f_n są ciągłe, to i funkcja $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ jest ciągła na U. $\boxminus$

4 Zespolone szeregi potęgowe.

Przez *szereg potęgowy* zmiennej z, *o środku* w z_0 (lub: *wokół* z_0), rozumiemy szereg funkcyjny $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$, gdzie $z_0, c_0, c_1, \ldots \in \mathbb{C}$.

Stwierdzenie 1. *Liczba*

$$R = 1/\overline{\lim}\sqrt[n]{|c_n|} \in [0, \infty]$$

ma następujące własności: gdy $|z-z_0| > R$, to szereg $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ nie jest zbieżny (bo jego wyrazy nie dążą do 0), zaś gdy $0 < r < R$, to szereg $\sum_{n=0}^{\infty}|c_n|r^n$ jest zbieżny i wobec tego szereg $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ jest zbieżny jednostajnie na dysku $|z-z_0| < r$. $\boxminus$

Liczbę R nazywamy *promieniem zbieżności* szeregu $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$.

Uwaga 1. Ze stwierdzenia wynika, że
a) Na dysku $|z-z_0| < R$ szereg $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ zbiega niemal jednostajnie, oraz
b) Jeśli szereg $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ jest zbieżny w punkcie $z = p$, to $|p-z_0| \leq R$.

Stwierdzenie 2 (o różniczkowaniu szeregów potęgowych). *a) Szereg $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ ma ten sam promień zbieżności R, co szereg $\sum_{n=1}^{\infty} nc_n(z-z_0)^{n-1}$.*

b) Na dysku $D = \{z \in \mathbb{C} : |z-z_0| < R\}$ pierwszy szereg jest zbieżny niemal jednostajnie do funkcji f, której pochodna jest sumą drugiego szeregu.

Dowód. Część a) łatwo wynika stąd, że $\lim \sqrt[n]{n+1} = 1$.

Ad b) Możemy założyć, że $z_0 = 0$. Ustalmy punkt $p \in D$; dowiedziemy istnienia pochodnej $f'(p)$ i tego, że $f'(p) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n z^{n-1}$. W tym celu obierzmy $r \in (|p|, R)$ i zauważmy, że gdy $z \in D(0, r) \setminus \{p\}$, to

$$\frac{f(z) - f(p)}{z - p} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \frac{z^n - p^n}{z - p} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n (z^{n-1} + z^{n-2} p + \cdots + p^{n-1}).$$

Z nierówności $|z| < r$ i $|p| < r$ wynika, że ostatni szereg jest majoryzowany przez szereg zbieżny $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n| n r^{n-1}$, a jego suma jest ciągłą funkcją zmiennej $z \in D(0, r)$. (Wykorzystano a) i uwagę 2 w §3.) Stąd granica $\lim_{z \to p} (f(z) - f(p))/(z - p)$ istnieje i jest równa rozważanej sumie dla $z = p$, a tą jest $\sum_{n=1}^{\infty} c_n n p^{n-1}$. $\square$

5 Funkcje holomorficzne i funkcje analityczne (definicje).

Definicja. a) Gdy $U \subset \mathbb{C}$ jest zbiorem otwartym, to funkcję $f : U \to \mathbb{C}$ nazywamy *holomorficzną* , jeśli w każdym punkcie $z_0 \in U$ istnieje pochodna $f'(z_0)$.

b) Gdy $U \subset \mathbb{C}$ jest zbiorem otwartym, to funkcję $f : U \to \mathbb{C}$ nazywamy *analityczną*, jeśli dla każdego punktu $p \in U$ istnieje jego otoczenie $D \subset U$ oraz szereg potęgowy $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$, takie, że $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ dla $z \in D$.

c) Gdy $U \subset \mathbb{C}$ jest dowolnym zbiorem, to funkcję $f : U \to \mathbb{C}$ nazywamy analityczną (odp. holomorficzną), jeśli przedłuża się ona do funkcji analitycznej (odp. holomorficznej) $\widetilde{f} : \widetilde{U} \to \mathbb{C}$, gdzie $\widetilde{U} \subset \mathbb{C}$ jest zbiorem otwartym, zawierającym U.

d) Zbiór wszystkich funkcji holomorficznych $U \to \mathbb{C}$ oznaczamy przez $H(U)$.

Uwaga 1. i) Gdy $\mathrm{dom}(f) \supset U$ i $f_{|U} \in H(U)$, lecz opisanie dziedziny $\mathrm{dom}(f)$ funkcji f nie jest konieczne, to powiemy, że funkcja f jest holomorficzna *w* zbiorze U.

ii) Okaże się później, że w (b) można wziąć $z_0 = p$, na razie jednak nie jest to istotne.

iii)* Jeśli w (b) zastąpić $\mathbb{C}$ przez $\mathbb{R}$ i żądać, by $c_n \in \mathbb{R}$ dla $n = 0, 1 \ldots$, to otrzymamy definicję *funkcji* $\mathbb{R}$*-analitycznej*.

Uwaga 2. Z reguł 1-4 z §2 wynika, że gdy $f, g \in H(U)$, to $f \pm g \in H(U)$ i $f \cdot g \in H(U)$, jak również, że $f/g \in H(U)$ jeśli $0 \notin g(U)$. Podobnie złożenie funkcji holomorficznych, jeśli jest określone, to jest funkcją holomorficzną.

Twierdzenie 1. *Niech promień zbieżności szeregu $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ wynosi R. Wówczas na dysku $D = D(z_0, R)$ szereg ten jest niemal jednostajnie zbieżny do pewnej funkcji holomorficznej $f : D \to \mathbb{C}$. Ponadto,*

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n(z-z_0)^{n-1} \quad dla\ z \in D. \tag{0}$$

Dowód. Ze stwierdzenia 2 w §4 wynika, że dla $r \in [0, R)$ oba szeregi są jednostajnie zbieżne na $D(z_0, r)$ do pewnych funkcji f i g, odpowiednio, przy czym $f' = g$. □

Wniosek 1. *a) Funkcja analityczna jest zarazem funkcją holomorficzną.*
b) Pochodna funkcji analitycznej jest funkcją analityczną.

Obie części wynikają natychmiast z twierdzenia i przyjętych definicji. Prawdziwa jest też znacznie głębsza implikacja przeciwna do wyrażonej w a), czego dowiedziemy w następnym rozdziale.

6 Przykłady ważnych funkcji analitycznych.

A. Funkcja exp i funkcje trygonometryczne.

Promień zbieżności szeregu $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$ jest równy ∞. Zatem suma tego szeregu określa pewną funkcję analityczną $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, oznaczaną przez exp lub przez $z \mapsto \mathrm{e}^z$. Tak samo, istnieją funkcje *cosinus* i *sinus*, wyznaczone dla $z \in \mathbb{C}$ wzorami:

$$\cos(z) = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \ldots, \qquad \sin(z) = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \ldots$$

Z wykładu Analizy I wynika, że dla $z \in \mathbb{R}$ wartości $\mathrm{e}^z, \cos(z)$ i $\sin(z)$ pokrywają się z tam omawianymi. Bez trudu otrzymujemy też *wzory Eulera*

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} = \cos(z) + \mathrm{i}\sin(z), \quad \cos(z) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}\right), \quad \sin(z) = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}\right) \tag{1}$$

Natomiast ze stwierdzenia 2 w §4 wynikają zależności

$$\exp' = \exp, \qquad \sin' = \cos, \qquad \cos' = -\sin. \tag{2}$$

Dalej, dla $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ mamy:

$$\mathrm{e}^{z_1+z_2} = \mathrm{e}^{z_1}\mathrm{e}^{z_2}, \text{ skąd } \mathrm{e}^z \neq 0 \text{ i } \mathrm{e}^{-z} = 1/\mathrm{e}^z \tag{3a}$$

$$\cos(z_1 + z_2) = \cos(z_1)\cos(z_2) - \sin(z_1)\sin(z_2) \tag{3b}$$

$$\sin(z_1 + z_2) = \cos(z_1)\sin(z_2) + \sin(z_1)\cos(z_2) \tag{3c}$$

$$\cos(z) = \sin(z + \frac{\pi}{2}), \ \sin(z) = -\cos(z + \frac{\pi}{2}), \ \cos^2(z) + \sin^2(z) = 1 \tag{3d}$$

Pierwszej z tych czterech równości najłatwiej dowieść tak: pochodna funkcji $z \mapsto \mathrm{e}^{z+z_1}\mathrm{e}^{-z}$ jest na mocy (2) równa 0, więc funkcja ta jest stała i równa swej wartości w zerze, tzn. e^{z_1}. Zatem $\mathrm{e}^{z+z_1} = \mathrm{e}^z\mathrm{e}^{z_1}, \forall z \in \mathbb{C}$. Kolejne dwie tożsamości, których (3d) jest przypadkiem szczególnym, wynikają z (3a) i wzorów Eulera.

Funkcje $\exp, \cos, \sin$ wyrazić można jako funkcje zmiennych $x = \mathrm{Re}(z)$ i $y = \mathrm{Im}(z)$:

$$\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^x(\cos y + \mathrm{i}\sin y), \tag{4a}$$

$$\cos z = \cos x \,\mathrm{ch}\, y - \mathrm{i}\sin x \,\mathrm{sh}\, y, \tag{4b}$$

$$\sin z = \sin x \,\mathrm{ch}\, y + \mathrm{i}\cos x \,\mathrm{sh}\, y. \tag{4c}$$

Powyżej, *cosinus hiperboliczny* $\mathrm{ch}\, y$ i *sinus hiperboliczny* $\mathrm{sh}\, y$ zdefiniowane są wzorami

$$\mathrm{ch}\, y = \frac{\mathrm{e}^y + \mathrm{e}^{-y}}{2} = \cos(\mathrm{i}y), \qquad \mathrm{sh}\, y = \frac{\mathrm{e}^y - \mathrm{e}^{-y}}{2} = -\mathrm{i}\sin(\mathrm{i}y). \tag{5}$$

(Definicje te mają sens i dla $y \in \mathbb{C}$.) Pierwsza równość w (4) wynika z (3a) i (1), natomiast druga i trzecia – z (3b) (odp. z (3c)) i (5).

Dla każdej liczby zespolonej w przyjmijmy $w\mathbb{Z} = \{wk : k \in \mathbb{Z}\}$, gdzie $\mathbb{Z}$ to zbiór liczb całkowitych. Twierdzimy, że

$$\exp(z_1) = \exp(z_2) \Leftrightarrow z_1 - z_2 \in 2\pi\mathrm{i}\mathbb{Z} \tag{6a}$$

$$\cos(z_1) = \cos(z_2) \Leftrightarrow (z_1 - z_2 \in 2\pi\mathbb{Z} \ \text{ lub } z_1 + z_2 \in 2\pi\mathbb{Z}) \tag{6b}$$

$$\sin(z_1) = \sin(z_2) \Leftrightarrow (z_1 - z_2 \in 2\pi\mathbb{Z} \ \text{ lub } \ z_1 + z_2 + \pi \in 2\pi\mathbb{Z}) \tag{6c}$$

Istotnie, $\exp(z_1) = \exp(z_2) \Leftrightarrow \exp(z_1 - z_2) = 1$, wobec czego (6a) wynika stąd, że $\exp(x + iy) = 1 \Leftrightarrow (x = 0 \text{ i } y \in 2\pi\mathbb{Z})$. (Korzystamy z (4a).) A że $W + \frac{1}{W} = w + \frac{1}{w} \Leftrightarrow W = w$ lub $W = 1/w$ (równanie jest kwadratowe względem W), więc z (6a) i (1) łatwo otrzymujemy (6b). Natomiast (6c) jest konsekwencją (6b) i (3d).

Nazwijmy liczbę z_0 *okresem* funkcji $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, jeśli $f(z_0 + z) = f(z)$ dla wszystkich $z \in \mathbb{C}$. Z (6) wynika, że *zbiorem okresów funkcji* $\cos$ *i funkcji* $\sin$ *jest* $2\pi\mathbb{Z}$, *zaś zbiorem okresów funkcji* $\exp$ *jest* $2\pi\mathrm{i}\mathbb{Z}$.

By wyobrazić sobie, jak omawiane trzy funkcje przekształcają płaszczyznę $\mathbb{C}$, rozważmy na niej siatkę prostych K_x i L_y $(x, y \in \mathbb{R})$, równoległych do osi współrzędnych:

$$K_x = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) = x\}, \quad L_y = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) = y\}$$

Z (4a) wynika, że obrazem prostej K_x przy przekształceniu $\exp$ jest okrąg $\{z' : |z'| = \mathrm{e}^x\}$, a obrazem prostej L_y jest półprosta otwarta $\{z' \in \mathbb{C}\backslash\{0\} : \arg(z') = y\}$. Otrzymane rodziny półprostych i okręgów wypełniają oczywiście zbiór $\mathbb{C}\backslash\{0\}$, skąd ten jest obrazem płaszczyzny $\mathbb{C}$ przy funkcji $\exp$.

Natomiast przekształcenie cos przeprowadza prostą L_y $(y \neq 0)$ na zbiór punktów $z' = x' + y'\mathrm{i}$, który na mocy (4b) zadany jest równaniem:

$$\left(\frac{x'}{\operatorname{ch} y}\right)^2 + \left(\frac{y'}{\operatorname{sh} y}\right)^2 = 1$$

Przedstawia ono elipsę o środku w 0 i półosiach długości $\operatorname{ch} y$ i $|\operatorname{sh} y|$.

Pytanie: Czym jest obraz prostej K_x przy funkcji cos, gdy $x \notin (\pi/2)\mathbb{Z}$? (Odp.: jest on tym ramieniem hiperboli $(x'/\cos x)^2 - (y'/\sin x)^2 = 1$, które położone jest w półpłaszczyźnie $\operatorname{sgn} x' = \operatorname{sgn}(\cos x)$.)

Odnotujmy też, że przeliczalnie wiele prostych K_x i prosta L_0 są przez $f = \cos$ przeprowadzane w wyjątkowy sposób: obrazem prostej L_0 jest odcinek $[-1, 1]$, a obrazem prostej K_x – półprosta $[1, \infty)_{\mathbb{R}}$ gdy $x \in 2\pi\mathbb{Z}$, półprosta $(-\infty, -1]_{\mathbb{R}}$ gdy $x \in \pi + 2\pi\mathbb{Z}$, zaś prosta $\mathrm{i}\mathbb{R}$ gdy $x \in \pi/2 + \pi\mathbb{Z}$. (Dlaczego?) Kto pamięta własności stożkowych, wywnioskuje z równości $\operatorname{ch}^2 y - \operatorname{sh}^2 y = 1$ i $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, że -1 i 1 są ogniskami każdej z elips $f(L_y)$ i (ramion) hiperbol $f(K_x)$. Wynika stąd, a ogólniejszą przyczynę poznamy w rozdziale V, że każda z hiperbol jest prostopadła do każdej z elips. Prosta $\mathrm{i}\mathbb{R}$, obie półproste oraz różne zbiory opisanej rodziny ramion hiperbol wypełniają w sposób rozłączny całą płaszczyznę, co wynika z poniższego zadania. (Można zamiast niego użyć zadania z §1, jeśli przedstawić cos jako złożenie $g \circ \exp \circ h$, gdzie $h(z) = \mathrm{i}z$ i $g(z) = \frac{1}{2}(z + z^{-1})$.) To samo tyczy się opisanej rodziny elips i odcinka $[-1, 1]$. Dla każdej z tych przyczyn, obrazem funkcji cos jest cała płaszczyzna $\mathbb{C}$.

Zadanie. Dla danych liczb $X, Y > 0$ istnieje dokładnie jedna para liczb $a, b > 0$ takich, że $a + b = 1$ i $X/a - Y/b = 1$. (Wskazówka: rozważyć funkcję $a \mapsto X/a - Y/(1 - a)$. W zastosowaniu, rolę X i Y grają kwadraty współrzędnych punktu płaszczyzny.)

Otrzymujemy więc taki rysunek:

[RYSUNKI]

Na rysunkach (gdy je wzbogacić) dostrzec można też ślady okresowości funkcji exp i cos. Płaszczyzna $\mathbb{C}$ jest bowiem podzielona prostymi $K_{n\pi}, n \in \mathbb{Z}$, na pasy

$$V_n = \{z \in \mathbb{C} : n\pi < \mathrm{Re}(z) < (n+1)\pi\}.$$

Każdy pas V_n jest przez funkcję $f = \cos$ przeprowadzany w sposób różnowartościowy na zbiór $\bigcup\{f(K_x) : n\pi < x < (n+1)\pi\}$, równy $(\mathbb{C}\setminus\mathbb{R})\cup(-1,1)$. (Korzystamy z (6b) oraz, ponownie, z zadania i wcześniejszego opisu zbiorów $f(K_x)$.) Na sąsiadujących pasach V_{n-1} i V_n przekształcenie cos jest symetryczne względem rozdzielającej je prostej $K_{n\pi}$, gdyż $\cos(n\pi + z) = \cos(n\pi - z)$ dla $z \in \mathbb{C}$.

Podobnie, płaszczyzna jest podzielona prostymi $L_{2n\pi}, n \in \mathbb{Z}$, na pasy

$$H_n = \{z \in \mathbb{C} : 2n\pi < \mathrm{Im}(z) < 2(n+1)\pi\},$$

które przez funkcję exp przeprowadzane są w sposób różnowartościowy na ten sam zbiór $\mathbb{C} \setminus [0,\infty)_{\mathbb{R}}$. (Korzystamy z (6a).)

Jeśli rolę pasów zamienić, to odnotujemy, że funkcja exp nawija pasy V_n na pierścienie $\mathrm{e}^n \leq |z| < \mathrm{e}^{n+1}$, natomiast funkcja cos nawija pasy H_n na zdeformowane pierścienie, ograniczone parą elips. Użycie słowa „nawija” wiąże się z cyklicznością przekształcenia: w obu bowiem przypadkach i dla dowolnych punktów p, q jak zaznaczono na rysunkach, domknięty prostokąt o kolejnych wierzchołkach $p, q, q+d, p+d$, gdzie d jest okresem funkcji cos czy exp, przeprowadzany jest na odpowiedni pierścień–i to w analogiczny sposób, jak przylegający prostokąt o wierzchołkach $p, q, q-d$ i $p-d$. (Przypomnijmy, że $d = 2\pi$ gdy $f = \cos$ i $d = 2\pi\mathrm{i}$ gdy $f = \exp$.)

Pytania. a) Czym jest obraz półpłaszczyzny $\mathrm{Im}\, z > 0$ przy funkcji cos?

b) Kiedy $\cos z \in \mathbb{R}$?

c) Jaki jest zbiór wartości funkcji $\mathrm{tg} = \sin / \cos$?

Uwaga 1. Ponieważ $\sin(z) = \cos(z - \pi/2)$, więc rysunki dla funkcji sin są analogiczne, jak dla funkcji cos. Co to oznacza jest kolejnym pytaniem. ⊟

Uwaga 2. Z (6a) wynika, że funkcja exp jest różnowartościowa na podzbiorze płaszczyzny, przecinającym każdą prostą pionową K_x wzdłuż zbioru o średnicy mniejszej niż 2π. Dla przykładu, jest ona różnowartościowa na pasie $|\mathrm{Im}\, z - \mathrm{Re}\, z| < 1$. Czytelnik zechce zbadać, czy funkcja cos jest na tym pasie różnowartościowa. (Warto też narysować obrazy pasa przy obu funkcjach, np. korzystając z istniejących programów komputerowych.)

Uwaga 3. * Zatem zdanie „funkcja f jest różnowartościowa na pewnym otoczeniu punktu z” jest prawdziwe przy $f = \exp$ i dowolnym $z \in \mathbb{C}$, zaś przy $f = \cos$ jest ono prawdziwe wtedy i tylko wtedy, gdy $z \notin \pi\mathbb{Z}$. (Wynika to z (6b).) Czytelnik zaznajomiony z pojęciem nakrycia stwierdzi bez trudu (zwłaszcza gdy prócz (6a) skorzysta z twierdzenia 1, które udowodnimy w §8), że funkcja $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ jest nakryciem–jest to jej ważna własność. Czy jest nakryciem funkcja $\cos_{|\mathbb{C}\setminus\pi\mathbb{Z}} : \mathbb{C} \setminus \pi\mathbb{Z} \to \mathbb{C} \setminus \{-1, 1\}$?

Uwaga 4. * Ponieważ $\cos = g \circ \exp \circ h$, gdzie $g(z) = \frac{1}{2}(z + z^{-1})$ i przekształcenie $h(z) = \mathrm{i}z$ jest obrotem wokół 0, więc z porównania własności funkcji exp i cos wynika, że g przeprowadza okręgi $|z| = r$ na elipsy, a półproste $\{tw : t > 0\}$ na gałęzie hiperbol – jednak poza przypadkami, gdy $r = 1$ lub $w \in \{\pm 1, \pm\mathrm{i}\}$. (Dlaczego?) Bezpośrednią analizę funkcji g znaleźć można w książce Szabata.

Zadanie. a) Gdy $f \in \{\exp, \cos, \sin\}$, to $|f(z)| \leq \mathrm{e}^{|z|}$ dla $z \in \mathbb{C}$.

b)* Dla $z \in \mathbb{C}$ zachodzą nierówności $|\cos z| \geq |\mathrm{sh}(\mathrm{Im}\, z)|$ i $|\cos z| \leq \mathrm{ch}(\mathrm{Im}\, z)$.

c)* Każdy dysk o promieniu $\pi\sqrt{2}$ zawiera punkt z taki, że $\cos z \in \mathbb{Z}$. (Wskazówka: $\cos^{-1}(\mathbb{Z}) \supset \mathrm{i}A + \pi\mathbb{Z}$ dla pewnego zbioru $A \subset \mathbb{R}$ takiego, że $\mathrm{dist}(t, A) < 1\, \forall t \in \mathbb{R}$.)

B. Funkcje wymierne i sfera Riemanna. Niech ∞ oznacza punkt nie należący do płaszczyzny $\mathbb{C}$ i niech $\widetilde{\mathbb{C}} \stackrel{def}{=} \{\infty\} \cup \mathbb{C}$. Można $\widetilde{\mathbb{C}}$ dogodnie zamienić w przestrzeń topologiczną, homeomorficzną ze sferą. Jawny wzór na (pewną) metrykę d, zadającą topologię w $\widetilde{\mathbb{C}}$, można uzyskać następująco. Niech $S = \{(z, t) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R} : |z|^2 + t^2 = 1\}$ będzie sferą jednostkową w $\mathbb{C} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^3$, niech $n = (0_{\mathbb{C}}, 1_{\mathbb{R}}) \in S$ i niech $F : S \to \widetilde{\mathbb{C}} \times \{0_{\mathbb{R}}\}$ oznacza rzut stereograficzny, tzn. $F(p)$ jest punktem przecięcia prostej np z płaszczyzną $\mathbb{C} \times \{0_{\mathbb{R}}\}$ gdy $p \in S \setminus \{n\}$, zaś punktem $(\infty, 0_{\mathbb{R}})$ gdy $p = n$. Przyjmujemy

$$d(z_1, z_2) = \|F^{-1}(z_1, 0) - F^{-1}(z_2, 0)\| \ \text{ dla } \ z_1, z_2 \in \widetilde{\mathbb{C}}, \tag{*}$$

gdzie $\|(z, t)\| = \sqrt{|z|^2 + t^2}$ oznacza normę euklidesową w $\mathbb{R}^3 = \mathbb{C} \times \mathbb{R}$. Przestrzeń $\widetilde{\mathbb{C}}$ nazywana jest *płaszczyzną rozszerzoną* lub *sferą Riemanna*. Z powyższą metryką d, jest ona izometryczna ze sferą S: izometrią jest rzut F. Jest to więc zwarta przestrzeń metryczna. Zbieżność w metryce d opisać można tak: dla $z, z_1, z_2, \dots \in \widetilde{\mathbb{C}}$ zachodzi

$$z_n \to z \Leftrightarrow (z \in \mathbb{C} \ \text{ i } \ |z_n - z| \to 0 \ \text{ lub } \ z = \infty \ \text{ i } \ |z_n| \to \infty). \tag{**}$$

Istotnie, gdy $z \neq \infty$, to (**) wynika stąd, że przekształcenia $F_{|S\setminus\{n\}}$ i $(F_{|S\setminus\{n\}})^{-1}$ (pomiędzy $\mathbb{C}$ i $S \setminus \{n\}$) są ciągłe. A że z każdego ciągu ograniczonego w $\mathbb{C}$ można wybrać podciąg zbieżny, więc pociąga to za sobą (jak?) prawdziwość (**) i dla $z = \infty$.

Wartość $F^{-1}(z, 0)$ nietrudno jest wyznaczyć i wzorowi (*) można nadać bardziej jawną postać. Nie czynimy tego, bo w żadnej postaci wzór ten nie będzie wykorzystany, zaś istotna będzie tylko charakteryzacja (**). Oznacza ona, że na $\mathbb{C}$ topologia przestrzeni $\widetilde{\mathbb{C}}$ jest identyczna z wyjściową i przestrzeń $\widetilde{\mathbb{C}}$ jest tzw. *uzwarceniem jednopunktowym* (inaczej: *Aleksandrowa*) płaszczyzny $\mathbb{C}$.

Z (**) wynika, że gdy $a_n, b_n \in \mathbb{C}$ i $a_n \to \infty$, to $a_n/b_n \to \infty$, $a_n \pm b_n \to \infty$ i $b_n/a_n \to 0$ <u>o ile ciąg b_n jest ograniczony</u>. (Inaczej konkluzja może być fałszywa.) Z tego względu wygodnie jest przyjąć dla $b \in \mathbb{C}$

$$\infty{\cdot}\infty = \infty,\ b{\pm}\infty = \infty{+}b = \infty,\ b/\infty = 0,\ \text{ a gdy } b \neq 0, \text{ to } b{\cdot}\infty = \infty{\cdot}b = \infty,\ b/0 = \infty$$

Słowo „wygodnie” odnosi się do tego, że gdy $*$ jest jednym z działań arytmetycznych, a ciągi (a_n) i (b_n) liczb zespolonych są zbieżne do $a, b \in \widetilde{\mathbb{C}}$ takich, że wynik $a * b$ został wyżej określony, to $a_n * b_n \to a * b$.

Zadanie. Niech f i g będą niezerowymi wielomianami zespolonymi. Udowodnić, że:

a) Istnieje $\lim_{z\to\infty} f(z)/g(z) = c$, przy czym $c = 0$ gdy $\deg(f) < \deg(g)$, $c = \infty$ gdy $\deg(f) > \deg(g)$, oraz c jest ilorazem współczynników kierunkowych obu wielomianów gdy $\deg(f) = \deg(g)$.

b) Gdy $g(z_0) = 0$ i $f(z_0) \neq 0$, to $\lim_{z\to z_0} f(z)/g(z) = \infty$.

Iloraz f/g dwóch wielomianów ($g \neq 0$) nazywamy *funkcją wymierną*; możemy przy tym zakładać, że $f = 0$ lub f i g nie mają pierwiastków wspólnych. (Dlaczego?) Z zadania wynika więc, że funkcję wymierną u możemy traktować jako ciągłe przekształcenie sfery Riemanna $\widetilde{\mathbb{C}}$ w siebie, zaś z własności 1,2,3 w §2 – że jest ona holomorficzna w zbiorze otwartym $\mathbb{C} \setminus u^{-1}(0)$. Można udowodnić (co nie jest łatwe), że tylko funkcje wymierne mają te własności. Pewne własności funkcji wymiernych ustalimy w §IV.7. Odnotujmy, że żadnej z funkcji $\exp, \cos, \sin$ nie można w sposób ciągły przedłużyć na sferę Riemanna. (Dlaczego?)

C. Homografie. Są to funkcje wymierne zadane wzorem

$$h_A(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad \text{gdzie } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad \det(A) \neq 0. \tag{7a}$$

Wzór ten ma sens, gdy z należy do płaszczyzny $\mathbb{C}$ *nakłutej* w punkcie $-\frac{d}{c}$ (tzn. punkt ten usuwamy). Można przestrzeni $\mathbb{C}$ nie nakłuwać, lecz przeciwnie, rozszerzyć ją do sfery $\widetilde{\mathbb{C}}$, zaś h_A przedłużyć do funkcji ciągłej $\widetilde{\mathbb{C}} \to \widetilde{\mathbb{C}}$, którą nadal wygodnie jest oznaczyć h_A. Wtedy, jak wyjaśniono w punkcie B,

$$h_A(-d/c) = \infty \quad \text{oraz} \quad h_A(\infty) = a/c \tag{7b}$$

Homografie traktować będziemy na ogół jako przekształcenia $\widetilde{\mathbb{C}} \to \widetilde{\mathbb{C}}$, a nie z płaszczyzny nakłutej do $\mathbb{C}$. Twierdzimy, że dla nieosobliwych 2×2 macierzy zespolonych A, B ma wtedy miejsce równość

$$h_{AB} = h_A \circ h_B \tag{8}$$

Istotnie, ponieważ funkcje ciągłe są równe, jeśli są równe na zbiorze gęstym, więc równości $h_{AB}(z) = h_A(h_B(z))$ wystarcza dowieść gdy każdy z punktów z, $h_B(z), h_{AB}(z)$ jest różny od ∞ – a wtedy otrzymujemy ją z (7a) przez łatwy rachunek.

Z (8) wynika, że homografie tworzą grupę przekształceń przestrzeni $\widetilde{\mathbb{C}}$, przy czym odwrotnością homografii h_A jest homografia $h_{A^{-1}}$. Dla zaznajomionych z elementami geometrii rzutowej odnotujmy, że można $\widetilde{\mathbb{C}}$ traktować jako model zespolonej prostej rzutowej, w którym homografie grają rolę przekształceń rzutowych. (Wynika to stąd, że przekształcenie rzutowe, które we współrzędnych jednorodych ma postać $[(z_1, z_2)] \mapsto [(az_1 + bz_2, cz_1 + dz_2)]$, we wspólrzędnych niejednorodnych zapisuje się wzorem $z \mapsto (az + b)/(cz + d)$. Można tej obserwacji użyć, by uzasadnić wzór (8).)

Oprócz homografii wyróżnimy *antyhomografie*, tzn. (nieholomorficzne!) przekształcenia postaci $h \circ s$, gdzie h jest homografią, a s sprzężeniem: $s(z) = \overline{z}$ dla $z \in \mathbb{C}$ i $s(\infty) = \infty$. *Przekształceniem Möbiusa* nazywać będziemy każde przekształcenie $\widetilde{\mathbb{C}} \to \widetilde{\mathbb{C}}$, będące homografią lub antyhomografią. Przekształcenia te mają wiele interesujących własności, z których niektóre ujęte są w poniższych zadaniach, i grają istotną rolę w „hiperbolicznej geometrii płaszczyzny". (Wspomnimy o niej w Dodatku 1 do §V.2.)

Zadania dotyczące przekształceń Möbiusa. (Pomijamy polecenia „dowieść" itp.)

1. a) Przekształcenia Möbiusa są ciągłe (jako przekształcenia z $\mathbb{C}$ do $\mathbb{C}$).

b) Złożenie homografii i antyhomografii (w dowolnej kolejności) jest antyhomografią, podobnie jak odwrotność antyhomografii, a złożenie dwóch antyhomografii jest homografią. (Wskazówka: gdy f jest antyhomografią, to $f = s \circ h$, gdzie h jest homografią.)

b) Żadna homografia nie jest antyhomografią. (Wskazówka: wpierw rozpatrzeć homografię identycznościową.)

2. Każde przekształcenie Möbiusa jest złożeniem kilku przekształceń, wśród których występują tylko podobieństwa płaszczyzny i homografia $z \mapsto 1/z$.

Definicja. *Okręgiem uogólnionym* w $\widetilde{\mathbb{C}}$ nazywamy każdy okrąg $\{z \in \mathbb{C} : |z - o| = r\}$, gdzie $o \in \mathbb{C}$ i $r > 0$, oraz każdy zbiór $L \cup \{\infty\}$, gdzie L jest prostą w $\mathbb{C}$.

3. a) Okrąg $|z - a| = r$ zadany jest równaniem $|z|^2 - 2\operatorname{Re}(z\overline{a}) = r^2 - |a|^2$, zaś prosta, prostopadła do wektora $0a$ – równaniem $\operatorname{Re}(z\overline{a}) = c$, gdzie $c \in \mathbb{R}$.

b) Homografia $h(z) = 1/z$ jest *inwolucją* (tzn $h \circ h$ jest identycznością) i dla $r \neq |a|$ przeprowadza okrąg $\partial D(a, r)$ na okrąg $\partial D(\frac{\overline{a}}{|a|^2 - r^2}, \frac{r}{||a|^2 - r^2|})$. Prostą zaś $\operatorname{Re}(z\overline{a}) = c$ przeprowadza ona na tęże prostą (gdy $c = 0$) lub na okrąg $|z - \frac{1}{2ca}| = \frac{1}{|2ca|}$ (gdy $c \neq 0$).

c) Przekształcenie Möbiusa przeprowadza okręgi uogólnione na okręgi uogólnione.

d) Każdy okrąg uogólniony można homografią przeprowadzić na $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

e) Gdy C i S są okręgami uogólnionymi i przekształcenie Möbiusa f spełnia warunek $f(z_i) \in S$ dla pewnych trzech różnych punktów $z_1, z_2, z_3 \in C$, to $f(C) = S$.

4. Dla przekształcenia $f : \widetilde{\mathbb{C}} \to \widetilde{\mathbb{C}}$ przyjmijmy $\mathrm{Fix}(f) \overset{def}{=} \{p \in \widetilde{\mathbb{C}} : f(p) = p\}$.

a) Dowieść, że gdy $h : \widetilde{\mathbb{C}} \to \widetilde{\mathbb{C}}$ jest bijekcją, to $\mathrm{Fix}(h \circ f \circ h^{-1}) = h(\mathrm{Fix}(f))$.

b) Homografia h_A ma pewien punkt stały, a jeśli ma ich więcej niż 2 to jest identycznością, zaś macierz A jest postaci λI ($\lambda \in \mathbb{C}$).

c) Gdy homografie h_A i h_B w są równe w 3 punktach, to macierze A i B są proporcjonalne i $h_A = h_B$. (Wskazówka: przy $B = I$ wynika to z b); wykorzystać (8).)

d) Gdy h jest homografią i $\mathrm{Fix}(h) = \{\infty\}$, to $h(z) = z + b$ dla pewnego $b \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

e) Gdy h jest homografią i $\mathrm{Fix}(h) = \{0, \infty\}$, to $h(z) = az$ dla pewnego $a \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$.

5. Niech p_1, p_2, p_3 i q_1, q_2, q_3 będą trójkami różnych liczb zespolonych. Wówczas:

a) Istnieje jedyna homografia h taka, że $h(p_1) = 0, h(p_2) = \infty$ i $h(p_3) = 1$; jest nią $h(z) = k(z - p_1)/(z - p_2)$, gdzie $k = (p_3 - p_2)/(p_3 - p_1)$.

b) Istnieje jedyna homografia h taka, że $h(p_i) = q_i$ dla $i = 1, 2, 3$. (Wskazówka: $h = h_2^{-1} \circ h_1$, gdzie h_1 i h_2 konstruuje się w oparciu o a).)

c) Gdy w jest obrazem danego punktu z przy powyższej homografii h, to $\frac{p_3 - p_2}{p_3 - p_1} \cdot \frac{z - p_1}{z - p_2} = \frac{q_3 - q_2}{q_3 - q_1} \cdot \frac{w - q_1}{w - q_2}$. (Wskazówka: $h_2 \circ h = h_1$.)

d)* Każda homografia zachowuje *dwustosunek* $[p_1, p_2, p_3, p_4] \overset{def}{=} \frac{p_3 - p_1}{p_3 - p_2} : \frac{p_4 - p_1}{p_4 - p_2}$ czwórki różnych punktów. (Jaką wartość mu nadać, gdy $\infty \in \{p_i\}_{i=1}^4$?)

6. a) Jedynym przekształceniem Möbiusa, którego zbiorem punktów stałych jest oś $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$, jest symetria s względem tej osi (dana wzorami $\infty \mapsto \infty$ i $z \mapsto \overline{z}$ dla $z \in \mathbb{C}$).

b) Gdy C jest okręgiem uogólnionym, to istnieje dokładanie jedno przekształcenie Möbiusa s_C, którego C jest zbiorem punktów stałych. (Wskazówka: a), **3** c) i **4** a).)

c) Gdy C jest prostą, to powyższe przekształcenie s_C jest symetrią ortogonalną względem tej prostej; gdy zaś $C = \{z : |z - o| = r\}$, to

$$s_C(z) = o + \frac{r^2}{|z - o|^2}(z - o) \text{ dla } z \in \mathbb{C} \setminus \{o\},\ s_C(o) = \infty \text{ i } s_C(\infty) = o. \tag{9}$$

(Wskazówka: dowieść, że recepta ta wyznacza przekształcenie o żądanych własnościach.)

d) Wywnioskować, że gdy $z \neq o$ i $z \neq \infty$, to $z' = s_C(z)$ jest jedynym punktem prostej oz, dla którego $|z' - o||z - o| = r^2$ i $o \notin [z, z']$.

e) Przekształcenie s_C jest inwolucją, tzn. złożenie $s_C \circ s_C$ jest identycznością.

Definicja. a) Przekształcenie s_C nazywamy *symetrią względem okręgu uogólnionego* C, lub też (gdy C jest „prawdziwym” okręgiem, tzn. $C \subset \mathbb{C}$) *inwersją* względem niego.

b) Punkty p, q nazywamy *symetrycznymi* względem okręgu uogólnionego C, jeśli $s_C(p) = q$. Zbiór U jest symetryczny względem C, jeśli $s_C(U) = U$.

W dalszej części zamiast „okrąg uogólniony” mówimy „okrąg”.

7. a) Gdy przekształcenie Möbiusa f przeprowadza okrąg C na T, to $s_T = f \circ s_C \circ f^{-1}$. (Wskazówka: jedyność s_T.)

b) Każde przekształcenie Möbiusa f przeprowadza pary punktów, symetryczne względem danego okręgu C, na pary punktów, symetryczne względem okręgu $f(C)$.

c)* Przekształcenie Möbiusa f przeprowadza dany okrąg C na okrąg o średnicy $[f(a), f(b)]$, gdzie $[a, b]$ to średnica okręgu C, na której leży punkt $f^{-1}(\infty)$.

8. Niech $D = \{z : |z| < 1\}$ i $\Pi_+ = \{z : \mathrm{Im}(z) > 0\}$.

a) Gdy homografia h przeprowadza Π_+ na D, to $h(z) = k(z-a)/(z-\overline{a})$, gdzie $a \in \Pi_+$ i $|k| = 1$. (Wskazówka: jeśli h ma wymaganą własność i $a = h^{-1}(0)$, to $h(\overline{a}) = \infty$ na podstawie **7**b). Skorzystać z **5**a).)

b) Gdy homografia h przeprowadza D na D, to $h(z) = k\frac{z-a}{1-z\overline{a}}$, gdzie $a \in D$ i $|k| = 1$. (Wskazówka: jak wyżej, lecz tym razem $h(1/\overline{a}) = \infty$.)

c) Przeciwnie, gdy homografia h jest opisana jednym z tych wzorów, to spełnia warunek $h(\Pi_+) = D$ czy $h(D) = D$, odpowiednio. (Wskazówka do przypadku, gdy wzór jest jak w b): wystarcza dowieść, że $h(\partial D) = \partial D$, gdyż wtedy h przeprowadza składową zbioru $\widetilde{\mathbb{C}} \setminus \partial D$, zawierającą a, na składową zawierającą $h(a)$. Skorzystać z **3** d).)

d)* Jaka jest postać homografii przeprowadzających Π_+ na Π_+?

9. a) Każda homografia jest homograficznie sprzężona bądź z przesunięciem, bądź z przekształceniem, będącym złożeniem obrotu wokół 0 i jednokładności o środku w 0. Powyżej, przekształcenia $f, g : \widetilde{\mathbb{C}} \to \widetilde{\mathbb{C}}$ nazywamy *homograficznie sprzężonymi*, jeśli $g = h \circ f \circ h^{-1}$ dla pewnej homografii h. (Wskazówka: **4** a),d),e).)

b)* Wywnioskować, że gdy homografia f ma jedyny punkt stały, to jest on granicą obu ciągów $(f^n(z))$ i $(f^{-n}(z))$, dla każdego punktu $z \in \widetilde{\mathbb{C}}$; gdy zaś f ma 2 punkty stałe p, q, to albo każdy ciąg $(f^n(z))$, gdzie $z \notin \{p, q\}$, jest zbieżny i jego granica nie zależy od z, i tak samo jest z ciągami $(f^{-n}(z))$, albo każdy z tych ciągów jest rozbieżny. (Przez f^n i f^{-n} oznaczamy n–tą iterację przekształcenia f i przekształcenia f^{-1}, odpowiednio.)

c)* Zbiór punktów stałych antyhomografii jest okręgiem lub zbiorem pustym lub jednopunktowym, i możliwości te są realizowane.

10.* Niech s_1 oznacza symetrię względem okręgu T_1, a s_2–symetrię względem T_2. Dowieść, że jeśli funkcja $f : U \to \mathbb{C}$, gdzie zbiór $U \subset \mathbb{C}$ jest otwarty, ma pochodną zespoloną w punkcie z i $s_1(z) \neq \infty \neq s_2(f(s_1(z)))$, to funkcja $s_2 \circ f \circ s_{1|s_1(U)}$ ma ją w punkcie $s_1(z)$. (Wskazówka: gdy $T_1 = T_2 = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ jest to część b) zadania z §2. W ogólnym przypadku skorzystać z **3**d) i **7**b).)

Uwaga 5. W oparciu o te zadania i wcześniejsze wiadomości można pewne obszary holomorficznie i różnowartościowo przekształcić na dysk; patrz §V.3.

* Zadania, dotyczące rzutu stereograficznego i inwersji przestrzeni $\mathbb{R}^3$.

Definicja. * a) Przez *inwersję przestrzeni* $\mathbb{R}^k \cup \{\infty\}$, o skali $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ i środku $o \in \mathbb{R}^k$, rozumiemy przekształcenie określone wzorem

$$s(z) = o + \frac{\lambda}{\|z-o\|^2}(z-o) \text{ dla } z \in \mathbb{R}^k \setminus \{o\},\ s(o) = \infty \text{ i } s(\infty) = o. \tag{10}$$

Powyżej, $\| \ \|$ oznacza normę euklidesową na przestrzeni $\mathbb{R}^k$.

b) Niech S będzie sferą w $\mathbb{R}^3$ o środku w o, niech $n \in S$ i niech płaszczyzna Π będzie prostopadła do prostej on i nie przechodzi przez n. Rzut stereograficzny sfery S na $\Pi \cup \{\infty\}$, z bieguna n, definiujemy jak w B. Gdy rozpatrujemy go na $S \setminus \{n\}$, to mówimy o *rzucie stereograficznym sfery nakłutej* (w biegunie) na płaszczyznę Π.

11.* a) Inwersja przestrzeni $\mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$ przeprowadza sfery uogólnione (tzn. sfery i płaszczyzny z dołączonym punktem ∞) na sfery uogólnione.

b) Wywnioskować, że inwersja przeprowadza okręgi uogólnione w $\mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$ (tzn. proste z dołączonym punktem $\{\infty\}$ i okręgi w $\mathbb{R}^3$) na okręgi uogólnione.

12.* Niech F oznacza rzut stereograficzny sfery S na płaszczyznę Π, z bieguna n.

a) Obierzmy inwersję J o środku n i takiej skali λ, by punkt $J(o)$ był spodkiem prostopadłym punktu n na Π. Wówczas $J_{|S} = F$. (Wskazówka: zbiór $J(S)$ jest płaszczyzną, bo $n \in S$. Dowieść, że $J(S) = \Pi$ i punkt $J(z)$ spełnia warunki definicji punktu $F(z)$.)

b) Wywnioskować, że F i F^{-1} przeprowadzają okręgi uogólnione na okręgi uogólnione. (Oczywiście, S zawiera tylko „prawdziwe” okręgi.)

7 Logarytmy i potęgi liczb zespolonych.

Gdy $\mathrm{e}^w = z$, to w nazywamy *logarytmem* liczby zespolonej z i piszemy $w = \log(z)$. Logarytmów liczby $z \neq 0$ jest nieskończenie wiele. Twierdzimy bowiem, że

$$w = \log(z) \Leftrightarrow \big(\operatorname{Re}(w) = \ln|z| \quad \text{i} \quad \operatorname{Im}(w) = \arg(z)\big). \tag{11}$$

(Powyżej, ln to logarytm naturalny liczby dodatniej.) Istotnie, gdy $\mathrm{e}^{x+iy} = z$, to $\mathrm{e}^x = |z|$ i $y = \arg(z/e^x) = \arg(z)$. (Korzystamy z (4) i tego, że dla $c > 0$ liczby z i cz mają te same argumenty.) Implikacja przeciwna również wynika z (4).

Logarytmy pozwalają zdefiniować potęgi z^q liczby zespolonej z o wykładniku q będącym liczbą niewymierną lub, ogólniej, zespoloną.

Definicja. Dla $z, q \in \mathbb{C}$, $z \notin \{0, \mathrm{e}\}$, oznaczamy przez z^q każdą liczbę postaci e^{qw}, gdzie $w = \log(z)$. (Liczb tych jest na ogół nieskończenie wiele. Gdy $z = \mathrm{e}$ chcemy zachować jednoznaczność, stosując wcześniejszą definicję e^z, i stąd warunek $z \neq \mathrm{e}$.)

Zadanie. Dowieść, że gdy $q \in \mathbb{Z}$, to istnieje tylko jedna liczba z^q, równa iloczynowi $\underbrace{z \cdot \dots \cdot z}_{q}$ gdy $q > 0$, zaś $\underbrace{\frac{1}{z} \cdot \dots \cdot \frac{1}{z}}_{-q}$ gdy $q < 0$. Ogólniej: istnieje k liczb z^q gdy q jest ułamkiem nieskracalnym o mianowniku $k > 0$, zaś istnieje ich nieskończenie wiele gdy liczba q jest niewymierna.

Niejednoznaczności logarytmu czy potęgi można starać się zapobiec, wyróżniając wśród wszystkich logarytmów danej liczby ten, który w (11) odpowiada argumentowi głównemu. *Logarytmem głównym* liczby $z \neq 0$ nazwiemy zatem liczbę

$$\mathrm{Log}(z) = \ln|z| + \mathrm{i}\,\mathrm{Arg}(z) \tag{12}$$

Wobec (6a), każdy inny logarytm jest postaci $\mathrm{Log}(z) + 2k\pi\mathrm{i}$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Uwaga 1. Jak i argument główny, tak i Log jest poprawnie określoną funkcją z $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ do $\mathbb{C}$. Jednak obie te funkcje, choć ciągłe na $\mathbb{C} \setminus [0, \infty)_{\mathbb{R}}$, to są nieciągłe w każdym punkcie $z_0 \in (0, \infty)_{\mathbb{R}}$. Ściślej: jeśli $\lim_n z_n = z_0 \in (0, \infty)_{\mathbb{R}}$ i $f \in \{\mathrm{Arg}, \mathrm{Log}\}$, to granica $w = \lim_n f(z_n)$ istnieje gdy $\mathrm{Im}(z_n) \geq 0$ dla każdego n (i wtedy $w = f(z_0)$), a także gdy $\mathrm{Im}(z_n) < 0$ dla każdego n (lecz wtedy $w \neq f(z_0)$). ⊟

Uwaga 2. Niech P oznacza pas $P = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \mathrm{Im}(z) < 2\pi\}$. Z definicji i (4a) wynika, że gdy $z \in P$ i $w \in \mathbb{C} \setminus [0, \infty)_{\mathbb{R}}$, to

$$\mathrm{e}^z \in \mathbb{C} \setminus [0, \infty)_{\mathbb{R}},\ \mathrm{Log}(w) \in P \text{ oraz } \ \mathrm{Log}(\mathrm{e}^z) = z \ \text{ i } \ \mathrm{e}^{\mathrm{Log}(w)} = w.$$

Zatem obcięcia, do P i do $\mathbb{C} \setminus [0, \infty)_{\mathbb{R}}$, funkcji exp i Log są wzajemnie odwrotnymi homeomorfizmami pomiędzy tymi zbiorami. W szczególności, funkcja Log przekształca homeomorficznie (i holomorficznie, czego dowiedziemy w następnym paragrafie) zbiór $\mathbb{C} \setminus [0, \infty)_{\mathbb{R}}$ na pas P, zaś półpłaszczyznę $\mathrm{Im}\, z > 0$ na pas $0 < \mathrm{Im}\, z < \pi$. □

W związku z uwagą 1 istotne staje się pytanie, kiedy na danym zbiorze $U \subset \mathbb{C}$ zdefiniować można <u>ciągłą</u> funkcję $h : U \to \mathbb{C}$, spełniającą dla $z \in U$ warunek $h(z) = \log z$ (odpowiednio: warunek $h(z) = \arg z$ czy $h(z) = z^q$, gdzie $q \in \mathbb{C}$ jest ustalone). Funkcję taką, jeśli istnieje, nazwiemy *gałęzią logarytmu* (odp. *argumentu* czy *q-tej potęgi*) na zbiorze U. Nieco ogólniej, *gałęzią logarytmu* danej *funkcji* $g : T \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ nazywamy funkcję ciągłą $h : T \to \mathbb{C}$ taką, że $h(t) = \log(g(t))$ dla wszystkich $t \in T$, i analogicznie definiujemy gałąź argumentu i gałąź q–tej potęgi funkcji g.

Przykład 1. a) Gdy l jest gałęzią logarytmu funkcji $g : T \to \mathbb{C}$, to e^{ql} jest gałęzią q–tej potęgi tej funkcji.

b) Funkcje Arg i Log są gałęziami argumentu i logarytmu, odpowiednio, na zbiorze $\mathbb{C} \setminus [0, \infty)_{\mathbb{R}}$. Jako zadanie pozostawione jest uzasadnienie, że gdy L jest dowolną półprostą domkniętą, wychodzącą z 0, to na $\mathbb{C} \setminus L$ istnieje gałąź argumentu i gałąź logarytmu. W szczególności, obie te gałęzie istnieją na każdym dysku $D \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ (bo $D \subset \mathbb{C} \setminus L$, dla pewnej półprostej L). $\boxminus$

Ćwiczenie. Z zadania w §1 wiemy, że funkcja $u(z) = \frac{1}{2}(z + z^{-1})$ przekształca w sposób różnowartościowy zbiór $\Pi_+ = \{z : \mathrm{Im}(z) > 0\}$ na $(\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}) \cup (-1, 1)_{\mathbb{R}}$. Wyrazić $(u_{|\Pi_+})^{-1}$ jawnym wzorem i wyjaśnić jego poprawność i to, że określa on funkcję holomorficzną.

Stwierdzenie 1. *Gdy dziedzina T funkcji $g : T \to \mathbb{C}\setminus\{0\}$ jest zbiorem spójnym, to każde dwie gałęzie argumentu tej funkcji różnią się o stałą, będącą całkowitą wielokrotnością liczby 2π. Podobnie, każde dwie gałęzie logarytmu funkcji g różnią się wtedy o całkowitą wielokrotność liczby $2\pi\mathrm{i}$.*

Dowód. Różnica $h_1 - h_2$ dwóch gałęzi argumentu funkcji g przyjmuje wartości w dyskretnym zbiorze $2\pi\mathbb{Z}$. Ponieważ funkcja $h_1 - h_2$ jest ciągła na zbiorze spójnym T, więc jest ona stała. To samo stosuje się do gałęzi logarytmu (korzystamy z (6a)). $\square$

Stwierdzenie 2. *Gałąź logarytmu ciągłej funkcji $g : T \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje gałąź argumentu tej funkcji. Ściślej:*

a) gdy l jest gałęzią logarytmu funkcji g, to $\mathrm{Im}(l)$ jest gałęzią argumentu tej funkcji;

b) gdy σ jest gałęzią argumentu ciągłej funkcji g, to $\ln|g| + \mathrm{i}\sigma$ jest gałęzią logarytmu tej funkcji.

Dowód. Zarówno a), jak i b) wynika z (11). $\square$

Bardzo łatwo o przykład zbioru, na którym gałęzi logarytmu czy argumentu brak:

Przykład 2. Na okręgu $S = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ nie istnieje gałąź argumentu (równoważnie: logarytmu). Istotnie, jeśli σ jest gałęzią argumentu na S to, na podstawie stwierdzenia 1, funkcja $\sigma - \mathrm{Arg}$ jest stała na $S \setminus \{1\}$. Jest to niemożliwe, bo funkcja Arg nie ma granicy w punkcie 1, zaś funkcja σ ma. $\square$

8 Gałąź funkcji odwrotnej. Gałąź logarytmu a funkcja pierwotna pochodnej logarytmicznej.

Na gałąź logarytmu można też spojrzeć jako na gałąź funkcji odwrotnej do funkcji exp.

Definicja. Gdy $f : U \to \mathbb{C}$ jest funkcją, to *gałęzią funkcji f^{-1} na zbiorze $W \subset f(U)$* nazywamy każdą funkcję ciągłą $g : W \to \mathbb{C}$ taką, że $f(g(w)) = w$ dla $w \in W$. [2]

[2] W większości książek przytoczonych na str. 1, termin ten jest też używany w innym znaczeniu.

Twierdzenie 1. *Niech f będzie funkcją analityczną w zbiorze otwartym $U \subset \mathbb{C}$, niech $z_0 \in U$ i niech $f'(z_0) \neq 0$. Wówczas*

a) Istnieje otoczenie D punktu z_0 takie, że $f_{|D} : D \to f(D)$ jest homeomorfizmem na zbiór otwarty $f(D) \subset \mathbb{C}$. Na $f(D)$ istnieje więc gałąź funkcji f^{-1}, przeprowadzająca punkt $w_0 := f(z_0)$ na z_0.

b) Gdy g jest gałęzią funkcji f^{-1}, określoną w otoczeniu punktu w_0 i spełniającą warunek $g(w_0) = z_0$, to pochodna $g'(w_0)$ istnieje i jest równa $1/f'(z_0)$. Funkcja g jest więc holomorficzna w pewnym otoczeniu punktu w_0.

Dowód. a) Funkcja f' jest analityczna (patrz wniosek w §5), więc jest ciągła i różna od zera w pewnym otoczeniu D_0 punktu z_0. Tym samym dla $z \in D_0$ macierz pochodnej rzeczywistej $\mathrm{d}f(z)$ istnieje i jest nieosobliwa, a także jest ciągłą funkcją zmiennej z. (Korzystamy z twierdzenia 1 w §2.) Stąd na podstawie twierdzenia o funkcji odwrotnej (dla funkcji dwóch zmiennych rzeczywistych) wynika istnienie otoczenia $D \subset D_0$ punktu z_0 takiego, że $f_{|D} : D \to f(D)$ jest homeomorfizmem na zbiór otwarty. Szukaną gałęzią jest homeomorfizm $(f_{|D})^{-1} : f(D) \to D$, odwrotny do $f_{|D}$.

b) Gdy $w \in \mathrm{dom}(g)$ i $z \overset{def}{=} g(w)$, to $f(z) = f(g(w)) = w$, skąd

$$\frac{g(w) - g(w_0)}{w - w_0} = \frac{z - z_0}{f(z) - f(z_0).} \tag{*}$$

Z ciągłości g wynika, że $z \to z_0$ gdy $w \to w_0$. A że pochodna $f'(z_0)$ istnieje, więc prawa strona w (*) ma dla $w \to w_0$ granicę, równą $1/f'(z_0)$. □

Wniosek 1. *Pochodna w punkcie $w_0 \neq 0$ gałęzi logarytmu, określonej w otoczeniu tego punktu, istnieje i jest równa $1/w_0$.*

Dowód. Przy $f = \exp$ wykorzystujemy część b) twierdzenia i równość $f' = f$. □

Twierdzenie 2. *Niech T będzie otwartym i spójnym podzbiorem przestrzeni $\mathbb{R}$ lub $\mathbb{C}$ i niech funkcja $g : T \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ posiada pochodną w każdym punkcie.*

a) Gdy h jest gałęzią logarytmu funkcji g, to jest ona różniczkowalna i $h' = g'/g$.

b) Gdy, przeciwnie, funkcja $h : T \to \mathbb{C}$ spełnia warunki $h' = g'/g$ i $\mathrm{e}^{h(t_0)} = g(t_0)$ dla pewnego punktu $t_0 \in T$, to h jest gałęzią logarytmu funkcji g.

Dowód. a) Niech $t \in T$ i niech l będzie gałęzią logarytmu, określoną na pewnym otoczeniu U punktu $g(t_0)$ i spełniającą warunek $l(g(t_0)) = h(t_0)$. (Korzystamy z części a) twierdzenia 1, dla $f = \exp$ i $z_0 = h(t_0)$.) Niech dalej V będzie spójnym otoczeniem punktu t w T, takim, że $g(V) \subset U$. Na mocy stwierdzenia 1 w §7, funkcja $h_{|V} - (l \circ g)_{|V}$ jest stała, wobec czego $h'(t) = (l \circ g)'(t) = g'(t)/g(t)$. (Wykorzystaliśmy wzór na pochodną złożenia i wynikającą z wniosku 1 równość $l'(g(t)) = 1/g(t)$.)

b) Niech $f = g\mathrm{e}^{-h}$. Ponieważ $f' = g'\mathrm{e}^{-h} - h'g\mathrm{e}^{-h} = 0$, więc funkcja f jest stała i równa 1 (bo $f(t_0) = 1$; wykorzystaliśmy zadanie z §2). Zatem $g = \mathrm{e}^h$. □

Otrzymujemy nieoczekiwany wniosek, kontrastujący z przykładem 1 w §7:

Wniosek 2. *Gdy $J \subset \mathbb{R}$ jest przedziałem, to każda funkcja $g : J \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ klasy C^1 posiada gałąź logarytmu, h, też będącą klasy C^1 i spełniającą warunek $h(t_0) = w_0$, dla danych $t_0 \in J$ i $w_0 = \log(g(t_0))$.*

Dowód. Jak każda funkcja ciągła $J \to \mathbb{C}$, tak i g'/g posiada funkcję pierwotną. Dodając do niej należytą stałą uzyskamy funkcję h taką, że $h' = g'/g$ i $h(t_0) = w_0$. Gdy przedział J jest otwarty, jest to szukana gałąź logarytmu, na podstawie twierdzenia 2. W ogólnym zaś przypadku pozostaje przedłużyć funkcję g do funkcji $\widetilde{g}$ klasy C^1, określonej na przedziale otwartym $J' \supset J$, i skorzystać z istnienia gałęzi logarytmu funkcji $\widetilde{g}$. □

Definicja. Funkcja g'/g nazywana jest *pochodną logarytmiczną* funkcji g.

Uwaga 1. * Twierdzenie 1 niesie i głębsze przesłanie. Skoro bowiem funkcja analityczna f wyznaczać może wiele gałęzi funkcji f^{-1}, to naturalne jest chcieć wszystkie je traktować łącznie, jako samodzielny obiekt. Jest to ważna przyczyna wprowadzenia bądź to „wieloznacznych funkcji analitycznych" (gdy użyć języka dawniejszego, obecnego w znanych podręcznikach Lei, Szabata oraz Saksa i Zygmunda), bądź to „snopów" funkcji analitycznych (gdy użyć bardziej uniwersalnego pojęcia współczesnego). Jak we wielu wstępnych kursach, obiektów tych nie będziemy rozpatrywać.

II CAŁKA FUNKCJI HOLOMORFICZNEJ WZDŁUŻ DROGI

1 Wstępne definicje

Definicja. Gdy ograniczona funkcja zespolona φ jest zdefiniowana na odcinku $[a,b]$, z pominięciem być może skończenie wielu punktów, i jest ciągła w każdym punkcie swej dziedziny, to przyjmujemy:

$$\int_a^b \varphi(t)\,\mathrm{d}t \stackrel{def}{=} \int_a^b \mathrm{Re}\,\varphi(t)\,\mathrm{d}t + \mathrm{i}\int_a^b \mathrm{Im}\,\varphi(t)\,\mathrm{d}t. \tag{1}$$

(Po prawej bierzemy całki Riemanna funkcji rzeczywistych.)

Jeśli funkcje $\varphi, \varphi_1, \varphi_2$ mają wymienione własności, to

$$\int_a^b (\varphi_1(t)+\varphi_2(t))\,\mathrm{d}t = \int_a^b \varphi_1(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^b \varphi_2(t)\,\mathrm{d}t \tag{2}$$

$$\int_a^b z\varphi(t)\,\mathrm{d}t = z\int_a^b \varphi(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{dla } z\in\mathbb{C} \tag{3}$$

$$\left|\int_a^b \varphi(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b |\varphi(t)|\,\mathrm{d}t \tag{4}$$

By dowieść (4) obierzmy taką liczbę z o module 1, że $(\int_a^b \varphi(t)\mathrm{d}t)z \in [0,\infty)_{\mathbb{R}}$. Pomnożenie obu stron (4) przez $|z|$ nie zmieni ich wartości, lecz na mocy (3) sprowadzi nierówność do przypadku, gdy $\int_a^b \varphi(t)\,\mathrm{d}t \in [0,\infty)_{\mathbb{R}}$. Wtedy jednak $|\int_a^b \varphi(t)\,\mathrm{d}t| = \mathrm{Re}(\int_a^b \varphi(t)\,\mathrm{d}t) = \int_a^b \mathrm{Re}(\varphi(t))\,\mathrm{d}t \leq \int_a^b |\varphi(t)|\,\mathrm{d}t$, co kończy dowód.

Definicja. a) *Ścieżką* nazywamy odwzorowanie ciągłe $\gamma : [a,b]\to\mathbb{C}$, gdzie $a,b\in\mathbb{R}$ i $a<b$. Zbiór $\mathrm{im}(\gamma) \stackrel{def}{=} \gamma([a,b])$ to *obraz* lub *nośnik* ścieżki γ. Za Saksem i Zygmundem, punkty $\gamma(a)$ i $\gamma(b)$ nazywamy *krańcami* ścieżki γ, przy czym punkt $\gamma(a)$ nazywamy jej *początkiem*, zaś $\gamma(b)$–*końcem*. Początek może zarazem być końcem i wówczas mówimy o *ścieżce zamkniętej* lub *pętli*.

b) Ścieżka $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ jest *gładka*, gdy jej pochodna w każdym punkcie $t \in [a,b]$ jest różna od zera i w sposób ciągły zależy od t. (W punktach a, b rozważamy pochodne jednostronne.) Ścieżkę γ nazwiemy *drogą*, jeśli jest kawałkami gładka, tzn. istnieją punkty $a = t_0 < \ldots < t_n = b$ takie, że każda ze ścieżek $\gamma_{|[t_{i-1},t_i]}$ jest gładka.

c) Gdy $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ jest drogą, zaś $f : \gamma([a,b]) \to \mathbb{C}$ jest funkcją ciągłą, to

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z \stackrel{def}{=} \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,\mathrm{d}t.$$

(Funkcja $f(\gamma(t))\gamma'(t)$ jest zdefiniowana i ciągła na $[a,b]$ poza skończoną liczbą punktów.) Zamiast $\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z$ piszemy też $\int_\gamma f$ gdy jest jasne, jaka jest zmienna całkowania. [3]

Stwierdzenie 1. *Niech $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ będzie drogą, a $\tau : [a',b'] \to [a,b]$ kawałkami gładkim homeomorfizmem. Wówczas dla każdej funkcji ciągłej $f : \mathrm{im}(\gamma) \to \mathbb{C}$ ma miejsce równość $\int\limits_{\gamma\circ\tau} f = \pm \int\limits_\gamma f$, gdzie znak jest dodatni gdy homeomorfizm τ jest rosnący, zaś ujemny gdy jest malejący.*

Dowód. Oczywiście,

$$\int_{\gamma\circ\tau} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{a'}^{b'} f(\gamma\circ\tau(t))(\gamma\circ\tau)'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{a'}^{b'} f(\gamma(\tau(t)))\gamma'(\tau(t))\tau'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Podstawienie $\tau(t) = s$ pokazuje, że ostatnia całka jest równa $\pm\int\limits_a^b f(\gamma(s))\gamma'(s)\,\mathrm{d}s$ (znak taki, jak wyżej). Pozostaje skorzystać z tego, że $\int\limits_a^b f(\gamma(s))\gamma'(s)\,\mathrm{d}s = \int\limits_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z$. □

Uwaga 1. Użyteczne jest takie oszacowanie: gdy $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ jest drogą i f jest funkcją ciągłą na $\mathrm{im}(\gamma)$, to

$$\left|\int_\gamma f\right| \leqslant \ell(\gamma)M, \quad \text{gdzie} \quad \ell(\gamma) \stackrel{def}{=} \int_a^b |\gamma'(t)|\,\mathrm{d}t \quad \text{i} \quad M \stackrel{def}{=} \sup\{|f(z)| : z \in \mathrm{im}(\gamma)\}.$$

Wynika ono stąd, że $|\int\limits_\gamma f| \leqslant \int\limits_a^b |f(\gamma(t))||\gamma'(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \int\limits_a^b M|\gamma'(t)|\,\mathrm{d}t$. □

[3] Ten skrót zwiększa przejrzystość zapisu całki, lecz ma swą wadę: ukrywa to, że w istocie całkujemy nie funkcję, a formę $f(z)\mathrm{d}z$. Nie definiujemy tu nawet pojęcia formy różniczkowej, a przed Czytelnikami zaznajomionymi z nim usprawiedliwiamy przyjęty zapis umową, by w wyrażeniu $\int_\gamma f$ utożsamiać funkcję f z formą $f(z)\mathrm{d}z$.

Powyższą liczbę $\ell(\gamma)$ nazywamy *długością drogi* γ. Jak w stwierdzeniu 1 sprawdza się, że $\ell(\gamma) = \ell(\gamma \circ \tau)$ dla każdego homeomorfizmu kawałkami gładkiego $\tau : [a', b'] \to [a, b]$.

Z uwagi 1 wynika następujący

Wniosek 1. *Gdy ciąg funkcji ciągłych $f_n : U \to \mathbb{C}$ jest niemal jednostajnie zbieżny do funkcji $f : U \to \mathbb{C}$, to $\int_\gamma f_n \to \int_\gamma f$ dla każdej drogi γ w U.*

Dowód. Ustalmy drogę γ. Zbiór $K = \mathrm{im}(\gamma)$ jest zwarty, jako ciągły obraz odcinka. Zatem $|\int_\gamma f_n - \int_\gamma f| \le l(\gamma)\|f_n - f\|_K \to 0$, gdyż ciąg (f_n) ma własność ii) z §I.3 . □

Definicja. a) Gdy $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ jest ścieżką, to przez $-\gamma$ oznaczamy ścieżkę

$$(-\gamma)(t) = \gamma(a + b - t), \quad t \in [a, b].$$

b) Gdy ścieżki $\lambda : [a, b] \to \mathbb{C}$ i $\mu : [c, d] \to \mathbb{C}$ spełniają warunek $\lambda(b) = \mu(c)$, to przez $\lambda\#\mu$ oznaczamy ścieżkę $[-1, 1] \to \mathbb{C}$, zdefiniowaną wzorem

$$(\lambda\#\mu)(t) = \begin{cases} \lambda(t(b-a)+b) & \text{gdy } t \in [-1, 0], \\ \mu(t(d-c)+c) & \text{gdy } t \in [0, 1]. \end{cases}$$

Wniosek 2. *Gdy droga $\lambda\#\mu$ jest określona oraz funkcje f i g są ciągłe na* $\mathrm{im}(\lambda)$ *oraz* $\mathrm{im}(\lambda) \cup \mathrm{im}(\mu)$*, odpowiednio, to*

$$\int_{-\lambda} f = -\int_{\lambda} f, \qquad \int_{\lambda\#\mu} g = \int_{\lambda} g + \int_{\mu} g$$

Dowód. Wynika to ze stwierdzenia. □

Przejdźmy do omówienia całek po łukach zorientowanych i po łamanych.

Definicja. a) Obraz ścieżki (odp. obraz ścieżki zamkniętej) nazywamy *krzywą* (odp. *krzywą zamkniętą*); mówimy też, że droga γ jest *parametryzacją* krzywej $\mathrm{im}(\gamma)$. (Parametryzacji jest wiele.) Gdy ścieżka jest drogą, to mówimy wyżej o krzywej kawałkami gładkiej.

b) *Łuk* to krzywa, której pewna parametryzacja jest różnowartościowa; zaś *krzywa Jordana* to krzywa zamknięta, której pewna parametryzacja $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ jest różnowartościowa na $[a, b)$ i na $(a, b]$). (Chodzi tu o to, by $\gamma(s) = \gamma(t) \Leftrightarrow (s = t$ lub $s, t \in \{a, b\})$.) Łuk jest homeomorficzny z odcinkiem domkniętym, a krzywa Jordana – z okręgiem (dlaczego?)

Dwa *krańce* łuku wyróżnione są tym, że dopełnienie każdego z nich (w łuku) jest zbiorem spójnym.

c) Łuk L jest *zorientowany*, gdy jeden z dwóch jego krańców nazwano *początkiem*; drugi kraniec nazywamy wtedy *końcem* łuku. Gdy łuk L jest ponadto kawałkami gładki, to możemy wziąć jakąkolwiek jego różnowartościową parametryzację $\lambda : [0,1] \to L$, taką, że $\lambda(0)$ jest początkiem łuku L. Całkę $\int_\lambda f$ (która na mocy stwierdzenia nie zależy od parametryzacji λ, spełniającej te warunki) oznaczymy $\int_L f$ i nazwiemy całką funkcji f po łuku zorientowanym L. Dla dowolnego łuku $L_0 \subset L$ możemy też mówić o *orientacji indukowanej* przez L na L_0: za początkowy w L_0 przyjmujemy ten kraniec, który przy powyższej parametryzacji λ odpowiada mniejszej wartości parametru $t \in [0,1]$.

Uwaga 2. a) Często dla obliczenia całki $\int_\lambda f$ dziedzinę $[a,b]$ drogi γ dzielimy na odcinki punktami $a = t_0 < \cdots < t_n = b$ takimi, że droga γ jest różnowartościowa na $[t_{i-1}, t_i]$, dla $i = 1, ..., n$. Prowadzi to do pokrycia krzywej $\mathrm{im}(\gamma)$ łukami $L_i = \gamma([t_{i-1}, t_i])$, zorientowanymi tak, że L_i przecina L_{i+1} w punkcie $\gamma(t_i)$, końcowym dla L_{i-1} i początkowym dla L_i. Oczywiście, $\int_\lambda f = \sum_{i=1}^n \int_{L_i} f$.

b) Opisany podział dziedziny $[a,b]$ jest zawsze możliwy. Pomijamy nietrudny dowód, gdyż ważniejsze jest to, że informację o całce $\int_\gamma f$ możemy jasno przekazać, rysując łuki L_i i zaznaczając orientacje strzałkami. Do rysunków takich będziemy się często odwoływać.

Uwaga 3. W szczególności, gdy na kawałkami gładkiej krzywej Jordana J wybrano zorientowany łuk $K \subset J$, to łuk $L = \mathrm{cl}(J \setminus K)$ orientujemy w oczywisty sposób (początki obu łuków mają być różne). Wówczas $\int_K f + \int_L f = \pm \int_\gamma f$ dla każdej funkcji ciągłej $f : J \to \mathbb{C}$ i każdej parametryzacji $\gamma : [a,b] \to J$, która jest różnowartościowa na $[a,b)$. Ponadto, znak jest dodatni wtedy i tylko wtedy, gdy parametryzacja γ w następujący sposób jest zgodna z orientacją łuku K: istnieje przedział $[a', b'] \subset [a,b]$ taki, że $\gamma([a',b']) \subset K$ i $\gamma(a')$ jest początkiem łuku $\gamma([a',b'])$ w orientacji, indukowanej przez K. By dowieść tych własności, wystarczy podzielić J na łuki, wyznaczone przez krańce łuku K i punkt $\gamma(a) = \gamma(b)$. $\boxminus$

Kawałkami gładką krzywą Jordana, na której wskazano pewien zorientowany łuk K, nazywamy *zorientowaną*. Możemy więc mówić o całce funkcji ciągłej f po takiej krzywej – jest nią $\int_K f + \int_L f$, gdzie łuk zorientowany L opisano wyżej. Możemy też określić, kiedy dwa łuki K_1, K_2 wyznaczają tę samą orientacje krzywej Jordana–wtedy mianowicie, gdy istnieje parametryzacja tej krzywej, zgodna z orientacją każdego z łuków i różnowartościowa na wnętrzu odcinka, na którym jest określona.

Przykład. a) Niech $z_1, z_2, ..., z_n \in \mathbb{C}$. Przez $[z_1, z_2]$ oznaczymy drogę $[0,1] \ni t \mapsto tz_2 + (1-t)z_1$, a także jej obraz, który dla $z_1 \neq z_2$ traktujemy jako łuk zorientowany, o początku w z_1. Ogólniej, przez $[z_1, ..., z_n]$ oznaczymy zarówno drogę, zdefiniowaną indukcyjnie wzorem

$$[z_1, ..., z_n] = [z_1, ..., z_{n-1}]\#[z_{n-1}, z_n]$$

jak i jej obraz $\bigcup_{1\leqslant i<n}[z_i, z_{i+1}]$, zwany *łamaną o wierzchołkach* $z_1, ..., z_n$. Z wniosku 2 wynika, że całka po drodze $[z_1, ..., z_n]$ jest równa sumie całek po $[z_i, z_{i+1}]$.

b) W szczególności, gdy $\triangle$ jest trójkątem (tzn. $\triangle = \{t_1 a + t_2 b + t_3 c : t_1, t_2, t_3 \geq 0$ i $t_1 + t_2 + t_3 = 1\}$ dla pewnych $a, b, c \in \mathbb{C}$), to przez $\partial\triangle$ oznaczymy łamaną $[a, b, c, a]$, gdzie wierzchołki a, b, c są wzięte w takiej kolejności, by obieg brzegu $\partial\triangle$ był „przeciwny do ruchu wskazówek zegara". Definicja ta ma sens poza przypadkiem, gdy trójkąt $\triangle$ jest zdegenerowany (tzn. jego wierzchołki leżą na prostej)–a wtedy kolejność wierzchołków obieramy dowolnie. Opisaną orientację pętli $\partial\triangle$ nazywamy *dodatnią*.

c) Przez brzeg dysku $D = D(z_0, r)$ rozumiemy krzywą Jordana $\partial D = \{z : |z - z_0| = r\}$ zorientowaną tak, by jej obieg był przeciwny do ruchu wskazówek zegara. Orientacja ta jest zgodna z parametryzacją $[0, 2\pi] \ni t \mapsto z_0 + r\mathrm{e}^{it}$, wobec czego $\int\limits_{\partial D} f = \int\limits_0^{2\pi} f(z_0 + r\mathrm{e}^{it})\mathrm{i}r\mathrm{e}^{it}\,\mathrm{d}t$.

d) Należy jednak wyjaśnić, kiedy to orientacja krzywej $\partial\triangle$ czy ∂D jest dodatnia, czyli „wyznacza obieg, przeciwny do ruchu wskazówek zegara". W obu przypadkach, gdy $X = \triangle$ i $X = D$, obierzmy we wnętrzu zbioru X punkt p i bez zmniejszenia ogólności załóżmy, że $p = 0$ (inaczej dokonamy odpowiedniego przesunięcia). Żądaną orientację wyznacza każdy łuk $K \subset \partial X$, którego początkiem jest punkt przecięcia półprostej $[0, \infty)_{\mathbb{R}}$ z ∂X i który leży w półpłaszczyźnie $\operatorname{Im} z > 0$. Ogólniej, można tak zdefiniować dodatnią orientację krzywej Jordana, będącej brzegiem pewnego zbioru wypukłego. $\square$

Uwaga 4. Dociekliwy czytelnik zauważy, że uzasadnienia wymaga niezależność ostatniej definicji od wyboru punktu $p \in X$. Możliwość zgodnego wyróżnienia dodatniej orientacji krzywych Jordana (w naszym przypadku, brzegów dysków czy trójkątów) jest dość subtelną własnością płaszczyzny $\mathbb{C}$. Własność tę mają też niektóre inne powierzchnie, w tym sfera; jednak wstęga Möbiusa jej nie ma, podobnie jak płaszczyzna rzutowa czy butelka Kleina. $\boxminus$

Zadania:

1. Niech funkcja $f : U \to \mathbb{C}$ będzie ciągła. Dowieść, że dla każdego $n \geq 2$ funkcja $(z_1, \ldots, z_n) \mapsto \int\limits_{[z_1,\ldots,z_n]} f$ jest ciągła na przestrzeni $Y = \{(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n : [z_1, \ldots, z_n] \subset U\}$. (Wskazówka: przyjąć wpierw $n = 2$.)

2*. Niech zbiory $U, W \subset \mathbb{C}$ będą otwarte, zaś $[a, b]$ będzie przedziałem w $\mathbb{R}$.

i) Dowieść, że gdy funkcja $h : U \times [a,b] \to \mathbb{C}$ jest ciągła, to $U \ni z \mapsto \int\limits_a^b h(z,t)\,\mathrm{d}t$ też.

ii) Dowieść, że gdy $\gamma : [a,b] \to W$ jest drogą, zaś funkcja $f : U \times W \to \mathbb{C}$ ma w każdym punkcie $(z_0, w_0) \in U \times W$ pochodną cząstkową $\frac{\partial f}{\partial z}(z_0, w_0)$, zależną w sposób ciągły od pary (z_0, w_0), to funkcja $F(z) = \int_\gamma f(z,w)\mathrm{d}w$ jest holomorficzna w U oraz $F'(z_0) = \int\limits_\gamma \frac{\partial f}{\partial z}(z_0, w)\mathrm{d}w$ dla $z_0 \in U$. (Wskazówka: zastosować i) do funkcji $h(z,t) = g(z, \gamma(t))\gamma'(t)$, gdzie $g(z,w) = (f(z,w) - f(z_0,w))/(z - z_0)$ gdy $z \neq z_0$ i $g(z_0, w) = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0, w)$.)

Uwaga: Można dowieść, że jeśli funkcja $\frac{\partial f}{\partial z}$ jest określona na $U \times W$, to jest ciągła.

3*. Dla funkcji $f : U \to \mathbb{C}$ i drogi $\gamma : [a,b] \to U$, gdzie zbiór U jest otwarty w $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$, przyjmijmy $\int_\gamma f(x,y)(\mathrm{d}x + \mathrm{i}\mathrm{d}y) = \int_\gamma (u(x,y)\mathrm{d}x - v(x,y)\mathrm{d}y) + \mathrm{i}\int_\gamma (u(x,y)\mathrm{d}y + v(x,y)\mathrm{d}x)$, gdzie $u = \mathrm{Re}\, f, v = \mathrm{Im}\, f$ i całki po prawej stronie rozumiemy zgodnie z definicjami z AM II. (Zakładamy, że funkcje u i v są klasy C^1.) Dowieść, że $\int\limits_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_\gamma f(x,y)(\mathrm{d}x + \mathrm{i}\mathrm{d}y)$.

2 Całka po drodze a funkcja pierwotna

Definicja. Niech $F, f : U \to \mathbb{C}$. Powiemy, że F jest *funkcją pierwotną* funkcji f, jeśli w każdym punkcie $z \in U$ pochodna $F'(z)$ istnieje i jest równa $f(z)$.

Stwierdzenie 1. *Gdy F jest funkcją pierwotną funkcji ciągłej $f : U \to \mathbb{C}$, to*

$$\int\limits_\gamma f = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) \quad \textit{dla każdej drogi } \gamma : [a,b] \to U.$$

Dowód. $\int\limits_\gamma f = \int\limits_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,\mathrm{d}t = \int\limits_a^b (F \circ \gamma)'(t)\,\mathrm{d}t = (F \circ \gamma)(b) - (F \circ \gamma)(a).$ □

Przykład. Gdy funkcja f jest wielomianem, to ma ona funkcję pierwotną, wobec czego $\int_\gamma f = 0$ dla dowolnej drogi zamkniętej γ. Gdy $0 \notin \mathrm{im}\,\gamma$, to jest tak i dla $f(z) = 1/z^n$ i $n \geq 2$, z tym samym uzasadnieniem. Natomiast $\int_\gamma \frac{1}{z}\mathrm{d}z \neq 0$ dla $\gamma = \partial D(0,1)$, co ponownie dowodzi, że funkcja $1/z$ nie ma w $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ funkcji pierwotnej. (Inny dowód daje przykład 2 w §I.7, gdy uwzględnić twierdzenie 2 w §I.8.) □

Ćwiczenie. Dowieść, że $\int\limits_{[0,T]} \mathrm{e}^{wz}\mathrm{d}z = (\mathrm{e}^{wT} - 1)/w$ i uzyskać stąd wzory na $\int\limits_0^T \mathrm{e}^{ax}\cos(bx)\mathrm{d}x$ i $\int\limits_0^T \mathrm{e}^{ax}\sin(bx)\,\mathrm{d}x$, dla $a, b \in \mathbb{R}$ i $w \in \mathbb{C}$.

Twierdzenie 1. *Niech U będzie zbiorem otwartym w $\mathbb{C}$ i niech funkcja $f : U \to \mathbb{C}$ będzie ciągła. Wówczas równoważne są warunki:*

a) Istnieje funkcja pierwotna funkcji f,

b) $\int\limits_{\gamma} f = 0$ dla każdej drogi zamkniętej γ w U.

W dowodzie wykorzystamy

Zadanie. Dowieść, że gdy zbiór U jest spójny i otwarty, to każde dwa punkty $z_0, z \in U$ można połączyć łamaną, leżącą w U.

Dowód twierdzenia. Implikacja a)⇒b) wynika ze stwierdzenia 1, gdyż $\gamma(a) = \gamma(b)$.

Przypuśćmy teraz, że zachodzi b); skonstruujemy funkcję pierwotną F funkcji f. Możemy zakładać, że zbiór U jest spójny (bo jego składowe są otwarte w $\mathbb{C}$, wobec czego wystarczy F zbudować na każdej z nich). Ustalmy punkt $z_0 \in U$. Z zadania wynika, że dla każdego punktu $z \in U$ istnieje droga $\gamma_z : [0,1] \to U$ taka, że

$$\gamma_z(0) = z_0 \quad \text{i} \quad \gamma_z(1) = z.$$

Przyjmujemy

$$F(z) \stackrel{def}{=} \int\limits_{\gamma_z} f \quad \text{dla } z \in U.$$

Udowodnimy, że jest to szukana funkcja pierwotna. W tym celu zauważmy wpierw, że gdy punkty $z \in U$ i $u \in \mathbb{C}$ spełniają warunek $|z - u| < \operatorname{dist}(z, \mathbb{C} \setminus U)$, to

$$[z,u] \subset U \quad \text{i} \quad F(u) - F(z) = \int\limits_{[z,u]} f \tag{*}$$

Istotnie, $|w - z| \leqslant |z - u| < \operatorname{dist}(z, \mathbb{C} \setminus U)$ dla $w \in [z,u]$, skąd $[z,u] \subset U$. Ponadto, droga $\lambda \stackrel{def}{=} \gamma_z \#[z,u]\#(-\gamma_u)$ jest zamknięta, wobec czego

$$0 = \int\limits_{\lambda} f = \int\limits_{\gamma_z} f + \int\limits_{[z,u]} f - \int\limits_{\gamma_u} f = F(z) + \int\limits_{[z,u]} f - F(u), \tag{**}$$

czyli $F(u) - F(z) = \int\limits_{[z,u]} f$.

Z (*) otrzymujemy, przy wcześniejszych założeniach,

$$|F(u) - F(z) - f(z)(u - z)| = \left| \int\limits_{[z,u]} f(w)\,\mathrm{d}w - \int\limits_{[z,u]} f(z)\,\mathrm{d}w \right|$$

$$= \left| \int\limits_{[z,u]} (f(w) - f(z))\,\mathrm{d}w \right| \leqslant |z - u| \sup_{w \in [z,u]} |f(w) - f(z)|.$$

Zatem

$$\left| \frac{F(u) - F(z)}{u - z} - f(z) \right| \leqslant \sup_{w \in [z,u]} |f(w) - f(z)| \xrightarrow[u \to z]{} 0.$$

(Zbieżność wynika z ciągłości funkcji f.) Tak więc $F'(z) = f(z)$, $\forall z \in U$. $\square$

Podobne jest następujące

Twierdzenie 2. *Niech zbiór $U \subset \mathbb{C}$ będzie wypukły i otwarty, zaś funkcja $f : U \to \mathbb{C}$ będzie ciągła. Jeśli*

$$\int\limits_{\partial\triangle} f = 0 \quad \textit{dla dowolnego (być może zdegenerowanego) trójkąta } \triangle \subset U, \tag{5}$$

to f ma funkcję pierwotną (inaczej: to $\int\limits_{\gamma} f = 0$ dla każdej drogi zamkniętej γ w U).

Dowód. Ustalmy punkt $z_0 \in U$ i dla $z \in U$ przyjmijmy $\gamma_z = [z_0, z]$ oraz $F(z) = \int\limits_{\gamma_z} f$. Ponieważ zbiór U jest wypukły, więc droga γ_z przyjmuje wartości w U. Ponadto powyższy dowód równości $F'(z) = f(z)$ pozostaje słuszny, bo z (5) wynika prawdziwość (**) i w konsekwencji prawdziwość (*). $\boxminus$

Zadanie. * Niech punkt z_0 i odcinek $[p, q]$ leżą w zbiorze U, w którym analityczna jest funkcja f.

a) Dowieść, że $|f(p) - f(q)| \le |p - q| \sup_{z \in [p,q]} |f'(z|$ oraz $|f(p) - f(q) - f'(z_0)(p - q)| \le |p - q| \sup_{z \in [p,q]} |f'(z) - f'(z_0)|$. (Wskazówka: stwierdzenie 1, zastosowane do f'; druga nierówność wynika z pierwszej, odniesionej do należytej funkcji.)

b) Wywnioskować, że $|f(p) - f(q)| \ge |p - q| \big(|f'(z_0)| - \sup_{z \in [p,q]} |f'(z) - f'(z_0)|\big)$.

3 Lemat Goursata i istnienie funkcji pierwotnej na dysku

Twierdzenie 1 (Lemat Goursata). *Gdy funkcja f jest holomorficzna w zbiorze U, to*

$$\int_{\partial\triangle} f = 0 \quad \textit{dla każdego trójkąta } \triangle \subset U. \tag{5}$$

Dowód. Podzielmy dany trójkąt $\triangle$ jak na rysunku i odnotujmy poniższą równość:

$$\int_{\partial\triangle} f = \int_{\partial\triangle'} f + \int_{\partial\triangle''} f + \int_{\partial\triangle'''} f + \int_{\partial\triangle''''} f$$

Istnieje zatem trójkąt $\triangle_1 \in \{\triangle', \triangle'', \triangle''', \triangle''''\}$ taki, że

$$\left|\int_{\partial\triangle_1} f\right| \geqslant \frac{1}{4}\left|\int_{\partial\triangle} f\right|$$

oraz

$$\ell(\partial\triangle_1) = \frac{1}{2}\ell(\partial\triangle), \quad \mathrm{diam}(\triangle_1) = \frac{1}{2}\,\mathrm{diam}(\triangle)$$

Gdy znamy trójkąt $\triangle_i$, to dzielimy go w analogiczny sposób, otrzymując indukcyjnie trójkąty $\triangle \supset \triangle_1 \supset \triangle_2 \supset \dots$ takie, że

$$\ell(\partial\triangle_i) = \frac{1}{2^i}\ell(\partial\triangle), \quad \mathrm{diam}(\triangle_i) = \frac{1}{2^i}\,\mathrm{diam}(\triangle) \tag{p}$$

oraz

$$\left|\int_{\partial\triangle_i} f\right| \geqslant \frac{1}{4^i}\left|\int_{\partial\triangle} f\right| \tag{q}$$

Każdy z trójkątów $\triangle_i$ jest zbiorem zwartym i $\triangle_1 \supset \triangle_2 \supset \dots$, więc na podstawie twierdzenia Cantora istnieje punkt $p \in \bigcap_{i=1}^{\infty} \triangle_i$.

Z istnienia pochodnej $f'(p)$ wynika, że

$$\text{przy } r(z) \overset{def}{=} f(z) - \underbrace{(f(p) + f'(p)(z-p))}_{g(z)} \text{ zachodzi } \frac{r(z)}{z-p} \xrightarrow[z\to p]{} 0. \tag{r}$$

Ponieważ $f = g + r$, więc dla każdego $i \geqslant 1$,

$$\left|\int_{\partial\triangle_i} f\right| \leqslant \left|\int_{\partial\triangle_i} g\right| + \ell(\partial\triangle_i) \sup_{z\in\partial\triangle_i} |r(z)| \tag{s}$$

Ale $\int\limits_{\partial\triangle_i} g = 0$, bo wielomian g ma oczywiście funkcję pierwotną. Ponadto $r(p) = 0$, zaś dla $z \in \triangle_i \setminus \{p\}$ mamy $|r(z)| = \frac{|r(z)|}{|z-p|}|z-p| \leqslant \frac{|r(z)|}{|z-p|}\operatorname{diam}(\triangle_i)$. Zatem, na mocy (q) i (s),

$$\left|\int\limits_{\partial\triangle} f\right| \leqslant 4^i \left|\int\limits_{\partial\triangle_i} f\right| \leqslant 4^i \ell(\partial\triangle_i)\left(\sup_{z\in\partial\triangle_i}\frac{|r(z)|}{|z-p|}\right)\operatorname{diam}(\triangle_i)$$

Stąd wobec (p) otrzymujemy:

$$\left|\int\limits_{\partial\triangle} f\right| \leqslant 4^i \cdot \frac{1}{2^i}\ell(\triangle) \cdot \frac{1}{2^i}\operatorname{diam}(\triangle) \cdot \sup_{z\in\partial\triangle_i}\frac{|r(z)|}{|z-p|} \xrightarrow[i\to\infty]{} 0,$$

gdzie zbieżność wynika z (r) i (p). Tak więc $\int\limits_{\partial\triangle} f = 0$.

Odnotujmy, że choć rysunek dotyczył niezdegenerowanego trójkąta $\triangle$, to rozumowanie jest poprawne i w przypadku zdegenerowanym–co kończy dowód. □

Z lematu Goursata i twierdzenia 2 z §2 wynika

Wniosek 1. *Funkcja, holomorficzna w danym dysku, ma w nim funkcję pierwotną.*

4 Twierdzenie Cauchy'ego o równości całek (wersja homotopijna)

Poniższe twierdzenie jest centralne dla tego wykładu:

Twierdzenie 1 (Cauchy'ego o równości całek)**.** *Gdy kawałkami gładkie pętle λ, μ są homotopijne w zbiorze $U \subset \mathbb{C}$, to*

$$\int_\lambda f = \int_\mu f \quad \textit{dla każdej funkcji } f \in H(U).$$

Przypomnijmy, co oznacza (znana z wykładu z topologii) homotopijność dwóch pętli.

Definicje. a) Powiemy, że pętle λ, μ są w zbiorze U *swobodnie homotopijne*, jeśli istnieje rodzina pętli $(\gamma_s : [a, b] \to U)_{s\in[0,1]}$ taka, że $\gamma_0 = \lambda, \gamma_1 = \mu$ i wzór

$$\Gamma(s, t) = \gamma_s(t) \quad \text{dla } (s, t) \in [0, 1] \times [a, b] \tag{!}$$

zadaje ciągłe przekształcenie $\Gamma : [0, 1] \times [a, b] \to U$.

b) O rodzinie powyższej (a także o wyznaczonej przez nią funkcji Γ) powiemy, że jest *swobodną homotopią pętli*, łączącą pętle λ i μ w zbiorze U. Słowa „swobodną" i „swobodnie" będziemy na ogół opuszczać – odnoszą się ono do tego, że <u>nie</u> żądamy, by punkt $\gamma_s(a) = \gamma_s(b)$ był stały (tzn., by nie zależał od s).

Uwaga 1. a) Homotopię pętli $(\gamma_s)_{s\in[0,1]}$, łączącą λ z μ, wyobrażać sobie możemy jako rodzinę pętli zależnych od czasu $s \in [0,1]$, przy czym chwili $s = 0$ odpowiada jedna z pętli λ, μ, zaś chwili $s = 1$–druga. Żąda się, by zależność pętli γ_s od czasu s była ciągła–przez co rozumiemy ciągłość funkcji $(s,t) \mapsto \gamma_s(t)$, oznaczonej wyżej przez Γ.

b) Ponieważ $\gamma_0 = \lambda$, $\gamma_1 = \mu$ oraz $\gamma_s(a) = \gamma_s(b)$ dla $s \in [0,1]$ (bo γ_s jest pętlą!), więc

$$\Gamma(0,t) = \lambda(t) \text{ i } \Gamma(1,t) = \mu(t)\ \forall t \in [a,b], \text{ oraz } \Gamma(s,a) = \Gamma(s,b)\ \forall s \in [0,1]. \qquad (+)$$

To, że homotopią pętli łączącą λ z μ nazywana jest i rodzina pętli $(\gamma_s)_{s\in[0,1]}$, i spełniająca warunki $(+)$ funkcja ciągła $\Gamma : [0,1] \times [a,b] \to \mathbb{C}$, tłumaczy się tym, że wzór (!) pozwala zarówno wyznaczyć Γ, gdy znamy rodzinę (γ_s), jak i tę rodzinę, gdy znamy Γ.

Dowód twierdzenia Cauchy'ego. Ustalmy zbiór U i funkcję $f \in H(U)$. Możemy zakładać, że U jest zbiorem otwartym. (Inaczej przedłużymy f do pewnej funkcji $\widetilde{f} \in H(\widetilde{U})$, gdzie $\widetilde{U} \subset \mathbb{C}$ jest zbiorem otwartym, i zastąpimy U przez $\widetilde{U}$, zaś f przez $\widetilde{f}$.)

Z założenia, istnieje funkcja ciągła $\Gamma : [0,1] \times [a,b] \to U$ spełniająca warunki $(+)$. Ponieważ prostokąt $[0,1] \times [a,b]$ jest zwarty, więc funkcja ta jest jednostajnie ciągła, a jej obraz $\mathrm{im}(\Gamma) = \Gamma([0,1] \times [a,b])$ jest zwarty. Wynika stąd, że liczba

$$\varepsilon \stackrel{def}{=} \mathrm{dist}(\mathrm{im}(\Gamma), \mathbb{C} \setminus U)$$

jest dodatnia, oraz istnieje liczba $\delta > 0$ taka, że

$$\max(|s - s'|, |t - t'|) < \delta \Rightarrow |\Gamma(s,t) - \Gamma(s',t')| < \varepsilon.$$

Podzielmy prostokąt $[0,1] \times [a,b]$ odcinkami $\{s_i\} \times [a,b]$ i $[0,1] \times \{t_i\}$, $i = 0,\ldots,n$, na prostokąciki o średnicy $< \delta$. (Zakładamy, że $s_0 = 0$, $s_n = 1$, $t_0 = a$, $t_n = b$.) Niech

$$p_{ij} = \Gamma(s_i, t_j)$$

i rozważmy następujące łamane (są one zamknięte, bo $p_{i0} = p_{in}$ ze względu na (2)):

$$L_i = [p_{i0}, p_{i1}, \ldots, p_{in}] \quad \text{i} \quad C_{ij} = [p_{ij}, p_{i,j+1}, p_{i+1,j+1}, p_{i+1,j}, p_{ij}].$$

Wszystkie wierzchołki łamanej C_{ij} leżą w dysku $D(p_{ij}, \varepsilon) \subset U$. Cała łamana C_{ij} leży więc w tym dysku i $\int\limits_{C_{ij}} f = 0$, na mocy wniosku w §3 i stwierdzenia w §2. (To kluczowe miejsce dowodu.) Dodajmy te równości przy i ustalonym, lecz j przebiegającym $0,\ldots,n-1$; otrzymamy zależności (patrz rysunek)

$$\int_{L_i} f - \int_{L_{i+1}} f = 0 \ \text{ dla } \ i = 0,\ldots,n-1. \qquad (*)$$

Tak więc $\int\limits_{L_0} f = \cdots = \int\limits_{L_n} f$. Twierdzimy, że podobnie

$$\int_\lambda f = \int_{L_0} f \qquad \text{oraz} \qquad \int_\mu f = \int_{L_n} f \tag{**}$$

Istotnie, tym razem pętla $\lambda_{|[t_j,t_{j+1}]}\#[p_{0,j+1}, p_{0j}]$ przebiega w dysku $D(p_{0j}, \varepsilon) \subset U$, skąd całka funkcji f po niej jest równa zeru. Całki po $\lambda_{|[t_j,t_{j+1}]}$ i po $[p_{0j}, p_{0,j+1}]$ są więc równe i po dodaniu tych n równości otrzymujemy pierwszą zależność w (**). Dowód drugiej jest analogiczny.

Z (**) i równości $\int\limits_{L_0} f = \int\limits_{L_n} f$ wynika, że $\int\limits_\lambda f = \int\limits_\mu f$. $\square$

Uwaga 2. * Postawmy pytanie, czy twierdzenie Cauchy'ego pozostaje słuszne dla dróg λ, μ, które niekoniecznie są pętlami. Odpowiedź jest negatywna, gdy przez homotopijność tych dróg w zbiorze U rozumieć jedynie istnienie rodziny ścieżek $(\gamma_s : [a,b] \to U)_{s\in[0,1]}$, takiej, że $\gamma_0 = \lambda, \gamma_1 = \mu$ i zachodzi (!). Jeśli jednak żądać ponadto, by homotopia (γ_s) miała stałe krańce, tzn. by $\gamma_s(c) = \gamma_0(c)$ dla $c = a, b$ i $s \in [0,1]$, to odpowiedź jest pozytywna – co wynika z twierdzenia 1, bo pętla $\lambda\#(-\mu)$ jest wówczas homotopijna z pętlą stałą. (Szczegóły są pozostawione jako zadanie.) Oczywiście, ten dodatkowy warunek może być spełniony tylko wtedy, gdy $\lambda(a) = \mu(a)$ i $\lambda(b) = \mu(b)$.

5 Sposoby wykorzystania twierdzenia Cauchy'ego o równości całek.

Definicja. a) Pętla γ jest *homotopijnie nieistotna* w zbiorze $U \subset \mathbb{C}$, gdy jest ona w U homotopijna z (jakąkolwiek) pętlą stałą.

b) Zbiór spójny $U \subset \mathbb{C}$ jest *jednospójny*, gdy każda pętla w U jest homotopijnie nieistotna w U.

Wniosek 1. *Niech U będzie podzbiorem płaszczyzny $\mathbb{C}$ i niech funkcja $f : U \to \mathbb{C}$ będzie holomorficzna. Wówczas $\int_\gamma f = 0$ dla każdej drogi zamkniętej γ w U, która jest w U homotopijnie nieistotna. W szczególności, jeśli zbiór U jest jednospójny, to $\int_\gamma f = 0$ dla dowolnej drogi zamkniętej w U.*

Dowód. Wynika to z twierdzenia Cauchy'ego, bo całka po drodze stałej jest równa zeru.

Uwaga 1. O tym, czy pętla γ jest homotopijnie nieistotna w danym zbiorze $U \subset \mathbb{C}$, można poglądowo utwierdzić się tak: wyobraźmy sobie zbiór U jako powierzchnię tafli lodu, zaś obraz pętli γ jako przymarzniętą do tej tafli gumkę apteczną. Zakładamy, że punkty gumki parametryzowane są liczbami $t \in [a,b]$, zaś punkt, odpowiadający parametrowi t, przymarznięty jest w punkcie $\gamma(t) \in U$. (Liczbom a i b odpowiada ten sam punkt gumki) Jeśli, z chwilą odwilży, gumka skurczy się do punktu nawet wówczas, gdy kurcząc się będzie zmuszana do pozostawania w U, to pętla γ jest w U homotopijnie nieistotna, i vice versa. (Zakładamy, że gumka „chce” się kurczyć aż do osiągnięcia zerowej średnicy.)

Aczkolwiek uwaga powyższa podsuwa poprawne wyobrażenia, które wiązać można z pojęciem pętli homotopijnie nieistotnej, to nie daje ona żadnego sposobu opisania wzorami homotopii, łączącej daną pętlę λ z pętlą stałą, ani też wykluczenia istnienia takiej homotopii. A że rozważania dotyczące kurczenia się gumki mogą być mylące, więc warto poznać najprostszą klasę zbiorów, które bez wątpliwości okazują się być jednospójne.

Definicja. Zbiór $U \subset \mathbb{C}$ jest *gwiaździsty względem punktu* p, jeśli $[p,u] \subset U$ dla każdego punktu $u \in U$. Zbiór jest *gwiaździsty*, gdy jest gwiaździsty względem pewnego punktu.

Wniosek 2. *Gdy zbiór $U \subset \mathbb{C}$ jest gwiaździsty, to jest jednospójny, wobec czego $\int_\gamma f = 0$ dla każdej funkcji $f \in H(U)$ i każdej drogi zamkniętej γ w U.*

Dowód. Niech zbiór U będzie gwiaździsty względem punktu p. Homotopię, łączącą daną pętlę $\gamma : [a,b] \to U$ z pętlą stałą, określamy wzorem $\gamma_s(t) = (1-s)\gamma(t) + sp$ dla $s \in [0,1]$ i $t \in [a,b]$. Ponieważ $\gamma(a) = \gamma(b)$, więc $\gamma_s(a) = \gamma_s(b)$ dla $s \in [a,b]$. $\square$

Zastosowania powyższych pojęć będziemy ilustrować następującym zadaniem.

Zadanie. * Niech X oznacza zbiór, powstały z koła domkniętego $\overline{D}$ przez wycięcie wnętrz dwóch wypukłych i rozłącznych wielokątów otwartych W_1, W_2, jak na rysunku. Niech brzegi koła i wielokątów zorientowane będą dodatnio. Udowodnić, że

$$\int_{\partial D} f = \int_{\partial W_1} f + \int_{\partial W_2} f, \quad \text{dla każdej funkcji} \quad f \in H(X).$$

Zaczniemy od wprowadzenia definicji, pozwalających zadanie sformułować zwięźlej.

Definicja. * a) *Cyklem* w zbiorze $U \subset \mathbb{C}$ nazywamy każde wyrażenie $\gamma = \gamma_1 + ... + \gamma_n$, gdzie $\gamma_1, ..., \gamma_n$ są drogami zamkniętymi w U. Gdy $\gamma = \gamma_1 + ... + \gamma_k$ i $\lambda = \lambda_1 + ... + \lambda_l$ są cyklami w U, to przez $\gamma + \lambda$ oznaczamy cykl $\gamma_1 + ... + \gamma_k + \lambda_1 + ... + \lambda_l$, zaś przez $\gamma - \lambda$ cykl $\gamma_1 + ... + \gamma_k + (-\lambda_1) + ... + (-\lambda_l)$.

b) Dla cyklu $\gamma = \gamma_1 + ... + \gamma_n$ w U i funkcji $f \in H(U)$ przyjmujemy

$$\int_\gamma f = \sum_{i=1}^{n} \int_{\gamma_i} f.$$

c) Cykl γ jest *równoważny w U cyklowi zerowemu*, jeśli $\int_\gamma f = 0$ dla każdej funkcji $f \in H(U)$. Ogólniej, *cykle γ i λ są równoważne w U*, jeśli $\int_\gamma f = \int_\lambda f \ \forall f \in H(U)$.

Z twierdzenia Cauchy'ego wynika natychmiast

Uwaga 2. * Gdy drogi zamknięte $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ są homotopijnie nieistotne w zbiorze U, to cykl $\gamma = \gamma_1 + \cdots + \gamma_n$ jest w U równoważny cyklowi zerowemu.

Zadanie nasze sprowadza się obecnie do następującego: dowieść, że cykle ∂D i $\partial W_1 + \partial W_2$ są równoważne w zbiorze X. Nieco inaczej, można je też sformułować tak: dowieść, że cykl $\gamma = \partial D - \partial W_1 - \partial W_2$ jest w X równoważny cyklowi zerowemu. Omówimy dwa sposoby, prowadzące do rozwiązania.

* Sposób pierwszy: zanurzenie cyklu γ w równoważną pętlę homotopijnie nieistotną. Połączmy w X ustalony punkt łukami gładkimi z każdą z pętli, których sumą jest cykl γ. Następnie, w odpowiedniej kolejności, przebiegnijmy wszystkie te pętle i łuki, przy czym łuki przebiegamy dwukrotnie, z przeciwnymi orientacjami. Otrzymamy pewną pętlę λ, w oczywisty sposób równoważną cyklowi γ. W naszej sytuacji wygląda ona tak:

.

Rysunek:

Pętla λ okazuje się być homotopijnie nieistotną w zbiorze X. Jeśli to przyjąć, zadanie jest rozwiązane: na mocy twierdzenia Cauchy'ego pętla λ, a zatem i cykl γ, są równoważne cyklowi zerowemu. Homotopijna nieistotność pętli λ wydaje się oczywista, gdy posłużyć się uwagą 1. Jednak jej ścisły dowód byłby bardzo żmudny, co jest istotną wadą tego rozwiązania. □

* Sposób drugi: powiązanie cyklu γ z pętlami, leżącymi w zbiorach gwiaździstych. Podzielmy zbiór X łukami na dogodne zbiory gwiaździste. Na rysunku, są to zbiory $A_1, ..., A_7$, których brzegi są krzywymi Jordana. Każdą z krzywych ∂A_i orientujemy dodatnio; jest wtedy widoczne, że cykle γ i $\sum_{i=1}^{7} \partial A_i$ są równoważne. A że ∂A_i leży w

gwiaździstym zbiorze $A_i \subset X$, więc każdy z cykli ∂A_i jest w X równoważny zerowemu, podobnie jak suma $\sum_{i=1}^{7} \partial A_i$ i równoważny jej cykl γ.

Rysunek:

Uwaga 3. * Drugie rozwiązanie nie zawiera już luk. Pewną jego niedogodnością jest to, że nie wskazano ogólnego sposobu konstrukcji wymaganych łuków. W przypadku danego zbioru X i cyklu, którego równoważności z cyklem zerowym chcemy dowieść, łuki tworzymy „ad hoc". Celem jest zawsze znalezienie równoważnego cyklu $\sum_{i=1}^{l} \lambda_i$, takiego, by każda z pętli λ_i leżała w pewnym gwiaździstym podzbiorze zbioru X. □

Uwaga 4. * Gdy otwory wielokątne W_1, W_2 zmienimy na kołowe, K_1 i K_2, to nadal cykl $\partial K_1 + \partial K_2$ okaże się w zbiorze X równoważny cyklowi ∂D. Istotnie, istnieją rozłączne domknięte wielokąty wypukłe W_1, W_2 takie, że $\overline{K_i} \subset W_i \subset D$ dla $i = 1, 2$. Jak wyżej dowodzi się, że cykl $\partial K_1 + \partial K_2$ jest w X równoważny cyklowi $\partial W_1 + \partial W_2$, a ten jest równoważny cyklowi ∂D.

Jako ćwiczenie pozostawione jest rozpatrzenie zmienionego zadania, w którym liczbę otworów (kołowych lub wielokątnych) zmniejszono lub zwiększono o jeden.

Przykładowe zastosowania.

a) Gdy $f \in H(\overline{D} \setminus D_0)$, gdzie D i D_0 są dyskami i $\overline{D_0} \subset D$, to $\int\limits_{\partial D_0} f = \int\limits_{\partial D} f$.

b) Gdy D jest dyskiem, to

$$\int\limits_{\partial D} \frac{1}{w - z}\, \mathrm{d}w = \begin{cases} 0 & \text{dla } z \notin \overline{D}, \\ 2\pi \mathrm{i} & \text{dla } z \in D. \end{cases}$$

c) Gdy f i g są wielomianami takimi, że $\deg g > \deg f + 1$, zaś D jest dyskiem zawierającym zbiór $g^{-1}(0)$ zer wielomianu g, to $\int\limits_{\partial D} f/g = 0$.

Dowód. a) Jest to właśnie ćwiczenie, o którym mowa w uwadze 4. Poniższe rozwiązanie jest niezależne od wcześniej omawianych i nie odwołuje się do pojęcia cyklu.

Niech $D_0 = (D(z_0, r)$; możemy założyć, że $z_0 = 0$, gdyż inaczej oba dyski przesuwamy o $-z_0$, zaś zamiast f rozpatrujemy funkcję $z \mapsto f(z + z_0)$. Niech dalej $\lambda : [a, b] \to \partial D$ będzie gładką parametryzacją okręgu ∂D, zgodną z jego orientacją i różnowartościową na $[a, b)$. Nietrudno sprawdzić, że parametryzacja $\lambda_0 = r\lambda/|\lambda|$ okręgu ∂D_0 ma analogiczne własności. Wzór

$$\gamma_s = s\lambda + (1 - s)\lambda_0 \quad \text{dla } s \in [0, 1]$$

zadaje homotopię pętli, łączącą λ_0 z λ w $\overline{D} \setminus D_0$. Teza wynika więc z twierdzenia Cauchy'ego, zastosowanego do $U = \overline{D} \setminus D_0$.

b) Funkcja $w \mapsto \frac{1}{w-z}$ jest określona i holomorficzna w zbiorze $\mathbb{C} \setminus \{z\}$. Gdy $z \notin \overline{D}$, to zbiór ten zawiera zbiór gwiaździsty $\overline{D}$, w którym pętla ∂D jest homotopijnie nieistotna, wobec czego $\int\limits_{\partial D} \frac{1}{w-z}\,\mathrm{d}w = 0$. Gdy zaś $z \in D$, to obierzmy dysk $D_0 = D(z,r)$ taki, by $\overline{D_0} \subset D$. Z a) i części c) przykładu w §1 wynika, że

$$\int\limits_{\partial D} \frac{1}{w-z}\,\mathrm{d}w = \int\limits_{\partial D_0} \frac{1}{w-z}\,\mathrm{d}w = \int\limits_0^{2\pi} \frac{r\mathrm{i}e^{\mathrm{i}t}}{(z+re^{\mathrm{i}t})-z}\,\mathrm{d}t = 2\pi\mathrm{i}.$$

c) Rozważmy dowolny dysk $D_r = D(0,r)$ o promieniu tak dużym, by $D_r \supset \overline{D}$. Z a) wynika, że

$$\Bigg|\int\limits_{\partial D} \frac{f}{g}\Bigg| = \Bigg|\int\limits_{\partial D_r} \frac{f}{g}\Bigg| \le 2\pi r \sup\{\left|\frac{f(z)}{g(z)}\right| : |z| = r\} = 2\pi \sup\{\left|\frac{zf(z)}{g(z)}\right| : |z| = r\}.$$

Ponieważ wielomian $zf(z)$ jest stopnia niższego, niż g, więc wyrażenie po prawej dąży do zera, gdy $r \to \infty$. (Korzystamy z zadania w §I.6.B.) Zatem $|\int\limits_{\partial D} f/g| = 0$. □

6 * Dwie uwagi uzupełniające.

Tylko pierwszą z tych uwag wykorzystamy (w dowodzie twierdzeń Rungego, też należących do materiału uzupełniającego). Mają one jednak charakter ogólniejszy i warto je odnotować.

Uwaga 1. * Nietrudno jest wartość całki $\int_\lambda f$ powiązać z sumami całkowymi. Jeśli bowiem punkty $a = t_0 < \dots < t_n = b$ spełniają warunek $\operatorname{diam} f(\lambda([t_{i-1}, t_i]) < \varepsilon$ dla $i = 1, \dots, n$, to

$$|\int_\lambda f - \sum_{i=1}^n f(w_i)(\lambda(t_i) - \lambda(t_{i-1}))| < \varepsilon \cdot \ell(\lambda) \quad \text{gdy } w_i \in \lambda([t_{i-1}, t_i]) \text{ dla } i \le n. \tag{6}$$

Istotnie, gdy przyjmiemy $\lambda_i \stackrel{def}{=} \lambda_{|[t_{i-1},t_i]}$, to $|\int\limits_{\lambda_i} f - \int\limits_{\lambda_i} f(w_i)| < \varepsilon \cdot \ell(\lambda_i)$ i $\int\limits_{\lambda_i} f(w_i) = f(w_i)(\lambda(t_i) - \lambda(t_{i-1}))$, skąd wynika (6).

Obierając dostatecznie drobny podział $a = t_0 < \dots < t_n = b$ możemy więc całkę $\int_\lambda f$ dowolnie blisko przybliżyć sumą całkową $\sum_{i=1}^n f(w_i)(\lambda(t_i) - \lambda(t_{i-1}))$. □

Uwaga 2. * Można sum całkowych użyć do zdefiniowania całek funkcji ciągłych po tzw. ścieżkach prostowalnych. Istotniejsze dla teorii funkcji analitycznych jest jednak to, że twierdzenie Cauchy'ego pozwala zdefiniować całkę funkcji holomorficznej f po dowolnej ścieżce λ w zbiorze otwartym $U = \mathrm{dom}(f)$, jak następuje. Obierzmy dowolną drogę μ w U, która ma tę samą dziedzinę $[a, b]$ i te same krańce, co droga λ, i jest z nią homotopijna w U poprzez homotopię o stałych krańcach; patrz uwaga .... w §4. Na mocy tejże uwagi i poniższego zadania, takie drogi μ istnieją, a wartość $\int_\lambda f$ jest dla nich wspólna. Wartość tę przyjmujemy za $\int_\lambda f$. Dzięki takiemu rozszerzeniu definicji całki funkcji holomorficznej, można zastąpić drogi przez ścieżki we wszystkich twierdzeniach tu rozpatrywanych.

Inną jeszcze (równoważną) możliwość zdefiniowania całki funkcji holomorficznej f po ścieżce λ daje pojęcie *funkcji pierwotnej funkcji f wzdłuż λ*. Nie omawiamy go tu, odsyłając zainteresowanych czytelników do książki Szabata.

Zadanie. Niech $\lambda : [a, b] \to U$ będzie ścieżką, a ε liczbą mniejszą od $\mathrm{dist}(\mathrm{im}(\lambda), \mathbb{C} \setminus U)$. Dowieść, że:

a) Gdy ścieżka $\mu : [a, b] \to \mathbb{C}$ jest ε–bliska λ i $\gamma_s = s\lambda + (1-s)\mu$ dla $s \in [0, 1]$, to (γ_s) jest homotopią ścieżek w U (tzn. funkcja $(s, t) \mapsto \gamma_s(t)$ jest ciągła i przyjmuje wartości w U). Ponadto, (γ_s) jest homotopią pętli gdy λ i μ są pętlami; gdy zaś $\lambda(c) = \mu(c)$ dla danego punktu $c \in [a, b]$, to $\gamma_s(c) = \lambda(c)\, \forall s \in [0, 1]$.

b) Warunek $|\lambda - \mu| < \varepsilon$ i $\lambda(c) = \mu(c)$ dla $c = a, b$ jest spełniony przez łamaną $\mu = [\lambda(a), \lambda(t_1), \ldots, \lambda(b)]$, gdy tylko punkty $a = t_0 < \cdots < t_n = b$ obrane są tak, by $\mathrm{diam}\,\lambda([t_{i-1}, t_i]) < \varepsilon$ dla $i = 1, \ldots, n$, przy czym odcinek $[\lambda(t_{i-1}), \lambda(t_i)]$ łamanej parametryzujemy odcinkiem $[t_{i-1}, t_i]$.

Zadanie. * Gdy $f \in H(U)$ i λ jest ścieżką w U, to $|\int_\lambda f - \sum_{i=1}^n f(w_i)(\lambda(t_i) - \lambda(t_{i-1}))| < \varepsilon$ dla każdego dostatecznie drobnego podziału $a = t_0 < \cdots < t_n = b$ odcinka $[a, b]$ i punktów $w_i \in \lambda([t_{i-1}, t_i])$, $1 \le i \le n$. (Całkę $\int_\lambda f$ wyznaczamy zgodnie z uwagą 2.)

7 Wzory całkowe Cauchy'ego. Rozwinięcie funkcji holomorficznej w szereg Taylora.

Twierdzenie 1 (Wzór całkowy Cauchy'ego)**.** *Gdy D jest dyskiem i $f \in H(\overline{D})$, to*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int\limits_{\partial D} \frac{f(w)}{w - z}\, \mathrm{d}w \quad \textit{dla } z \in D. \tag{7}$$

Dowód. Ustalmy punkt $z \in D$. Na podstawie „przykładowego zastosowania b)” w §5,

$$\int\limits_{\partial D} \frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w - 2\pi\mathrm{i}f(z) = \int\limits_{\partial D} g(w)\,\mathrm{d}w, \quad \text{gdzie } \ g(w) \overset{def}{=} \frac{f(w)-f(z)}{w-z} \tag{*}$$

Funkcja $g(w)$ jest holomorficzna w $\overline{D} \setminus \{z\}$, więc gdy $D_\varepsilon = D(z,\varepsilon)$ jest dyskiem tak małym, by $\overline{D_\varepsilon} \subset D$, to $\int\limits_{\partial D} g = \int\limits_{\partial D_\varepsilon} g$. (Korzystamy z „przykładowego zastosowania a)” z §5.) Zatem

$$|\int\limits_{\partial D} g| = |\int\limits_{\partial D_\varepsilon} g| \leqslant \ell(\partial D_\varepsilon) \cdot \sup_{w \in \partial D_\varepsilon} |f(w)-f(z)|/\varepsilon = 2\pi \cdot \sup_{w\in\partial D_\varepsilon} |f(w)-f(z)| \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0$$

Wobec tego $\int\limits_{\partial D} g = 0$ i teza wynika z (*). □

Wzór całkowy (7), w połączeniu z poniższym twierdzeniem, umożliwia lokalne rozwijanie funkcji holomorficznej w szereg potęgowy.

Twierdzenie 2 (O analityczności transformaty Cauchy'ego)**.** *Niech γ będzie drogą i niech funkcja $f : \mathrm{im}(\gamma) \to \mathbb{C}$ będzie ciągła. Przyjmijmy*

$$\widetilde{f}(z) \overset{def}{=} \int\limits_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w \quad \textit{dla } z \in \mathbb{C}\setminus \mathrm{im}(\gamma).$$

Wówczas na każdym dysku $D(z_0,r) \subset \mathbb{C}\setminus\mathrm{im}(\gamma)$ funkcja $\widetilde{f}$ rozwija się w szereg potęgowy o środku w z_0:

$$\widetilde{f}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n (z-z_0)^n, \quad \textit{gdzie } d_n = \int\limits_\gamma \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}w \ \textit{dla } n = 0,1,2,\ldots$$

Funkcję $\widetilde{f}$ nazwiemy *transformatą Cauchy'ego* funkcji f. (Zależy ona oczywiście i od drogi γ.)

Dowód. Ustalmy punkt $z \in D(z_0,r)$ i niech $r' \overset{def}{=} |z-z_0|$. Wtedy $r' < r$, zaś gdy $w \in \mathrm{im}(\gamma)$, to $|w-z_0| \geqslant r$, skąd $|\frac{z-z_0}{w-z_0}| \leq \frac{r'}{r} < 1$. Stąd dla $w \in \mathrm{im}(\gamma)$:

$$\frac{f(w)}{w-z} = \frac{f(w)}{(w-z_0)(1-\frac{z-z_0}{w-z_0})} = \frac{f(w)}{w-z_0}\left(1 + \frac{z-z_0}{w-z_0} + \left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^2 + \ldots\right),$$

i szereg po prawej, rozpatrywany jako funkcja zmiennej $w \in \mathrm{im}(\gamma)$, jest zbieżny jednostajnie (bo jest majoryzowany przez szereg geometryczny $\sum_{n=0}^{\infty} M(r'/r)^n$, gdzie $M = \sup\{|\frac{f(w)}{w-z_0}| : w \in \mathrm{im}(\gamma)\} < \infty$). Z wniosku 1 w §1 wynika więc żądana równość:

$$\widetilde{f}(z) = \int\limits_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w = \int\limits_\gamma \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(w)(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}w = \sum_{n=0}^{\infty}(z-z_0)^n \int\limits_\gamma \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}w. \qquad \square$$

Zadanie. Dowieść tak samo, że gdy $D = D(z_0, r)$ jest dyskiem i $\mathrm{im}(\gamma) \subset \overline{D}$, to dla $z \notin \overline{D}$ mamy

$$\widetilde{f}(z) = -\sum_{n=1}^{\infty} d_{-n}\Big(\frac{1}{z-z_0}\Big)^n, \quad \text{gdzie } d_{-n} = \int_\gamma f(w)(w-z_0)^{n-1}\mathrm{d}w\ . \tag{8}$$

Wniosek 1. *Niech $f \in H(\overline{D})$, gdzie $D = D(z_0, r)$. Wówczas funkcja f rozwija się na D w szereg potęgowy $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$, którego współczynniki zadane są następującymi wzorami*

$$c_n = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int\limits_{\partial D} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}w \qquad \textit{dla } n = 0, 1, \ldots \tag{9}$$

Dowód. Wynika to z twierdzeń 1 i 2. $\square$

Twierdzenie 3. *Funkcja, holomorficzna w zbiorze otwartym $U \subset \mathbb{C}$, jest w nim analityczna. Ponadto, na każdym dysku $D = D(z_0, r) \subset U$ rozwija się ona w szereg potęgowy o środku w z_0.*

Dowód. Mamy $r \leqslant \mathrm{dist}(z_0, \mathbb{C} \setminus U)$. Jeśli nierówność jest ostra, to z wniosku wynika istnienie żądanego rozwinięcia. W przeciwnym zaś razie wynika ono stąd, że na każdym dysku $D(z_0, r')$, $r' < r$, funkcję można rozwinąć w szereg $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ o środku w z_0; przy tym współczynniki c_n nie zależą od r', ze względu na następującą uwagę:

Uwaga 1. Jeśli $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ dla wszystkich z w pewnym otoczeniu punktu z_0, to prawdziwe są *wzory Taylora*

$$c_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0) \quad \text{dla } n = 0, 1, \ldots \tag{10}$$

Dowód. Stosujemy n-krotnie stwierdzenie 2 z §I.4, otrzymując równość $f^{(n)}(z_0) = n!\, c_n$.

Przykład. Niech $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Jak wiemy (patrz przykład 1 a) w §I.7), na dysku $D = D(z_0, |z_0|)$ istnieje gałąź logarytmu l. Ponieważ $l'(z) = 1/z$ i indukcyjnie $l^{(n)}(z) = -(n-1)!(-1/z)^n$, więc z twierdzenia 3 i uwagi 1 wynika, że

$$l(z) = l(z_0) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n z_0^n}(z - z_0)^n \text{ dla } z \in D,$$

oraz że szereg po prawej jest zbieżny w D niemal jednostajnie.

Wniosek 2 (Wzory całkowe Cauchy'ego, ciąg dalszy)**.** *Gdy D jest dyskiem i $f \in H(\overline{D})$, to*

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi\mathrm{i}} \int\limits_{\partial D} \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}\, \mathrm{d}w \quad \textit{dla } z \in D \;\; \textit{i} \;\; n = 0, 1, 2, \ldots \tag{11}$$

Dowód. Gdy z jest środkiem dysku D, to wystarcza porównać (9) i (10). Gdy nie jest, to rozważmy dysk D_0 o środku w z, którego domknięcie jest zawarte w D. Jak już wiemy, $f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi\mathrm{i}} \int\limits_{\partial D_0} \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}\mathrm{d}w$; a że funkcja $w \mapsto f(w)/(w-z)^{n+1}$ jest holomorficzna w $\overline{D} \setminus D_0$, to pozostaje wykorzystać „przykładowe zastosowanie a)" z §5. (Inny dowód uzyskamy n–krotnie różniczkując obie strony równości (7), w oparciu o zadanie 2 z §1.) $\square$

III PIERWSZE WNIOSKI Z TWIERDZEŃ CAUCHY'EGO

1 Konsekwencje analityczności funkcji holomorficznych

A. Rozwinięcie funkcji holomorficznej w skończony szereg Taylora.

Twierdzenie 1. *Gdy $f \in H(U)$, $z_0 \in U$ i $n \in \mathbb{N}$, to istnieje funkcja $g \in H(U)$ taka, że*

$$f(z) - f(z_0) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^k + g(z)(z-z_0)^n \quad \text{dla } z \in U \tag{1}$$

Funkcja g jest wyznaczona jednoznacznie i $g(z_0) = f^{(n)}(z_0)/n!$.

Dowód. Jak zwykle, możemy zakładać otwartość zbioru U (por. dowód tw. Cauchy'ego w §II.5). Rozwińmy f w szereg Taylora $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-z_0)^k$ na pewnym dysku $D = D(z_0, r)$. Wartość $g(z)$, spełniającą równość (1), wyznaczymy dla $z \in D$ w oparciu o to rozwinięcie, wzorem $g(z) = \sum_{k=n}^{\infty} c_k(z-z_0)^{k-n}$, zaś dla $z \in U \setminus \{z_0\}$ – wprost z (1). Otrzymane funkcje $D \to \mathbb{C}$ i $U \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ są holomorficzne i pokrywają się na części wspólnej $D \setminus \{z_0\}$ obu dziedzin (bo wartość $g(z)$ w (1) jest dla $z \neq z_0$ jedyna). Łącznie wzięte, wyznaczają one żądaną funkcję $g \in H(U)$. Wynika stąd też jednoznaczność funkcji g oraz równość $g(z_0) = c_n = f^{(n)}(z_0)/n!$ □

Uwaga 1. Równość (1) ma miejsce dla wszystkich $z \in U$, podczas gdy w nieskończony szereg Taylora rozwijać umiemy tylko lokalnie (na dyskach).

Uwaga 2. * Wartość $g(z)$ można wyznaczyć wzorem całkowym

$$g(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\partial D} \frac{f(w)}{(w-z_0)^n (w-z)} \, \mathrm{d}w \quad \text{dla } z \in D \tag{2}$$

prawdziwym, gdy z_0 jest środkiem dysku D i $\overline{D} \subset U$. (Wzór ten jest szeroko wykorzystywany w książce Ahlforsa.) Dla dowodu przepiszmy (1) następująco:

$$g(w) = \frac{f(w)}{(w-z_0)^n} - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{c_i}{(w-z_0)^{n-i}} \quad \text{dla } w \neq z_0.$$

Ponieważ $g(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\partial D} \frac{g(w)}{w-z} \, \mathrm{d}w$, to różnica między lewą a prawą stroną w (2) wynosi

$$\frac{-1}{2\pi \mathrm{i}} \sum_{i=0}^{n-1} \int_{\partial D} \frac{c_i}{(w-z_0)^{n-i}(w-z)} \, \mathrm{d}w.$$

Jest więc ona równa 0, na podstawie „przykładowego zastosowania c)" z §II.5. □

B. Pierwiastki równań analitycznych. Zasady izolowanych zer i identyczności.

Definicja. Niech $f \in H(U)$. Punkt $z_0 \in U$ jest *pierwiastkiem* równania $f(z) = b$, jeśli $f(z_0) = b$. *Krotnością* tego pierwiastka nazywamy najmniejszą liczbę $n \in \mathbb{N}$ taką, że $f^{(n)}(z_0) \neq 0$ (jeśli taka istnieje). Pierwiastki równania $f(z) = 0$ nazywamy *zerami* lub *punktami zerowymi* funkcji f.

Uwaga 1. Punkt z_0 wtedy i tylko wtedy jest zerem n-krotnym funkcji $f \in H(U)$, gdy $f(z) = (z - z_0)^n g(z)$ dla $z \in U$, gdzie $g \in H(U)$, $g(z_0) \neq 0$ i $n \geq 1$. (Wynika to z twierdzenia w punkcie A.)

Twierdzenie 1 (zasada izolowanych zer)**.** *Gdy $f \in H(U)$, gdzie U jest obszarem, to równoważne są warunki:*

a) zbiór $f^{-1}(0)$ zer funkcji f ma w U punkt skupienia;
b) istnieje punkt $p \in U$ taki, że $f^{(n)}(p) = 0$ dla $n = 0, 1, \dots$;
c) $f = 0$.

Dowód. $a) \Rightarrow b)$. Niech $p \in U$ będzie punktem skupienia zbioru $f^{-1}(0)$ i niech $N = \inf\{n : f^{(n)}(p) \neq 0\}$. Jeśliby $N < \infty$, to punkt p byłby zerem N–krotnym funkcji f i na podstawie uwagi istniałoby otoczenie G punktu p w U takie, że $f(z) \neq 0$ dla $z \in G \setminus \{p\}$. Ponieważ przeczy to wyborowi punktu p, więc $N = \infty$.

$b) \Rightarrow c)$. Niech

$$P = \{p \in U : f^{(n)}(p) = 0 \quad \text{dla każdego } n \geq 0\}$$

Zbiór P jest domknięty w U, jako przecięcie miejsc zerowych funkcji ciągłych. Ponadto

$$\text{gdy } p \in P, \text{ to } f_{|G} = 0 \text{ dla pewnego otoczenia } G \text{ punktu } p \text{ w } U \tag{*}$$

– bo szereg Taylora funkcji f o środku w punkcie $p \in P$ jest zerowy! Zbiór P jest więc zarazem otwarty w U, bo zawiera otoczenie każdego swego punktu. A że $P \neq \varnothing$ (na podstawie b)) i przestrzeń U jest spójna, to $P = U$. Stąd i z (*) wynika, że $f = 0$.

Implikacja $c) \Rightarrow a)$ jest oczywista. □

Wniosek 1 (zasada identyczności)**.** *Niech $g, h \in H(U)$, gdzie U jest obszarem w $\mathbb{C}$. Jeśli zbiór $\{z \in U : g(z) = h(z)\}$ ma w U punkt skupienia, to $g = h$.*

Dowód. Wynika to z twierdzenia, odniesionego do funkcji $f = g - h$. □

Wniosek 2. *Gdy U jest obszarem w $\mathbb{C}$ i funkcja $f \in H(U)$ nie jest stała, to krotność każdego pierwiastka równania $f(z) = w$ jest dobrze określona.* □

C. Lokalny opis funkcji holomorficznej.

Zakładamy niżej, że $U \subset \mathbb{C}$ jest obszarem, funkcja $f \in H(U)$ nie jest stała i $p \in U$. Oczywiście, p jest pierwiastkiem równania $f(z) = f(p)$; niech będzie to pierwiastek n–krotny.

Twierdzenie 1 (o opisie funkcji w otoczeniu punktu). *Przy tych założeniach, istnieje otoczenie G punktu p w U takie, że $f(z) = (h(z))^n + f(p)$ dla $z \in G$, gdzie funkcja $h \in H(G)$ przekształca G homeomorficznie na pewien dysk $D(0, r)$ i spełnia warunki $h(p) = 0$ i $h'(p) \neq 0$.*

Schematyczny
rysunek:

Wniosek 1. *Równoważne są warunki:*

a) funkcja f jest różnowartościowa na pewnym otoczeniu punktu p;
b) p jest jednokrotnym pierwiastkiem równania $f(z) = f(p)$;
c) $f'(p) \neq 0$.

Dowód. Równoważność *b*) $\Leftrightarrow$ *c*) wynika z definicji, a *a*) $\Leftrightarrow$ *b*) – z twierdzenia, bo funkcja $z \mapsto z^n + f(p)$ jest różnowartościowa na pewnym otoczeniu zera jedynie gdy $n = 1$. $\square$

Wniosek 2. *Przy oznaczeniach twierdzenia, równanie $f(z) = q$ ma dla $q \in D(f(p), r^n) \setminus \{f(p)\}$ dokładnie n pierwiastków w G, każdy krotności 1.*

Dowód. Równanie $g(z) = q$, gdzie $g(z) = z^n + f(p)$, ma w $D(0, r)$ dokładnie n pierwiastków, i na otoczeniu każdego z nich funkcja g jest różnowartościowa. Ponieważ $h : G \to D(0, r)$ jest homeomorfizmem, więc równanie $g \circ h(z) = q$ ma n pierwiastków w G, każdy krotności 1. (Korzystamy z równoważności a)$\Leftrightarrow$b) we wniosku 1.) $\square$

Dowód twierdzenia. Mamy $f(z) = f(p) + (z - p)^n g(z)$ dla pewnej funkcji $g \in H(U)$ spełniającej warunek $g(p) \neq 0$. Niech dysk D o środku w p będzie zawarty w zbiorze $g^{-1}(\mathbb{C} \setminus \{0\}) \subset U$. Na mocy twierdzenia, które udowodnimy [4] w §III.2.A, istnieje funkcja $g_0 \in H(D)$ taka, że $g_0^n = g_{|D}$. Niech $h_0(z) = (z - p)g_0(z)$ dla $z \in D$; wtedy $f_{|D} = h_0^n + f(p)$ oraz $h_0'(p) = g_0(p) \neq 0$. Ponieważ ponadto $h_0(p) = 0$, więc h_0 przekształca pewne otoczenie G punktu p homeomorficznie na pewien dysk $D(0, r)$. (Wykorzystaliśmy twierdzenie 1 z §I.8.) Przyjmujemy $h = h_{0|G}$. $\square$

[4] Ze względów porządkowych wybrano taką kolejność twierdzeń. Nie ma tu jednak „błędnego koła”, co łatwo sprawdzić.

D. Otwartość funkcji holomorficznych i zasada maksimum.

Twierdzenie 1 (o zachowywaniu obszarów)**.** *Gdy zbiór* $U \subset \mathbb{C}$ *jest obszarem i funkcja* $f \in H(U)$ *nie jest stała, to zbiór* $f(U)$ *jest obszarem, zaś przekształcenie* f *jest otwarte.*

Dowód. Dla każdego punktu $p \in U$ poprzednie twierdzenie daje zbiór $G_p \subset U$ taki, że $f(G_p)$ jest dyskiem o środku w $f(p)$. Zbiór $f(U) = \bigcup\{f(G_p) : p \in W\}$ jest więc otwarty w $\mathbb{C}$, a jako ciągły obraz zbioru spójnego jest on też spójny (czyli jest obszarem).

Stosując to przy U zastąpionym przez dysk $D \subset U$ stwierdzamy, że przekształcenie $f : U \to \mathbb{C}$ jest otwarte, bo przeprowadza dowolny taki dysk na zbiór otwarty. $\square$

Twierdzenie 2 (zasada maksimum)**.** *Przy założenich twierdzenia 1, funkcja* $|f|$ *nie przyjmuje maksimum w* U*, zaś minimum przyjmuje w swych zerach (jeśli je ma).*

Dowód. Niech $p \in U$. Jak wiemy, zbiór $f(U)$ zawiera pewien dysk o środku w $f(p)$. Oczywiście, do dysku tego należy punkt w taki, że $|w| > |f(p)|$. Zatem $|f(p)| < \sup_{z\in U}|f(z)|$, dla każdego $p \in U$. Tak samo, gdy $f(p) \neq 0$, to $|f(p)| > \inf_{z\in U}|f(z)|$. $\square$

Uwaga 1. a) Stosując twierdzenie 2 do dysków $D \subset U$ stwierdzamy, że funkcja $|f|$ nie ma w U punktów lokalnego maksimum, a punktami jej lokalnego minimum są jej zera.

b) Tak samo dowodzimy, że funkcje $\operatorname{Re} f$ i $\operatorname{Im} f$ nie mają w U punktów (lokalnego) ekstremum.

c) Stąd i z twierdzenia o przyjmowaniu kresów przez funkcję ciągłą na zbiorze zwartym wynika, że gdy funkcja f jest ciągła na domknięciu <u>ograniczonego</u> obszaru $U \subset \mathbb{C}$ i holomorficzna w U, to funkcje $|f|, \pm\operatorname{Im} f, \pm\operatorname{Re} f$ swój kres górny przyjmują na brzegu zbioru U. (Przyjmują go bowiem w punktach zbioru zwartego $\overline{U}$, lecz nie w U.)

d) Niekiedy wygodnie jest a) czy b) stosować w takiej postaci: jeśli U jest obszarem, $f \in H(U)$ i któraś z funkcji $|f|, \pm\operatorname{Re} f, \pm\operatorname{Im} f$ ma w U punkt lokalnego maksimum, to funkcja f jest stała.

Użyteczna bywa i taka postać zasady maksimum.

Twierdzenie 3 (zasada maksimum, zmieniona postać)**.** *Niech* $f \in H(U)$*, gdzie* $U \subset \mathbb{C}$ *jest obszarem. Jeśli stała* M *spełnia warunek*

$$\textit{istnieje zbiór zwarty } K_M \subset U \textit{ taki, że } |f(z)| \leq M \textit{ dla } z \in U \setminus K_M, \tag{3}$$

to $\sup_{z\in U}|f(z)| \leq M$*.*

Dowód. Niech $K = K_M$. Ciągła funkcja $|f_{|K}|$ osiąga swój kres górny w pewnym punkcie $p \in K$. Gdy $|f(p)| \leq M$, to $\sup|f| \leq M$. W przeciwnym razie funkcja $|f|$ jest stała (bo w punkcie p przyjmuje swe maksimum), więc $\sup_{z\in U}|f(z)| \leq M$ na podstawie (3). $\square$

Zasady maksimum można użyć do dowodu „zasadniczego twierdzenia algebry”, na mocy którego każdy (zespolony) wielomian dodatniego stopnia ma pierwiastek:

Zadanie. Niech $f(z) = c_0 + c_1 z + \cdots + c_n z^n$, gdzie $c_0, \ldots, c_n \in \mathbb{C}$, $n \geq 1$ i $c_n \neq 0$. Dowieść, że:

a) Wielomian f ma zero w dysku $D = D(0,R)$, o ile $|f(z)| \geq |c_0|$ dla wszystkich $z \in \partial D$.

b) Ostatni warunek jest spełniony dla dostatecznie dużych R.

c) W istocie wystarcza, by $R \geq 2M+1$, gdzie $M = \max\{|c_k/c_n| : k = 0, \ldots, n-1\}$. (Wskazówka: gdy $|z| > 1$, to $|f(z)| > |c_n z^n|(1 - M\sum_{k=1}^{n-1}|z|^{-k}) > |c_n z|(1 - \frac{M}{|z|-1})$.)

Zadanie. * Dowieść, że gdy funkcja h jest holomorficzna w kole domkniętym $\overline{D}$ o środku w z_0 i spełnia warunek $|h(z) - h(z_0)| \geq 2R$ dla wszystkich $z \in \partial D$, to jej obraz zawiera dysk $D(h(z_0), R)$. (W §IV.6 przekonamy się, że $2R$ można tu zastąpić przez R.)

E. Twierdzenie Morery i zasada symetrii Riemanna–Schwarza

Twierdzenie 1 (Morery)**.** *Funkcja $f : U \to \mathbb{C}$, ciągła w zbiorze otwartym $U \subset \mathbb{C}$, jest holomorficzna wtedy i tylko wtedy, gdy $\int\limits_{\partial\triangle} f = 0$ dla każdego trójkąta $\triangle \subset U$.*

Dowód. ($\Rightarrow$) Wynika to z lematu Goursata.
($\Leftarrow$) Niech $D \subset U$ będzie dyskiem. Z wniosku w §2.II wynika istnienie funkcji funkcji F, pierwotnej dla $f_{|D}$. Funkcja F jest holomorficzna, więc analityczna; jej pochodna $f_{|D}$ jest zatem holomorficzna. (Korzystamy z wniosku w §I. 5.) Wobec dowolności dysku $D \subset U$, funkcja f jest holomorficzna. $\square$

Oto dwa przykładowe zastosowania twierdzenia Morery.

Twierdzenie 2. *Niech $L \subset \mathbb{C}$ będzie prostą, a $U \subset \mathbb{C}$ – zbiorem otwartym. Gdy funkcja ciągła $f : U \to \mathbb{C}$ jest holomorficzna w zbiorze $U \setminus L$, to jest holomorficzna w U.*

Dowód. Oznaczmy przez U^+ i U^- przecięcia zbioru U z półpłaszczyznami otwartymi, na które prosta L dzieli płaszczyznę. Posłużymy się twierdzeniem Morerey i rozważymy kilka przypadków, zależnych od położenia trójkąta $\triangle$.

i) Jeśli $\triangle \subset U^+$ lub $\triangle \subset U^-$, to $\int\limits_{\partial\triangle} f = 0$ na mocy lematu Goursata.

ii) Jeśli $\triangle \subset U^+ \cup L$ lub $\triangle \subset U^- \cup L$, to we wnętrzu trójkąta $\triangle$ budujemy trójkąty $\triangle_n$, $n \geqslant 1$, których wierzchołki dążą do wierzchołków trójkąta $\triangle$. Na podstawie i) i zadania z §II.1,

$$\int\limits_{\partial\triangle} f = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{\partial\triangle_n} f = \lim_{n\to\infty} 0 = 0.$$

iii) Jeśli $\triangle$ przecina zarówno U^+, jak i U^-, to dzielimy trójkąt $\triangle$ na trzy mniejsze, jak na rysunku. Jak już wiemy, $\int\limits_{\partial\triangle_i} f = 0$ dla $i = 1, 2, 3$, skąd $\int\limits_{\partial\triangle} f = \sum_{i=1}^{3} \int\limits_{\partial\triangle_i} f = 0$. □

Wniosek 1. *a) Funkcja, ciągła w zbiorze otwartym i holomorficzna w nim poza pewnym punktem, jest holomorficzna.*

b) Teza twierdzenia 2 pozostaje słuszna, gdy L jest okręgiem.*

Dowód. a) Stosujemy twierdzenie do prostej, przechodzej przez dany punkt.

b)* Gdy $p \in L \setminus U$, to homografia $h(z) = 1/(z-p)$ przeprowadza L na prostą, zaś U w $\mathbb{C}$. Z twierdzenia, zastosowanego do zbioru $h(U)$ i funkcji $f_1 = f \circ (h_{|U})^{-1}$, wynika holomorficzność funkcji f_1. Tym samym i funkcja $f = f_1 \circ h_{|U}$ jest holomorficzna. To kończy dowód, gdy $L \setminus U \neq \emptyset$; zaś gdy tak nie jest, to otrzymamy holomorficzność funkcji f na $U \setminus \{p\}$, dla każdego punktu $p \in L$ –co również daje tezę. □

Poniższą *zasadę symetrii Riemanna–Schwarza* [5] sformułujemy w wersji ogólnej, dotyczącej opisanej w §I.6 symetrii s_T względem (uogólnionego) okręgu T. Zbiór U nazwiemy symetrycznym względem tego okręgu, gdy $s_T(U) = U$; para zaś punktów z_1, z_2 jest symetryczna względem T, gdy symetryczny jest zbiór $\{z_1, z_2\}$. Czytelnik może przy pierwszym czytaniu chcieć ograniczyć się do przypadku, gdy okrąg jest prostą $\operatorname{Im} z = 0$; wtedy symetria s_T jest zwykłą symetrią zwierciadlaną $z \mapsto \overline{z}$.

Twierdzenie 3. *Niech obszar $U \subset \mathbb{C}$ będzie symetryczny względem okręgu T_1 i niech funkcja ciągła $f : U \to \mathbb{C}$ przeprowadza $T_1 \cap U$ w podzbiór okręgu T_2. (Okręgi mogą być uogólnione.) Wówczas do holomorficzności funkcji f potrzeba i wystarcza, by była ona holomorficzna na jednej z dwóch składowych zbioru $U \setminus T_1$ i przeprowadzała pary punktów z U, symetryczne względem T_1, w pary symetryczne względem T_2.*

Dowód gdy $T_1 = T_2 = \mathbb{R}$. Ad $\Longleftarrow$. Możemy założyć, że rozważaną składową jest $U^+ = \{z \in U : \operatorname{Im} z > 0\}$. (Przypadek, gdy jest nią zbiór $U^- = \{z \in U : \operatorname{Im} z < 0\}$ jest analogiczny). Funkcja f, ze względu na założoną własność symetrii, spełnia dla $z \in U^-$

[5] Por. zadanie 7 b) w §I.6. Według Ahlforsa, Riemann i Schwarz rozważali dalsze szczególne przypadki, a zasadę sformułował Caratheodory.

warunek $f(z) = \overline{f(\overline{z})}$. Jest więc ona holomorficzna nie tylko w U^+, ale i w U^-, patrz zadanie w §I.2. Zatem $f \in H(U)$ na podstawie twierdzenia 2, zastosowanego przy $L = \mathbb{R}$.

Ad $\Longrightarrow$. Gdy $f \in H(U)$, to rozważmy funkcję $g : U \to \mathbb{C}$, zadaną wzorem $g(z) = f(z)$ dla $z \in U \setminus U^-$ i $g(z) = \overline{f(\overline{z})}$ dla $z \in U \setminus U^+$. Ponieważ $f(U \cap \mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$ i $z = \overline{z}$ dla $z \in \mathbb{R}$, więc funkcja g jest poprawnie określona i ciągła (oba wzory dają ten sam wynik na części wspólnej dziedzin.) Jak udowodniono wyżej, $g \in H(U)$, wobec czego $f = g$ na podstawie zasady identyczności, bo $f(z) = g(z)$ dla $z \in U^+$. A że g spełnia żądany warunek symetrii, to spełnia go i f.

Dowód w przypadku ogólnym*. W dowodzie implikacji $\Longleftarrow$ powołujemy się teraz na część b) wniosku i na zadanie 10 z §I.6 (w miejsce zadania z §I.2), a w dowodzie implikacji $\Longrightarrow$ używamy funkcji g z poniższego wniosku:

Wniosek 2. *Gdy funkcja ciągła $f_0 : U \setminus U^- \to \mathbb{C}$ jest holomorficzna na U^+, gdzie U^+ i U^- są składowymi zbioru $U \setminus T_1$, to wzór*

$$g(z) = f_0(z) \text{ dla } z \in U \setminus U^- \quad \text{i} \quad g(z) = s_2(f_0(s_1(z))) \text{ dla } z \in U \setminus U^+$$

określa funkcję holomorficzną, przy s_i oznaczającym symetrię względem okręgu T_i.

Dowód. Ciągłości g dowodzimy jak poprzednio, po czym stosujemy udowodnioną już część twierdzenia. ⊟

2 Konsekwencje twierdzenia i całkowych wzorów Cauchy'ego.

A. Istnienie funkcji pierwotnych i gałęzi logarytmu w obszarze jednospójnym.

Jak wiemy, funkcja holomorficzna w danym obszarze U może nie mieć funkcji pierwotnej, i podobnie może ona nie mieć gałęzi logarytmu czy argumentu. Przy założeniu jednospójności obszaru U, sprawy mają się prościej:

Twierdzenie 1. *Niech $f \in H(U)$, gdzie $U \subset \mathbb{C}$ jest obszarem jednospójnym. Wówczas:*

a) Istnieje funkcja pierwotna funkcji f.

b) Jeśli $0 \notin f(U)$, to istnieją gałęzie logarytmu i argumentu funkcji f oraz, dla każdego $w \in \mathbb{C}$, istnieje gałąź jej w–tej potęgi.

Dowód. Teza a) wynika z wniosku 1 w §II.5 i twierdzenia 1 w §II.2. W szczególności, f'/f ma funkcję pierwotną. Gałąź logarytmu funkcji f istnieje więc na mocy twierdzenia 2 w §I. 8, a pozostałe dwie gałęzie – na mocy wyników z §I.7. □

Ponieważ każdy dysk jest jednospójny, więc twierdzenie uogólnia wniosek z §2.II.

Zadanie. Dowieść, że gdy $f \in H(U)$, obszar U jest jednospójny i $\pm 1 \notin \operatorname{im}(f)$, to $f = \cos \circ g$ dla pewnej funkcji $g \in H(U)$. (Wskazówka: $\cos(w) = u(\mathrm{e}^{\mathrm{i}w})$, gdzie $u(z) = \frac{1}{2}(z + z^{-1})$ dla $z \neq 0$. Dowieść wpierw istnienia funkcji $h \in H(U)$ takiej, że $f = u \circ h$.)

B. Indeks pętli względem punktu.

Wykorzystamy całkę do nadania precyzyjnego znaczenia zwrotowi „dana pętla n–krotnie okrąża punkt p ”. Można to zrobić i wykorzystując rozważania czysto topologiczne, lecz ujęcie poniższe jest użyteczne w badanej w następnym rozdziale teorii residuów.

Definicja. Niech pętla γ będzie kawałkami gładka i niech $p \notin \operatorname{im}(\gamma)$. Liczbę

$$\operatorname{ind}(\gamma, p) \stackrel{def}{=} \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int\limits_{\gamma} \frac{1}{w-p}\, \mathrm{d}w \tag{4}$$

nazywamy *indeksem pętli* γ *względem punktu* p, a także *indeksem punktu* p względem tej pętli.

Twierdzenie 1. *Niech pętle* $\gamma, \gamma_1 : [a,b] \to \mathbb{C}$ *będą kawałkami gładkie. Wówczas:*

a) Gdy pętle γ *i* γ_1 *są homotopijne w* $\mathbb{C} \setminus \{p\}$*, to* $\operatorname{ind}(\gamma, p) = \operatorname{ind}(\gamma_1, p)$.

b) $\operatorname{ind}(\gamma, p) = \operatorname{ind}(\gamma - p, 0)$ *dla* $p \in \mathbb{C} \setminus \operatorname{im}(\gamma)$*, gdzie* $(\gamma - p)(t) \stackrel{def}{=} \gamma(t) - p$.

c) Funkcja $p \mapsto \operatorname{ind}(\gamma, p)$ *jest ciągła na* $\mathbb{C} \setminus \operatorname{im}(\gamma)$.

d) $\operatorname{ind}(\gamma, p) \in \mathbb{Z}$ *dla* $p \in \mathbb{C} \setminus \operatorname{im}(\gamma)$.

e) Gdy $0 \notin \operatorname{im}(\gamma)$*, to:*

e1) istnieje gałąź argumentu funkcji $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$*, oraz*

e2) jeśli σ *jest taką gałęzią, to* $\operatorname{ind}(\gamma, 0) = \frac{1}{2\pi}(\sigma(b) - \sigma(a))$.

Uwaga 1. i) Z e) i b) wynika geometryczna interpretacja liczby $2\pi \cdot \operatorname{ind}(\gamma, p)$: jest to przyrost argumentu punktu $\gamma(t) - p$, gdy t zmienia się od a do b.

ii) Z własności c) i d) wynika, że funkcja $p \mapsto \operatorname{ind}(\gamma, p)$ jest stała na spójnych podzbiorach zbioru $\mathbb{C} \setminus \operatorname{im}(\gamma)$.

iii) Z a) wynika, że $\operatorname{ind}(\gamma, p) = 0$ gdy pętla γ jest homotopijnie nieistotna w $\mathbb{C} \setminus \{p\}$.

iv) W szczególności, $\operatorname{ind}(\gamma, p) = 0$ gdy punkt p leży poza dyskiem, zawierającym zbiór $\operatorname{im}(\gamma)$, lub ogólniej, gdy leży w nieograniczonej składowej spójności zbioru $\mathbb{C} \setminus \operatorname{im}(\gamma)$. (Korzystamy z ii).) □

W dowodzie twierdzenia wykorzystamy

Lemat 1. *Niech* $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ *będzie drogą. Wówczas:*

i) $\gamma = \mathrm{e}^{\lambda}$ *dla pewnej drogi* $\lambda : [a,b] \to \mathbb{C}$*,*

ii) Gdy λ *jest taką drogą, to* $\int\limits_{\gamma} \frac{1}{w}\, \mathrm{d}w = \lambda(b) - \lambda(a)$.

Dowód. Ad i). Dla gładkiej drogi γ, część tą udowodniliśmy we wniosku 2 z §I.8. Przypadek ogólny pomijamy, pozostawiając go jako zadanie uzupełniające. (Ponadto, niewiele tracimy, ograniczając się do dróg gładkich.)

Ad ii). Z definicji, $\int\limits_\gamma \frac{1}{w}\,\mathrm{d}w = \int\limits_a^b \frac{1}{\mathrm{e}^{\lambda(t)}}\mathrm{e}^{\lambda(t)}\lambda'(t)\,\mathrm{d}t = \lambda(b) - \lambda(a)$. ⊟

Dowód twierdzenia 2. Część a) wynika z twierdzenia Cauchy'ego, zaś część b) jest oczywista. Część c) wynika z wniosku 1 z §II.1, bo jeśli $p_n \to p_0 \notin \mathrm{im}(\gamma)$, to $\frac{1}{w-p_n} \to \frac{1}{w-p}$ jednostajnie względem $w \in \mathrm{im}(\gamma)$. (Jest to ćwiczenie.) Wreszcie d) wynika z e), gdyż argumenty $\sigma(a)$ i $\sigma(b)$ liczby $\gamma(a) = \gamma(b)$ różnią się o całkowitą wielokrotność liczby 2π. Pozostaje dowieść e).

Ad e1). Na podstawie lematu, istnieje gałąź logarytmu funkcji γ. Wobec tego gałąź argumentu też istnieje (patrz stwierdzenie 2 w §I. 7).

Ad e2). Niech $\sigma : [a,b] \to \mathbb{R}$ będzie gałęzią argumentu funkcji γ. Przyjmijmy $\lambda = \ln|\gamma| + \mathrm{i}\sigma$, jak w §II. 3. Wtedy $\mathrm{e}^\lambda = \gamma$ i funkcja λ jest kawałkami gładka, patrz twierdzenie 2 w §I.8. Z części ii) lematu wynika wiec, że $2\pi\mathrm{ind}(\gamma, 0) = \frac{1}{\mathrm{i}}(\lambda(b) - \lambda(a)) = \sigma(b) - \sigma(a) + \frac{1}{\mathrm{i}}(\ln|\gamma(b)| - \ln|\gamma(a)|)$. Prawa strona jest równa $\sigma(b) - \sigma(a)$, bo $\gamma(a) = \gamma(b)$. □

Uwaga 2. * Teza e1) pozostaje prawdziwa i gdy pętla $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ nie jest kawałkami gładka. Pozwala to równości z e2) i b) użyć do *zdefiniowania* indeksu dowolnej pętli. Indeks ten odgrywa istotną rolę w topologii płaszczyzny, ze względu na pochodzące od H. Poincaré'go odwrócenie części a):

Twierdzenie 2. * *Pętle* γ_0, γ_1*, mające ten sam indeks względem danego punktu* $p \notin \mathrm{im}(\gamma_0) \cup \mathrm{im}(\gamma_1)$ *i tą samą dziedzinę* $[a,b]$*, są homotopijne w* $\mathbb{C} \setminus \{p\}$.

Dowód. * Wystarcza rozważyć przypadek, gdy $p = 0$. Niech λ_n będzie gałęzią logarytmu funkcji γ_n, $n = 0, 1$. Homotopia $\{\gamma_s : s \in [0,1]\}$, zadana wzorem $\gamma_s = \exp(\lambda_0 + s(\lambda_1 - \lambda_0))$, łączy γ_0 z γ_1 w $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Warunek $\gamma_s(a) = \gamma_s(b)$ dla $s \in [0,1]$ wynika stąd, że $2\pi\ \mathrm{i}\ \cdot\ \mathrm{ind}(\gamma_n) = \lambda_n(b) - \lambda_n(a)$ i wobec tego $\lambda_1(a) - \lambda_0(a) = \lambda_1(b) - \lambda_0(b)$.

Zadanie. * Dowieść równości $\mathrm{ind}(\gamma_1 \cdot \gamma_2, 0) = \mathrm{ind}(\gamma_1, 0) + \mathrm{ind}(\gamma_2, 0)$, dla dowolnych pętli $\gamma_1, \gamma_2 : [a,b] \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$. (Wskazówka: lemat 1.)

Zadanie. * Dowieść, że równość (8) pozostaje słuszna dla każdej pętli γ, gdy całkę rozumieć jak opisano w §II.6, zaś indeks – jak w uwadze 2.

Dodatek*: Wyznaczanie indeksu.

Choć liczba $\operatorname{ind}(\gamma, p)$ ma jasną interpretację geometryczną, to nie jest widoczne, jak wyznaczyć ją w przypadku skomplikowanej pętli γ. Poniższy sposób jest skuteczny przy następującym bardzo ogólnym założeniu:

(*) dana jest półprosta L o początku w p taka, że zbiór $\gamma^{-1}(L)$ jest skończony.

Oznaczmy punkty zbioru $\gamma^{-1}(L)$ przez $t_1, \ldots, t_n$; zakładamy bez zmniejszenia ogólności, że nie ma wśród nich krańców a, b odcinka, na którym określona jest pętla γ. (Gdy jest inaczej, zastępujemy γ przez pętlę $t \mapsto \gamma(t)$ dla $t \in [a_1, b]$ i $t \mapsto \gamma(t - b + a)$ dla $t \in [b, b + a_1 - a]$, gdzie $a_1 \in (a, b) \setminus \gamma^{-1}(L)$.)

By wyznaczyć $\operatorname{ind}(\gamma, p)$ rozważmy dodatnio zorientowany prostokątny układ współrzędnych, taki, że L jest dodatnią półosią py; sąsiadujące z L otwarte ćwiartki płaszczyzny nazwiemy prawą i lewą, odpowiednio. (Która jest prawa, wyznacza orientacja układu.) Ponieważ $p \notin \operatorname{im}(\gamma)$, więc dla każdej z liczb t_i istnieją $s_i^- \in (a, t_i)$, $s_i^+ \in (t_i, b)$ takie, że zbiór $\gamma((s_i^-, t_i))$ (odp. $\gamma((t_i, s_i^+))$) jest zawarty w jednej z tych ćwiartek. Niech

$$\varepsilon_i = \begin{cases} 0 & \text{gdy } \gamma((s_i^-, t_i)) \text{ i } \gamma((t_i, s_i^+)) \text{ leżą w tej samej ćwiartce,} \\ 1 & \text{gdy } \gamma((s_i^-, t_i)) \text{ leży w prawej ćwiartce, a } \gamma((t_i, s_i^+)) \text{ w lewej,} \\ -1 & \text{gdy } \gamma((s_i^-, t_i)) \text{ leży w lewej ćwiartce, a } \gamma((t_i, s_i^+)) \text{ w prawej} \end{cases}$$

Twierdzenie 3. * *Przy tych oznaczeniach,* $\operatorname{ind}(\gamma, p) = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i$.

Dowód. Możemy zakładać, że $p = 0$ i $L = [0, \infty)_{\mathbb{R}}$, bo obie strony pozostaną niezmienione, gdy γ, p i L poddamy temu samemu przesunięciu lub obrotowi wokół 0. Niech $\tau : [a, b] \to \mathbb{R}$ będzie podzieloną przez 2π gałęzią argumentu funkcji γ; wówczas $\tau(b) - \tau(a) = \operatorname{ind}(\gamma, 0) \in \mathbb{Z}$ i $\{t_1, \ldots, t_n\} = \tau^{-1}(\mathbb{Z})$. Nazwijmy funkcję τ *rosnącą* (odp. *malejącą*) *w punkcie* t_i, jeśli w pewnym jego otoczeniu funkcje $t - t_i$ i $\tau(t) - \tau(t_i)$ są zgodnego (odp.: przeciwnego) znaku. Jest oczywiste, że ma to miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy $\varepsilon_i = 1$ (odp. $\varepsilon_i = -1$). Tezy dowodzi więc nastepujące

Zadanie. * Niech funkcja $\tau : [a, b] \to \mathbb{R}$ będzie ciągła, zaś zbiór $\tau^{-1}(\mathbb{Z})$ – skończony i zawarty w (a, b). Dowieść, że jeśli liczba $\tau(b) - \tau(a)$ jest całkowita, to jest ona równa różnicy między liczbą tych punktów $t_i \in \tau^{-1}(\mathbb{Z})$, w których funkcja τ jest rosnąca, a liczbą tych $t_j \in \tau^{-1}(\mathbb{Z})$, w których funkcja τ jest malejąca.

C. Nierówności Cauchy'ego i twierdzenie Liouville'a.

Twierdzenie 1 (Nierówności Cauchy'ego). *Gdy* $D = D(z_0, r)$ *i* $f \in H(\overline{D})$, *to*

$$|f^{(n)}(z_0)| \leqslant \frac{n!}{r^n} \|f\|_{\partial D} \quad \textit{dla} \;\; n \geqslant 0.$$

Dowód. Na podstawie wzorów całkowych Cauchy'ego z §II. 7,

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi \mathrm{i}} \int\limits_{\partial D} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}w.$$

Ponieważ $|f(w)| \leq \|f\|_{\partial D}$ i $|w - z_0| = r$ dla $w \in \partial D$, więc otrzymujemy stąd

$$|f^{(n)}(z_0)| \leqslant \frac{n!}{|2\pi \mathrm{i}|}\,\ell(\partial D)\cdot\frac{\|f\|_{\partial D}}{r^{n+1}} = \frac{n!}{r^n}\|f\|_{\partial D}. \quad \square$$

Oto zastosowanie tego twierdzenia:

Twierdzenie 2 (Liouville'a)**.** *Jedynymi ograniczonymi funkcjami, holomorficznymi na całej płaszczyźnie $\mathbb{C}$, są funkcje stałe.*

Dowód. Niech $f \in H(\mathbb{C})$ i $\|f\|_{\mathbb{C}} < \infty$. Z twierdzenia 1, zastosowanego do $D(z, r)$ wynika, że $|f'(z)| \leqslant \|f\|_{\mathbb{C}}/r$ dla każdych $r > 0$ i $z \in \mathbb{C}$. Stąd $f' \equiv 0$ i wobec tego $f = \text{const}$. $\square$

Uwaga 1. Odnotujmy jednak, że funkcja exp, różna od stałej i holomorficzna na całej płaszczyźnie, jest ograniczona na każdej półpłaszczyznie $\operatorname{Re} z \leq c$.

Wniosek 1 („Zasadnicze twierdzenie algebry”)**.** *Niech $f(z) = c_0 + c_1 z + \ldots + c_n z^n$, gdzie $n \geqslant 1$ i $c_n \neq 0$. Wówczas $f(z_0) = 0$ dla pewnego $z_0 \in \mathbb{C}$.*

Dowód. W przeciwnym razie $\frac{1}{f} \in H(\mathbb{C})$ i $\sup_{z\in\mathbb{C}}|1/f(z)| < \infty$ (bo $\lim_{z\to\infty} 1/f(z) = 0$, patrz §I.6.B). Zatem $1/f = \text{const}$, wbrew założeniu, że $n \geqslant 1$. $\square$

D. Twierdzenia o zbieżności ciągów funkcji holomorficznych.

Twierdzenie 1 (Weierstrassa)**.** *Niech U będzie otwartym podzbiorem płaszczyzny $\mathbb{C}$ i niech $f_n \in H(U)$ dla $n \geq 1$. Jeśli ciąg (f_n) jest zbieżny niemal jednostajnie do funkcji $f : U \to \mathbb{C}$, to funkcja ta jest holomorficzna, zaś ciąg (f'_n) jest zbieżny niemal jednostajnie do funkcji f'.*

Dowód. a) Ciągłość funkcji f wynika z uwagi 1 z §I.3. Holomorficzności dowieść wiec można sprawdzając, czy dla dowolnego trójkąta $\triangle \subset U$ spełniony jest warunek Morery-Goursata: $\int\limits_{\partial\triangle} f = 0$. Warunek ten spełnia jednak każda z funkcji $f_n \in H(U)$, zaś na podstawie wniosku 1 w §II. 1, $\int\limits_{\partial\triangle} f_n \to \int\limits_{\partial\triangle} f$. Zatem $\int\limits_{\partial\triangle} f = 0$.

b) Pozostaje dowieść, że gdy $K \subset U$ jest zbiorem zwartym, to $\|f' - f_n'\|_K \to 0$. W tym celu przyjmijmy $r = \frac{1}{3}\operatorname{dist}(K, \mathbb{C} \setminus U)$ oraz $L = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{dist}(z, K) \leq r\}$. Wtedy $L \subset U$ i z nierówności Cauchy'ego wynika, że $|f'(z) - f_n'(z)| \leq \frac{1}{r}\|f - f_n\|_L$ dla $z \in K$. (Nierówność Cauchy'ego odnosimy do funkcji $f - f_n$, określonej na kole domkniętym $\overline{D}(z, r) \subset L$.) Ponieważ ciąg (f_n) jest na zwartym zbiorze L jednostajnie zbieżny do f, więc $\|f' - f_n'\|_K \to 0$. $\square$

Zadanie. Niech ciąg funkcji $f_n : U \to \mathbb{C}$, gdzie $U \subset \mathbb{C}$ jest zbiorem otwartym, będzie niemal jednostajnie zbieżny do funkcji f. Dowieść, że jeśli każda z funkcji f_n ma funkcję pierwotną, to i f ją ma. (Wskazówka: część a) dowodu i twierdzenie 1 w §II.2.)

Twierdzenie 2 (Osgooda–Stieltjesa). [6] *Niech zbiór $U \subset \mathbb{C}$ będzie otwarty i niech funkcje $f_n \in H(U)$, $n \geq 1$, będą wspólnie ograniczone (tzn. istnieje stała M taka, że $|f_n| < M$ dla $n = 1, 2 \ldots$). Wówczas:*

a) Jeśli ciąg $(f_n(p))$ jest zbieżny dla wszystkich punktów p z pewnego gęstego podzbioru P zbioru U, to ciąg (f_n) jest zbieżny niemal jednostajnie.

b) Z ciągu (f_n) można wybrać podciąg zbieżny niemal jednostajnie.

W dowodzie wykorzystamy następujący

Lemat 1. *Gdy $g \in H(\overline{D}(p, r))$ i $|g| \leq M$, to $|g(z_1) - g(z_2)| \leq (4M/r)|z_1 - z_2|$ dla $z_1, z_2 \in D(p, r/2)$.*

Dowód. Ustalmy punkty $z_1, z_2 \in D(p, r/2)$ i oznaczmy dysk $D(p, r)$ przez D. Wówczas $|w - z_i| \geq r/2$ dla $i = 1, 2$ i wszystkich $w \in \partial D$, skąd ze wzoru Cauchy'ego otrzymujemy

$$|f(z_1) - f(z_2)| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_{\partial D} f(w)\left(\frac{1}{w - z_1} - \frac{1}{w - z_2}\right) dw\right| \leq \frac{2\pi r}{2\pi} \sup_{w \in \partial D} \frac{|f(w)||z_1 - z_2|}{|w - z_1||w - z_2|}$$

i wobec tego $|f(z_1) - f(z_2)| \leq r \cdot \frac{M|z_1 - z_2|}{(r/2)^2}$ $\square$

Dowód twierdzenia 2. Czytelnik znający twierdzenie Arzeli–Ascolie'ego może łatwo, w oparciu o lemat, uzyskać zasadniczą część b). Podamy jednak bezpośredni dowód obu części.

Ad a). Należy dowieść, że gdy $K \subset U$ jest (dowolnym, lecz ustalonym) zbiorem zwartym, to ciąg $(f_{n|K})$ jest zbieżny jednostajnie.

W tym celu ustalmy liczbę $r < \operatorname{dist}(K, \mathbb{C} \setminus U)$. Dla dowolnej liczby $\varepsilon \in (0, r/2)$ możemy z pokrycia $\{D(p, \varepsilon)\}_{p \in P}$ zbioru K wybrać pokrycie skończone, $\{D(p, \varepsilon)\}_{p \in P_0}$.

[6] Twierdzenie to często wiązane jest też z nazwiskiem Montela, który je wzmocnił. (Patrz §3.)

Ponieważ każdy ze skończenie wielu ciągów $(f_n(p))$, $p \in P_0$, jest zbieżny, więc istnieje liczba n taka, że

$$|f_k(p) - f_l(p)| \leq \varepsilon \quad \text{dla } k, l > n \ \text{ i } \ p \in P_0.$$

Oznaczmy przez M stałą taką, że $|f_n| < M$ dla każdego n. Gdy $z \in K$, to istnieje punkt $p \in P_0 \cap D(z, \varepsilon)$ i na podstawie lematu zastosowanego do $g = f_i$,

$$|f_i(z) - f_i(p)| \leq (4M/r)|z - p| < (4M/r)\varepsilon \quad \text{dla } i = 1, 2 \ldots$$

Zatem gdy $k, l > n$, to

$$|f_k(z) - f_l(z)| \leq |f_k(z) - f_k(p)| + |f_k(p) - f_l(p)| + |f_l(p) - f_l(z)| \leq \frac{4M\varepsilon}{r} + \varepsilon + \frac{4M\varepsilon}{r}$$

Wobec dowolności punktu $z \in K$ wynika stąd, że ciąg $(f_{n|K})$ spełnia w normie $\| \, \|_K$ warunek Cauchy'ego, czyli jest zbieżny jednostajnie.

Ad b). Obierzmy przeliczalny zbiór $P = \{p_1, p_2, \ldots\}$, gęsty w U. Ponieważ ciąg $(f_n(p_1))$ jest ograniczony, więc można z niego wybrać podciąg zbieżny $(f_{n1}(p_1))$. Indukcyjnie, dla $i \geq 2$ tworzymy podciąg (f_{ni}) ciągu $(f_{n,i-1})$ tak, by ciąg $(f_{ni}(p_i))_{n=1}^{\infty}$ był zbieżny. Podciąg $f_{11}, f_{22}, \ldots$ ciągu (f_n) jest zbieżny w każdym punkcie p_i, więc na mocy a) jest zbieżny niemal jednostajnie. □

Uwaga 1. * Założenie wspólnej ograniczoności funkcji $f_n \in H(U)$ można w tw. 2 osłabić tak: funkcje te są *lokalnie wspólnie ograniczone*, tzn. dla każdego punktu $p \in U$ istnieje jego otoczenie D, na którym funkcje $f_{n|D}$ są wspólnie ograniczone. Wynika to z obecnej wersji twierdzenia, bo funkcje spełniające osłabiony warunek są wspólnie ograniczone na każdym zbiorze zwartym $K \subset U$ (dlaczego?). ⊟

Uwaga 2. * Za Vitalim odnotujmy, że gdy U jest obszarem, to część a) twierdzenia pozostanie słuszna gdy zażądać w niej jedynie, by zbiór P miał w U punkt skupienia (w miejsce tego, by był w U gęsty). Istotnie, w przeciwnym razie istniałyby –na mocy dowiedzionej już wersji części a)– punkt $z \in U$ i podciągi (g_n) i (h_n) ciągu (f_n) takie, że $\lim_n g_n(z) \neq \lim_n h_n(z)$. Z (g_n) i (h_n) można zaś wybrać podciągi zbieżne niemal jednostajnie, zgodnie z częścią b). Granice tych podciągów byłyby funkcjami holomorficznymi w U, różnymi w punkcie z i równymi na zbiorze P, mającym w U punkt skupienia – wbrew zasadzie identyczności. □

3 * Dodatek: Twierdzenia Picarda i Montela.

Przedstawione w §§2.C i 2.D twierdzenia Liouville'a i Osgooda–Stieltjesa zostały ogromnie wzmocnione przez Picarda i Montela:

Twierdzenie 1 (Picarda, małe)**.** *Gdy funkcja holomorficzna* $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *nie jest stała, to jej obraz wypełnia całą płaszczyznę* $\mathbb{C}$*, z pominięciem być może jednego punktu.*

Twierdzenie 2 (Montela)**.** *Niech zbiór* $U \subset \mathbb{C}$ *będzie otwarty i niech funkcje* $f_n \in H(U), n \geq 1$*, nie przyjmują dwóch ustalonych wartości. Wówczas z ciągu* (f_n) *można wybrać ciąg zbieżny niemal jednostajnie (względem metryki sfery Riemanna* $\widetilde{\mathbb{C}}$*) do pewnej funkcji* $f : U \to \widetilde{\mathbb{C}}$*.*

Uwaga 1. Twierdzenie Montela można też uściślić tak: gdy $U \subset \mathbb{C}$ jest obszarem i funkcje $f_n \in H(U)$ nie przyjmują dwóch ustalonych wartości, to ciąg (f_n) jest niemal jednostajnie zbieżny do funkcji stałej, równej ∞, lub też można z niego wybrać podciąg zbieżny niemal jednostajnie do funkcji, przyjmującej wartości w $\mathbb{C}$. Wynika to łatwo z podanego niżej dowodu, a także z ogólnych faktów, rozważanych w §.... (patrz ....).

Uwaga 2. „Wartość pomijana” w twierdzeniu Picarda może istnieć – np., jest nią 0 w przypadku funkcji $z \mapsto \mathrm{e}^z$. Natomiast przykład ciągu funkcji $f_n(z) = \mathrm{e}^{nz}$ (którego żaden podciąg nie jest zbieżny czy to do funkcji skończonej, czy też równej ∞) pokazuje, że w twierdzeniu Montela konieczne jest uwzględnienie dwóch pomijanych wartości.

W poniższym materiale uzupełniającym podamy dowód obu twierdzeń, wzorowany na przedstawionym w książce Saksa i Zygmunda podejściu Blocha. Dowód ten, choć wychodzi poza zakres programu wykładu, to jest całkowicie elementarny i może bez trudu być przyswojony przez zainteresowanego czytelnika. Jest on jednak oparty na pewnym geometrycznym lemacie Blocha–Landaua, który omówimy dopiero w rozdziale V. Oto on:

Lemat 1 (Blocha–Landaua)**.** * *Gdy funkcja* h *jest holomoficzna w kole domkniętym* $\overline{D}(p, r)$*, to jej obraz zawiera dysk o promieniu* $Lr|h'(p)|$*, gdzie* $L = 1/24$*.*

Potrzebny będzie też

Lemat 2. * *Niech* $V = \mathbb{C}$ *lub* V *będzie dyskiem w* $\mathbb{C}$*, i niech funkcja* $f \in H(V)$ *nie przyjmuje żadnej z wartości* ± 1*. Wówczas istnieją funkcje* $l, h \in H(V)$ *takie, że:*
a) l *jest złożeniem funkcji* $\cos$ *i* h*, co zapisujemy* $l = \cos h$*, i podobnie* $f = \cos(\pi l)$*,*
b) obraz funkcji h *nie zawiera żadnego dysku o promieniu* $\pi\sqrt{2}$*.*

Do dowodu twierdzenia Montela wykorzystamy i inny lemat, sformułowany niżej. Udowodnimy wpierw oba twierdzenia, przyjmując lematy za prawdziwe.

* Dowód małego twierdzenia Picarda. Niech $f \in H(\mathbb{C})$ i przypuśćmy, że $a, b \in \mathbb{C} \setminus \mathrm{im}(f)$. Możemy f złożyć z funkcją afiniczną u, przeprowadzającą a na -1, zaś b na 1;

pozwala to przyjąć bez zmniejszenia ogólności, że $a = -1$ i $b = 1$. (Jeśli bowiem funkcja $u \circ f$ okaże się stała, to taka będzie i funkcja $f = u^{-1} \circ (u \circ f)$.)

Niech wiec $\pm 1 \notin \operatorname{im}(f)$. Utwórzmy funkcje $l, h \in H(\mathbb{C})$ jak w lemacie 2. Na podstawie lematu Blocha–Landaua, $h'(p) = 0$ dla każdego $p \in \mathbb{C}$ (gdyż jeśli $h'(p) \neq 0$, to stosując lemat przy r dostatecznie wielkim wywnioskowalibyśmy, że obraz funkcji h zawiera dysk o promieniu $\pi\sqrt{2}$). Zatem funkcja h, a za nią i funkcja $f = \cos(\pi \cos h)$, są stałe. $\square$

Dowód twierdzenia Montela oprzemy na następującej konsekwencji lematów 1 i 2:

Lemat 3 (Schottky'ego)**.** * *Istnieją ciągłe funkcje $v : [0, \infty) \to \mathbb{R}, w : [0, 1) \to \mathbb{R}$ takie, że gdy funkcja $f \in H(D(p, r))$ nie przyjmuje wartości ± 1, to zachodzi nierówność:*

$$\ln|f(z)| \leq v(|f(p)|) \cdot w(\frac{1}{r}|z - p|) \quad \text{dla} \quad z \in D(p, r)$$

* Dowód twierdzenia Montela. Jak wyżej możemy zakładać, że $\pm 1 \notin \operatorname{im}(f_n)$. Wystarczy dowieść, że każdy punkt $z_0 \in U$ należy do dysku D takiego, że z ciągu $(f_{n|D})$ da się wybrać podciąg zbieżny jednostajnie. Pozwoli to bowiem pokryć U przeliczalnie wieloma takimi dyskami, a następnie wybrać przy pomocy metody przekątniowej podciąg ciągu (f_n), zbieżny jednostajnie na każdym z dysków. Szczegóły, analogiczne jak w końcowej części dowodu twierdzenia Osgooda–Stieltjesa, pozostawione są jako ćwiczenie.

Niech więc $z_0 \in U$ i niech $R := \frac{1}{4} \operatorname{dist}(z_0, \mathbb{C} \setminus U)$. Zachodzi jeden z dwóch przypadków:

a) Istnieje punkt $p \in D(z_0, R)$ i ograniczony podciąg $(f_{n_j}(p))$ ciągu $(f_n(p))$. Wyrazy tego podciągu leżą w pewnym dysku $|z| < M$ i przy oznaczeniach tezy lematu Schottky'ego mamy dla $z \in D(p, 2R)$ i $j \in \mathbb{N}$:

$$\ln|f_{n_j}(z)| \leq \sup\{v(s) : s \leq M\} \cdot \sup\{w(t) : t \leq 2/3\}$$

(Korzystamy z tego, że $D(p, 3R) \subset U$.) Twierdzenie Osgooda–Stieltjesa pozwala więc z ciągu (f_{n_j}) wybrać podciąg zbieżny jednostajnie na $\overline{D}$, gdzie $D = D(p, R) \ni z_0$.

b) $\lim_n f_n(p) = \infty$ dla każdego punktu $p \in D(z_0, R)$. Przy $g(z) = \frac{z-3}{z+1}$, założenie z a) stosuje się wtedy do funkcji $h_n = g \circ f_n$. (Są one dobrze określone i nie przyjmują wartości ± 1, bo f_n mają tę własność.) Wobec tego można z (h_n) wybrać podciąg (h_{n_j}), zbieżny jednostajnie na dysku $D = D(p, R)$, przy czym graniczną funkcją musi być $g(\infty)$. Tym samym ciąg funkcji $f_{n_j} = g^{-1} \circ h_{n_j}$ jest na D zbieżny jednostajnie do ∞. $\square$

Przejdźmy do lematów. Lemat Blocha–Landaua i jego dowód omówimy w §V.2, gdzie wydają się lepiej pasować tematycznie. [7] Natomiast lemat 2 łatwo wynika z wcześniejszych wiadomości, jak następuje. Na podstawie zadania w §2.A istnieje funkcja $l \in H(V)$

[7] Ponieważ §V.2 wykorzystuje tylko zasadę maksimum, więc mógłby jednak ten lemat, ze zmienioną stałą L, być udowodniony już teraz, w oparciu o ostatnie zadanie z §1.D (w miejsce twierdzenia 2 z IV.5).

taka, że $\cos(\pi l) = f$; wtedy $\mathrm{im}(l) \cap \mathbb{Z} = \emptyset$ (bo $\cos(\pi\mathbb{Z}) = \{-1, 1\}$) i ponownie istnieje funkcja $h \in H(V)$ dla której $\cos(h) = l$. A że $\mathrm{im}(l) \subset \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$, to $\mathrm{im}(h)$ nie zawiera dysku o promieniu $\pi\sqrt{2}$, na podstawie końcowego zadania z §I.6.A.

* <u>Dowód lematu 3.</u> Obierzmy funkcje l i h jak w lemacie 2. Możemy zakładać, że $p = 0$ (inaczej zastąpimy f przez $z \mapsto f(z + p)$) oraz, ze względu na okresowość funkcji cos, że $|\mathrm{Re}\, h(0)| \leq \pi$ i $|\mathrm{Re}\, \pi l(0)| \leq \pi$.

Niech $z \in D(0, r)$. Z lematu Blocha–Landaua, zastosowanego do funkcji $h_{|D(z,r-|z|)}$, wynika oszacowanie $|h'(z)|(r - |z|) \leq C$, gdzie $C = 24\pi\sqrt{2}$. Zatem

$$|h(z) - h(0)| = |\int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} h(tz)\, \mathrm{d}t| \leq \int_0^1 |z||h'(tz)|\, \mathrm{d}t \leq C \int_0^1 \frac{|z|}{r - t|z|}\, \mathrm{d}t = C \ln\Big(\frac{r}{r - |z|}\Big)$$

i ostatecznie $|h(z)| \leq |h(0)| + C \ln \frac{r}{r-|z|}$. Z równości $f = \cos(\pi l)$ i nierówności $|\cos z| \leq \mathrm{e}^{|z|}$ wynika więc, że

$$\frac{1}{\pi} \ln|f(z)| \leq |l(z)| = |\cos h(z)| \leq \mathrm{e}^{|h(z)|} \leq \mathrm{e}^{|h(0)|} \exp(C \ln \frac{1}{1 - \frac{1}{r}|z|})$$

Pozostaje dowieść, że $|h(0)| \leq u(|f(0)|)$ dla pewnej (niezależnej od f) funkcji ciągłej $u : [0, \infty) \to \mathbb{R}$.

Ponieważ jednak $|l(0)| = |\cos h(0)|$, więc na podstawie końcowego zadania z §I.6.A funkcja ciągła $u_0 = (\mathrm{sh}_{|\mathbb{R}})^{-1}$ ma tę własność, że $|\mathrm{Im}\, h(0)| \leq u_0(|l(0)|)$. A że $|\mathrm{Re}\, h(0)| \leq \pi$, to $|h(0)| \leq u_1(|l(0)|)$, gdzie $u_1 = \sqrt{u_0^2 + \pi^2}$. Zastępując wyżej h przez πl, a l przez f, utwierdzamy się w tym, że $|\pi l(0)| \leq u_1(|f(0)|)$, i że możemy przyjąć $u = u_1 \circ (\frac{1}{\pi} u_1)$. $\square$

IV Izolowane osobliwości funkcji holomorficznych

1 Rozwijanie funkcji w szereg Laurenta.

Jak wiemy, funkcję $f \in H(U)$ można na każdym dysku, zawartym w U, rozwinąć w szereg Taylora. Na różnych dyskach uzyskujemy jednak różne szeregi i na ogół potrzeba użyć nieskończenie wielu szeregów, by opisać funkcję. Jest tak i w najważniejszym dla tego rozdziału przypadku, gdy U jest dyskiem, z którego usunięto środek. .... Laurent zaproponował wyjście z tej trudności, polegające na wykorzystaniu szeregów nieco ogólniejszych od potęgowych.

Definicja. *Szeregiem Laurenta o środku w p* (lub: *wokół punktu p*) nazywamy szereg funkcyjny

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} \left(\frac{1}{z-p}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-p)^n \tag{1}$$

Pierwszy z szeregów w (1) nazywamy *częścią główną*, zaś drugi – *częścią regularną* szeregu (1). Szereg (1) nazywamy zbieżnym w danym punkcie, czy też (niemal) jednostajnie zbieżnym w danym zbiorze, jeśli takie są obie te części.

Zwięźlejszy zapis szeregu (1) to $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-p)^n$ lub $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(z-p)^n$.

Z własności szeregów potęgowych wynika, że część główna jest zbieżna w punkcie z, gdy $|\frac{1}{z-p}| < r_0$, zaś część regularna – gdy $|z-p| < r_1$, gdzie

$$r_0 = 1/\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_{-n}|} \quad \text{oraz} \quad r_1 = 1/\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|} \tag{2}$$

Więcej: z nierówności $1/r_0 < |z-p| < r_1$ wynika zbieżność szeregu (1) w punkcie z, a z niej wynika nierówność $1/r_0 \leq |z-p| \leq r_1$. Ponadto, na zbiorze $\{z : \frac{1}{r_0} + \varepsilon < |z-p|\}$ (odpowiednio: $\{z : |z-p| < r_1 - \varepsilon\}$) zbieżność części głównej (odp.: części regularnej) jest jednostajna, $\forall \varepsilon > 0$. Udowodniliśmy

Twierdzenie 1. *Szereg Laurenta (1) jest zbieżny niemal jednostajnie w pierścieniu $P = D(p,r_1) \setminus \overline{D}(p,1/r_0)$, zaś rozbieżny w każdym punkcie $z \notin \overline{P}$, gdzie r_0 i r_1 są dane wzorami (2). Podobnie, część główna (odp. regularna) tego szeregu jest zbieżna niemal jednostajnie w zbiorze $\mathbb{C} \setminus \overline{D}(p, \frac{1}{r_0})$ (odp. na dysku $D(p,r_1)$). Na zbiorach tych, sumy odpowiednich szeregów są więc funkcjami holomorficznymi.* □

Zbiór P nazywamy *pierścieniem zbieżności* szeregu (1). Jest on pusty, gdy $1/r_0 \geq r_1$; może też być tak, że $r_0 = \infty$ i/ lub $r_1 = \infty$. Ponieważ $D(p,\infty) = \mathbb{C}$ i $\overline{D}(p,0) = \{p\}$, to

$$P = \begin{cases} \mathbb{C} \setminus \{p\} & \text{gdy } r_0 = r_1 = \infty \quad \text{(płaszczyzna bez punktu)} \\ D(p,r) \setminus \{p\} & \text{gdy } r_0 = \infty, r_1 < \infty \quad \text{(dysk bez swego środka)} \\ \mathbb{C} \setminus \overline{D}(p, \frac{1}{r_0}) & \text{gdy } r_1 = \infty \text{ i } 0 < r_0 < \infty \quad \text{(zewnętrze dysku)} \end{cases}$$

Twierdzenie 2 (Laurenta). *Niech $0 \le R_0 < R_1 \le \infty$ i funkcja f będzie holomorficzna w pierścieniu $P = D(p,R_1) \setminus \overline{D}(p,R_0)$. Wówczas $f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(z-p)^n$ dla $z \in P$, gdzie współczynniki c_n są dane wzorami Cauchy'ego–Laurenta:*

$$c_n = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int\limits_{\partial D(p,r)} \frac{f(w)}{(w-p)^{n+1}} \,\mathrm{d}w \quad \textit{dla} \;\; n \in \mathbb{Z} \;\; \textit{i} \;\; r \in (R_0, R_1) \tag{3}$$

Dowód. Zauważmy wpierw, że całka w (3) nie zależy od r. Istotnie, gdy $R_0 < r_0 < r_1 < R_1$, to funkcja $g(w) = f(w)/(w-p)^{n+1}$ jest holomorficzna w pierścieniu domkniętym $\overline{D}(p,r_1) \setminus D(p,r_0)$, skąd $\int\limits_{\partial D(p,r_0)} g = \int\limits_{\partial D(p,r_1)} g$. (Patrz „przykładowe zastosowania" w §II.5.)

Następnie, ustalmy punkt $z \in P$ i obierzmy r_0, r_1 tak, by $R_0 < r_0 < |z-p| < r_1 < R_1$. Przyjmijmy też $h(w) = \frac{f(w)-f(z)}{w-z}$ dla $w \in P \setminus \{z\}$. Ponieważ granica $\lim_{w\to z} h(w) = f'(z)$ istnieje, więc h przedłuża się do funkcji $\widetilde{h} \in H(P)$. (Korzystamy z wniosku 1 w §III.1.E.) Ponownie,

$$\int\limits_{\partial D_0} \widetilde{h} = \int\limits_{\partial D_1} \widetilde{h}, \qquad \text{gdzie} \quad D_0 = D(p,r_0),\ D_1 = D(p,r_1).$$

Możemy wyżej zastąpić $\widetilde{h}$ przez h (obie funkcje są równe na $\partial D_0 \cup \partial D_1$), co po uwzględnieniu definicji funkcji h prowadzi do równości

$$f(z)\Big(\int\limits_{\partial D_1} \frac{1}{w-z} \,\mathrm{d}w - \int\limits_{\partial D_0} \frac{1}{w-z} \,\mathrm{d}w \Big) = \int\limits_{\partial D_1} \frac{f(w)}{w-z} \,\mathrm{d}w - \int\limits_{\partial D_0} \frac{f(w)}{w-z} \,\mathrm{d}w \tag{4}$$

Ponieważ $z \in D_1 \setminus \overline{D_0}$, więc lewa strona w (4) jest równa $2\pi \mathrm{i} f(z)$ na mocy przywołanego „zastosowania" z §II.5, zaś do prawej stosują się twierdzenie o transformacie Cauchy'ego z §II.7 i następujące po nim zadanie. Otrzymujemy

$$2\pi \mathrm{i} f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n (z-p)^n + \sum_{n=1}^{\infty} d_{-n} \left(\frac{1}{z-p} \right)^n,$$

gdzie

$$d_n = \int\limits_{\partial D_1} \frac{f(w)}{(w-p)^{n+1}} \,\mathrm{d}w \;\; \text{dla} \;\; n \ge 0 \quad \text{i} \quad d_n = \int\limits_{\partial D_0} \frac{f(w)}{(w-p)^{n+1}} \,\mathrm{d}w \;\; \text{dla } n < 0.$$

Jak już wiemy, można w tych wzorach pętle ∂D_1 czy ∂D_0 zastąpić przez $\partial D(p,r)$, dla dowolnego $r \in (R_0, R_1)$. To kończy dowód. $\square$

Twierdzenie 3. *Gdy f rozwija się w pierścieniu $P = D(p,R_1) \setminus \overline{D}(p,R_0)$ w szereg Laurenta $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(z-p)^n$, to funkcja $g(z) = f(z) - c_{-1}\frac{1}{z-p}$ ma w tym pierścieniu funkcję pierwotną.*

Dowód. Szereg $\sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{-1\}} \frac{c_n}{n+1}(z-p)^{n+1}$ ma ten sam pierścień zbieżności, co szereg $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(z-p)^n$, bo $\lim \sqrt[n]{n} = 1$. Skoro więc drugi z tych szeregów jest w P zbieżny, to pierwszy też, i to niemal jednostajnie. (Korzystamy z twierdzenia 1.) Jego suma jest na mocy twierdzenia Weierstrassa żądaną funkcją pierwotną. $\square$

Wniosek 1. *Przy założeniach twierdzenia, dla każdej pętli γ w P ma miejsce równość $\int_\gamma f = c_{-1}\int_\gamma \frac{1}{w-p}\,\mathrm{d}w$. W szczególności, $c_{-1} = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_{\partial D(p,r)} f(w)\,\mathrm{d}w$ dla $r \in (R_0,R_1)$.*

Dowód. Część pierwsza wynika z twierdzenia 1 w §II.2, odniesionego do powyższej funkcji g, zaś druga – z pierwszej, odniesionej do pętli $\partial D(p,r)$. $\square$

Wniosek 2. *Funkcja, holomorficzna w pierścieniu $P = D(p,R_1) \setminus \overline{D}(p,R_0)$, jest sumą dokładnie jednego szeregu Laurenta o środku w p. Współczynniki c_n tego szeregu są dane wzorami Cauchy'ego–Laurenta.*

Dowód. Wobec twierdzenia 2 wystarcza dowieść jednoznaczności. Jednoznaczność współczynnika c_{-1} wynika z wniosku 1. Odnosząc ją do funkcji $f(z)(z-p)^{-k-1} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(z-p)^{n-k-1}$ otrzymujemy jednoznaczność współczynnika c_k, dla każdego $k \in \mathbb{Z}$. $\square$

Przykład. Niech $w, p \in \mathbb{C}$ i niech $f(z) = 1/(z-w)^k$, gdzie $k > 0$. Z wniosku 2 wynika, że w pierścieniu $P = \{z : |z-p| > |w-p|\}$ funkcja f rozwija się w szereg Laurenta o środku w p. By znaleźć to rozwinięcie, możemy dla $k = 1$ postąpić tak: ponieważ $f(z) = 1/(z-p)(1-\frac{w-p}{z-p})$, wiec z tożsamości $\frac{1}{1-q} = 1 + q + q^2 + \ldots$, prawdziwej gdy $|q| < 1$, wynika równość $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(w-p)^n}{(z-p)^{n+1}}$ dla $z \in P$. Przez kolejne różniczkowania, prowadzi ona do rozwiązania i dla $k > 1$. $\boxminus$

Uwaga 1. Przykład ten wskazuje, jak daną funkcję wymierną f rozwinąć w szereg Laurenta na pierścieniu otwartym, który nie zawiera jej punktu osobliwego. Możemy bowiem f przedstawić w postaci skończonej sumy tzw. ułamków prostych, por. tw. 2 w §7, a każdy z nich rozwinąć jak w przykładzie.

Zadanie. * Przy założeniach twierdzenia 2 istnieje jedyna para funkcji $f_0 \in H(D(p,R_1))$ i $f_1 \in H(\mathbb{C} \setminus \overline{D}(p,R_0))$ takich, że $f = f_{0|P} + f_{1|P}$ i $\lim_{z\to\infty} f_1(z) = 0$.

2 Rola współczynników szeregu Laurenta

Definicja. Powiemy, że podzbiór V sfery Riemanna $\widetilde{\mathbb{C}}$ jest *nakłutym otoczeniem* punktu $p \in \widetilde{\mathbb{C}}$, jeśli $V \cup \{p\}$ jest otoczeniem tego punktu. (Może więc, ale nie musi zachodzić $p \in V$.) Gdy $p \in \mathbb{C}$ oznacza to istnienie liczby $r > 0$ takiej, że $D(p, r) \setminus \{p\} \subset V$, zaś gdy $p = \infty$ – istnienie liczby $r > 0$ takiej, że $\{z \in \mathbb{C} : |z| > r\} \subset V$.

Zakładamy niżej, że obszar $V \subset \mathbb{C}$ jest nakłutym otoczeniem punktu $p \neq \infty$ i że $f \in H(V)$. Zakładamy też, że $D(p, R) \subset V \cup \{p\}$. Funkcję f rozwińmy w pierścieniu $D(p, R) \setminus \{p\} \subset V$ w szereg Laurenta $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(z - p)^n$. Ze względu na wzory Cauchy'ego–Laurenta, współczynniki c_n nie zależą od R.

Definicja. Powyższy szereg nazywamy *szeregiem Laurenta funkcji f, o środku w p*. Sumę $\sum_{n<0} c_n(z - p)^n$ jego części głównej nazwiemy *częścią osobliwą* funkcji f w punkcie p i oznaczymy G_pf. Natomiast współczynnik c_{-1} nazywany jest *residuum funkcji f w punkcie p* i oznaczany $\mathrm{res}_p f$. Znaczenie residuum stanie się widoczne w następnym paragrafie, zaś znaczenie funkcji G_pf ujmuje poniższa uwaga:

Uwaga 1. i) Część osobliwa G_pf jest określona i holomorficzna w całej płaszczyźnie nakłutej $\mathbb{C} \setminus \{p\}$. (Wynika to z twierdzenia 1 w §1.)

ii) Funkcja $f - G_pf_{|V}$ przedłuża się do funkcji, holomorficznej w zbiorze otwartym $V \cup \{p\}$. (Funkcję tą dla $z \in D(p, R)$ określamy wzorem $\widetilde{f}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - p)^n$.)

iii) Funkcje f i G_pf mają to samo residuum w punkcie p. □

Oznaczenie. Przyjmujemy też:

$$k(p) = \inf\{i \in \mathbb{Z} : c_i \neq 0\}$$

Zauważmy, że gdy $k(p) = \infty$, to $f_{|D(p,R)\setminus\{p\}} = 0$ i $f = 0$ z zasady izolowanych zer. Tak więc $k(p) \neq \infty$ gdy $f \neq 0$; może się jednak zdarzyć, że $k(p) = -\infty$.

Wniosek 1. *Funkcję f wtedy i tylko wtedy można przedłużyć do funkcji $\widetilde{f} \in H(V \cup \{p\})$, gdy $k(p) \geq 0$.*

Dowód. Gdy $k(p) \geq 0$, to $f - G_pf = f$ i możliwość przedłużenia wynika z ii). Przeciwnie, gdy przedłużenie istnieje i rozwinąć je w szereg Taylora o środku w p, to otrzymamy szereg Laurenta funkcji f, zaświadczający o nierówności $k(p) \geq 0$. □

Stwierdzenie 1. *Liczba $k \neq \pm\infty$ wtedy i tylko wtedy jest równa $k(p)$, gdy $f(z) = g(z)(z - p)^k$ dla $z \in V$, gdzie $g \in H(V \cup \{p\})$ i $g(p) \neq 0$.*

Dowód. Zastępując funkcję f przez $z \mapsto (z-p)^{-k} f(z)$ sprowadzamy dowód do przypadku, gdy $k = 0$ – a wtedy teza wynika z wniosku 1, gdyż $\widetilde{f}(p) = c_0$. $\boxminus$

Definicja. Powiemy, że funkcja f ma w punkcie p

osobliwość istotną, gdy $k(p) = -\infty$;

osobliwość usuwalną (lub: *pozorną*), gdy $k(p) \geq 0$;

biegun, gdy $k(p) < 0$ i $k(p) \neq -\infty$; liczbę $|k(p)|$ nazywamy *rzędem* tego bieguna.

Gdy liczba $k = k(p)$ jest skończona to powiemy też, że punkt p jest *uogólnionym zerem k-krotnym* funkcji f. Nazwę tą (które nie jest ogólnie przyjęta) motywujemy analogią pomiędzy stwierdzeniem 1 i uwagą 1 w §III.1.B. (W szczególności zauważamy, że gdy $p \in V$ i $k(p) > 0$, to p jest „prawdziwym" zerem krotności $k(p)$.) Natomiast nazwę „osobliwość usuwalna" wyjaśnia wniosek 1.

Przykłady wyznaczania residuum i krotności uogólnionych zer.

a) Oczywiście $\mathrm{res}_p f = \mathrm{res}_0 f(z-p)$ oraz $\mathrm{res}_p(f+g) = \mathrm{res}_p f + \mathrm{res}_p g$. Nieco ogólniej, gdy szereg $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ funkcji holomorficznych jest w pewnym otoczeniu nakłutym punktu p niemal jednostajnie zbieżny do funkcji f, to $\mathrm{res}_p f = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{res}_p f_n$. (Wynika to z wniosków 1 w §1 i w §II.1.)

b) Gdy $f(z) = g(z)/(z-p)^k$, gdzie $k > 0$ i funkcja g jest holomorficzna w otoczeniu punktu p, to $\mathrm{res}_p = \frac{1}{(k-1)!} g^{(k-1)}(p)$. Dla dowodu rozwińmy g w szereg Taylora: $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n (z-p)^n$. Podzielenie tej równości stronami przez $(z-p)^k$ wykazuje, że $\mathrm{res}_p f = d_{k-1} = \frac{1}{(k-1)!} g^{(k-1)}(p)$. (Dla przykładu, gdy $f(z) = 1/(z^2+1)^{k+1}$, to rachunek ten daje $\mathrm{res}_{\mathrm{i}} f = -\frac{\mathrm{i}}{2^{2k+1}} \frac{(2k)!}{(k!)^2}$ – dlaczego?)

c) Gdy funkcja f ma w punkcie p osobliwość usuwalną, to $\mathrm{res}_p f = 0$. Gdy zaś ma ona w p biegun rzędu k, to

$$\mathrm{res}_p f = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \to p} u^{(k-1)}(z), \quad \text{gdzie } u(z) = (z-p)^k f(z). \tag{5}$$

W tym bowiem przypadku powyższa funkcja u przedłuża się do funkcji $\widetilde{u}$, holomorficznej w otoczeniu punktu p. Stosując do funkcji $f(z) = \widetilde{u}(z)/(z-p)^k$ wzór z b) i wykorzystując ciągłość pochodnych funkcji holomorficznej, otrzymujemy żądaną równość.

d) W szczególności, gdy f ma w p biegun rzędu 1, to $\mathrm{res}_p f = \lim_{z \to p} (z-p) f(z)$.

e) W związku z b) powstaje pytanie, jak określić rząd bieguna. Odnotujmy więc, że gdy punkt p jest uogólnionym zerem k–krotnym funkcji g i l–krotnym funkcji h, to jest on uogólnionym zerem $(k-l)$–krotnym funkcji g/h. (Wynika to ze stwierdzenia 1.) Stąd gdy $k \geq l$, to funkcja g/h ma w p osobliwość usuwalną, a gdy $k < l$, to ma ona w p biegun rzędu $(l-k)$. Podobnie, p jest uogólnionym zerem $(k+l)$–krotnym funkcji $g \cdot h$.

Dla przykładu, niech $f(z) = (z - \pi/2)/(\sin z - 1)^2$, a za p przyjmijmy któreś z zer funkcji $\sin z - 1$, którymi są punkty $p_n = 2\pi n + \pi/2, n \in \mathbb{Z}$. Pierwsza pochodna funkcji

$\sin z - 1$ w p_n jest zerowa, zaś druga jest różna od zera, więc p_n jest zerem dwukrotnym tej funkcji, a czterokrotnym funkcji $(\sin z - 1)^2$. Zarazem p_n jest zerem zerokrotnym funkcji $z - \pi/2$ gdy $n \neq 0$, a jednokrotnym gdy $n = 0$. Wynika stąd, że f ma w punkcie $p_0 = \pi/2$ biegun rzędu trzy, a w punkcie p_n dla $n \neq 0$–rzędu cztery.

f) Niech funkcja g będzie holomorficzna w otoczeniu punktu p, przy czym $g(p) \neq 0$. Z d) i e) wynika, że gdy p jest biegunem rzędu jeden funkcji h, to $\mathrm{res}_p(g \cdot h) = \lim_{z\to p} g(z)(z-p)h(z) = g(p) \cdot \mathrm{res}_p h$. (Poczynione założenia są istotne!) Gdy zaś p jest zerem jednokrotnym funkcji h, to $\mathrm{res}_p(g/h) = \lim_{z\to p} g(z)\frac{z-p}{h(z)} = g(p)/h'(p)$.

g) Nierzadko wzory z c), najogólniejsze z powyższych, bądź się nie stosują (gdy badamy residuum w punkcie istotnie osobliwym), bądź są trudne do wykorzystania ze względów rachunkowych. Niekiedy bywa w takich przypadkach możliwe wykorzystanie szeregu Laurenta funkcji i wyznaczenie residuum wprost z definicji. Dla przykładu, niech $f(z) = z^2 e^{1/z}$. Rozwinięcie funkcji exp w szereg prowadzi do równości $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^{-k+2}$. Funkcja f ma więc w punkcie 0 osobliwość istotną i $\mathrm{res}_0 f = \frac{1}{6}$.

h)* Powróćmy do funkcji f z przykładu e). By obliczyć $\mathrm{res}_{p_n} f$ powinniśmy zastosować wzór (5) z $k = 3$ gdy $n = 0$ i $k = 4$ gdy $n \neq 0$. Ugrzęźniemy w nieprzyjemnych rachunkach nawet wtedy, gdy użyjemy pomocnej reguły de L'Hospitala (patrz niżej). Spróbujmy obliczyć $\mathrm{res}_{p_n} f$ inaczej. Mamy $\sin(p_n + z) = \cos z = 1 - \frac{z^2}{2}(1 - z^2 u(z^2))$, gdzie u jest funkcją holomorficzną i $u(0) = \frac{1}{12}$. Zatem $f(p_n + z) = 4(p_n - p_0 + z)/z^4(1 - z^2 u(z^2))^2$, zaś z tożsamości $1/(1-q) = 1 + q + q^2 + \ldots$ gdy $|q| < 1$ wynika, że $1/(1 - z^2 u(z^2))^2 = (1 + z^2 u(z^2) + z^4 v(z))^2 = 1 + 2z^2 u(z^2) + z^4 w(z)$, dla pewnych funkcji v, w, określonych i holomorficznych w otoczeniu zera. Wykorzystując jeszcze addytywność residuum (patrz a)) stwierdzamy więc łatwo, że $\mathrm{res}_{p_n} f = 8\mathrm{res}_0 \frac{u(z^2)}{z} = 8u(0) = 2/3$. (Odgrywa rolę to, że $\mathrm{res}_0 w = 0$, bo funkcja w jest holomorficzna w otoczeniu zera, oraz $\mathrm{res}_0(\frac{p_n - p_0}{z^2} u(z^2)) = 0$, bo rozwinięcie funkcji $u(z^2)$ w szereg Taylora wokół 0 ma zerowy współczynnik przy z^1.) $\boxminus$

Zadanie (*reguła de L'Hospitala*). Niech punkt p będzie uogólnionym zerem dodatniej krotności tak funkcji g, jak i funkcji h. Wówczas w $\widetilde{\mathbb{C}}$ granica $\lim_{z\to p} g(z)/h(z)$ istnieje i jest równa $\lim_{z\to p} g'(z)/h'(z)$.

Zadanie. * Niech 0 będzie uogólnionym zerem k–krotnym funkcji g i l–krotnym funkcji h. Gdy $k > 0$, to ilukrotnym jest 0 zerem złożenia $h \circ g$?

3 Twierdzenie o residuach.

Niech U będzie otwartym podzbiorem sfery Riemanna $\widetilde{\mathbb{C}}$.

Definicja. a) Powiemy, że f jest *funkcją holomorficzną w U poza izolowanymi osobliwościami*, jeśli istnieje zbiór $S(f) \subset U$, spełniający poniższe dwa warunki:

i) $U \setminus S(f) \subset \mathbb{C}$ i $f \in H(U \setminus S(f))$.

ii) $S(f)$ nie ma w U punktów skupienia.

(Drugą własność wyrażamy też mówiąc: zbiór $S(f)$ jest *dyskretny w U*.)

b) Zbiór wszystkich takich funkcji oznaczmy przez $\widetilde{H}(U)$.

c) Funkcje $f, g \in \widetilde{H}(U)$ uważamy za równe, gdy istnieje dyskretny w U zbiór S taki, że $f(z) = g(z)$ dla $z \in U \setminus S$.

Zadanie. Jeśli spełnione są warunki i) oraz ii), to

iii) Dla każdego zbioru zwartego $K \subset U$, zbiór $K \cap S(f)$ jest skończony.

iv) Zbiór $S(f)$ jest przeliczalny, a każdy jego podzbiór jest domknięty w U.

v) $U \setminus S(f)$ jest otoczeniem nakłutym każdego punktu $p \in S(f)$.

Uwaga 1. Zwróćmy uwagę na niejednoznaczność zbioru $S(f)$. Można np. dodać do niego dowolny zbiór dyskretny w U, a więc i dowolny punkt $p \in U$, nie tracąc warunków i) oraz ii). (Stąd badanie funkcji f wokół izolowanych punktów osobliwych obejmować może również badanie jej wokół punktów dziedziny $\mathrm{dom}(f)$.) Można też – na podstawie wniosku 1 z §2 – przedłużyć funkcję f holomorficznie na każdy z punktów $p \in S(f)$, w którym ma ona osobliwość usuwalną, i uzyskać to, że $S(f)$ zawiera tylko osobliwości istotne i bieguny.

Uwaga 2. Zbiór $\widetilde{H}(U)$ jest pierścieniem przy naturalnych działaniach: gdy $f, g \in \widetilde{H}(U)$, to zbiór $S = S(f) \cup S(g)$ jest dyskretny w U i każda z funkcji $f \pm g$, $f \cdot g$ jest poprawnie określona i holomorficzna w $U \setminus S$. Natomiast <u>nie</u> jest na ogół prawdą, że $1/f \in \widetilde{H}(U)$.

Następujące zasadnicze twierdzenie dotyczące funkcji z izolowanymi osobliwościami wyjaśnia zarazem znaczenie residuum i indeksu pętli w teorii funkcji analitycznych.

Twierdzenie 1 (Cauchy'ego o residuach). *Niech kawałkami gładka pętla γ będzie homotopijnie nieistotna w zbiorze otwartym $U \subset \mathbb{C}$ i niech $f \in \widetilde{H}(U)$. Jeśli $S(f) \cap \mathrm{im}(\gamma) = \emptyset$, to* $\mathrm{ind}(\gamma, p) = 0$ *dla prawie wszystkich $p \in S(f)$ i*

$$\int_\gamma f = 2\pi \mathrm{i} \sum_{p \in S(f)} (\mathrm{res}_p f) \cdot \mathrm{ind}(\gamma, p) \tag{6}$$

Uwaga 3. Gdy twierdzenie o residuach zastosować do funkcji $f(z) = g(z)/(z-p)^{k+1}$, gdzie $g \in H(U)$, to otrzymamy następujące uogólnienia wzorów całkowych Cauchy'ego:

$$\frac{k!}{2\pi \mathrm{i}} \int\limits_\gamma \frac{g(w)}{(w-p)^{k+1}}\, \mathrm{d}w = g^{(k)}(p) \cdot \mathrm{ind}(\gamma, p) \text{ dla } \; k = 0, 1 \ldots$$

(Wowczas bowiem, że $f \in H(U \setminus \{p\})$ i $\mathrm{res}_p f = g^{(k)}(p)/k!$; patrz przykład b) w §2.) Natomiast dla $k = -1$ otrzymamy równość $\int_\gamma g = 0$, z której łatwo wynika twierdzenie Cauchy'ego o równości całek. Twierdzenie o residuach uogólnia więc oba wcześniejsze twierdzenia Cauchy'ego. □

W dowodzie twierdzenia wykorzystamy następujący użyteczny lemat:

Lemat 1 (o usuwaniu osobliwości). *Niech funkcja $f \in H(V)$ ma osobliwości izolowane w punktach skończonego zbioru $P \subset \mathbb{C}$. Wówczas funkcję $g = f - \sum_{p \in P} G_p f_{|V}$ można przedłużyć do funkcji, holomorficznej w zbiorze otwartym $V \cup P$.*

Dowód. Dla danego punktu $p \in P$ zapiszmy g tak: $g = (f - G_p f) - \sum_{q \in P \setminus \{p\}} G_q f$. (Pomijamy znak obcięcia $_{|V}$.) Jak wiemy z uwagi 1 w §2, funkcja $f - G_p f$ holomorficznie przedłuża się na punkt p, zaś funkcje $G_q f$ są w jego otoczeniu holomorficzne. Zatem i funkcja g holomorficznie przedłuża się na (dowolny) punkt $p \in P$. □

<u>Dowód twierdzenia.</u> Wyróżnimy 3 kroki. Czytelnik może wpierw chcieć rozważyć najważniejszy przypadek, gdy zbiór $S(f)$ jest skończony – wtedy krok a) jest zbędny, a następne upraszczają się, przy $K = U$.

a) Istnieje zbiór zwarty K taki, że $\mathrm{im}(\gamma) \subset K \subset U$ i pętla γ jest homotopijnie nieistotna w K. Możemy bowiem przyjąć $K = \bigcup \{\mathrm{im}(\gamma_s) : s \in [0,1]\}$, gdzie $(\gamma_s)_{s \in [0,1]}$ jest homotopią, łączącą w U pętlę stałą z γ. (Zbiór ten jest zwarty, jako obraz prostokąta $[0,1] \times [a,b]$ przy ciągłym przekształceniu $(s,t) \mapsto \gamma_s(t)$.)

b) Z zadania w §1 wynika, że zbiór $P = K \cap S(f)$ jest skończony. Niech $g = f - \sum_{p \in P} G_p f$. Na mocy lematu można g przedłużyć do funkcji $\widetilde{g}$, holomorficznej w zbiorze otwartym $(U \setminus S(f)) \cup P \supset K$. Funkcje g i $\widetilde{g}$ są równe na obrazie pętli γ, bo ten jest zawarty w dziedzinie funkcji g. (Wykorzystaliśmy to, że $\mathrm{im}(\gamma) \subset U \setminus S(f)$.) A że pętla γ jest w K homotopijnie nieistotna, więc korzystając z twierdzenia Cauchy'ego otrzymujemy równości $\int_\gamma g = \int_\gamma \widetilde{g} = 0$. Zatem:

$$\int\limits_\gamma f = \sum_{p \in P} \int\limits_\gamma G_p f \tag{*}$$

c) Przypomnijmy, że funkcja $G_p f$ jest określona na całej płaszczyźnie nakłutej $\mathbb{C}\setminus\{p\}$, zaś jej residuum w punkcie p jest równe $\mathrm{res}_p f$. Odnosząc do tej funkcji wniosek 1 z §1 stwierdzamy więc, że $\int\limits_\gamma (G_p f)(w)\,\mathrm{d}w = \int\limits_\gamma \frac{\mathrm{res}_p f}{w-p}\,\mathrm{d}w$ dla $p \notin \mathrm{im}(\gamma)$. Przy tym jeśli $p \notin K$, to $\int\limits_\gamma \frac{1}{w-p}\,\mathrm{d}w = 0$, bo pętla γ jest homotopijnie nieistotna w zbiorze $K \subset \mathbb{C}\setminus\{p\}$. Ponieważ $P = S(f) \cap K$ i $S(f) \cap \mathrm{im}(\gamma) = \emptyset$, więc prawa strona w (*) jest równa $\sum_{p\in S(f)} \int\limits_\gamma \frac{\mathrm{res}_p f}{w-p}\,\mathrm{d}w$. Dowiedliśmy tezy, bo $\int\limits_\gamma \frac{1}{w-p}\,\mathrm{d}w = 2\pi\mathrm{i}\cdot\mathrm{ind}(\gamma,p)$. □

Zadanie. * Niech $f \in H(V)$, gdzie zbiór $V \subset \mathbb{C}$ jest otwarty. Dowieść, że zbiór

$$U = \{z \in \widetilde{\mathbb{C}} : V \text{ jest otoczeniem nakłutym punktu } z\}$$

jest otwarty w $\widetilde{\mathbb{C}}$ i dla $S(f) = U \setminus V$ spełnione są warunki i) oraz ii).

4 Funkcje meromorficzne i zasada argumentu.

Definicja. Niech zbiór $U \subset \mathbb{C}$ będzie otwarty. Funkcję $f \in \widetilde{H}(U)$ nazywamy *meromorficzną* w U, jeśli nie ma ona osobliwości istotnych. Zbiór funkcji meromorficznych w U oznaczamy przez $M(U)$.

Lemat 1. *Gdy U jest obszarem w $\mathbb{C}$ i $f \in M(U)$, to $f = 0$ lub zbiór $S(f) \cup f^{-1}(0)$ jest dyskretny w U.*

Dowód. Niech $f \neq 0$. Zakładamy niżej, że f rozszerzono na wszystkie punkty pozornie osobliwe. Ponieważ zbiór $S(f)$ jest dyskretny w U, więc pozostaje dowieść, że każdy punkt $p \in U$ ma otoczenie V_p takie, że $V_p \cap f^{-1}(0) \subset \{p\}$.

Gdy $p \in S(f)$, to istnienie V_p wynika stąd, że $\lim_{z\to p} f(z) = \infty$. Gdy zaś $p \in U\setminus S(f)$, to wynika ono z zasady izolowanych zer, odniesionej do funkcji $f \in H(U \setminus S(f))$. By mieć prawo z tej zasady skorzystać, trzeba rozwiązać następujące

Zadanie. Gdy zbiór $S \subset U$ jest dyskretny w obszarze U, to $U \setminus S$ jest obszarem.

Twierdzenie 1. *Niech U będzie obszarem w $\mathbb{C}$. Wówczas $M(U)$ jest ciałem (przy naturalnych działaniach), zamkniętym ze względu na różniczkowanie.*

Dowód. Niech $f, g \in M(U)$. Stwierdzamy, że:

i) $g/f \in M(U)$, bo funkcja g/f jest holomorficzna w U poza zbiorem $S = S(g) \cup (f^{-1}(0) \cup S(f))$, dyskretnym w U, przy czym w każdym punkcie $p \in S$ ma ona biegun lub osobliwość pozorną. (Korzystamy z przykładu e) w §2.)

ii) $f + g \in M(U)$, bo wokół każdego punktu $p \in U$ funkcja $f + g$ rozwija się w szereg Laurenta, którego część główna, w ślad za f i za g, zawiera tylko skończenie wiele wyrazów.

iii) Tak samo, $f' \in M(U)$. □

Oznaczenie. Niech $f \in M(U)$. Przez $Z_{f,K}$ oznaczamy sumę krotności zer funkcji f, uogólnionych lub nie, leżących w danym zbiorze $K \subset U$. (Gdy zbiór K jest zwarty, to zer tych jest na mocy lematu skończenie wiele i liczba $Z_{f,K}$ jest poprawnie określona.)

Wyznaczenie liczby $Z_{f,K}$ okaże się możliwe gdy spełniony jest poniższy warunek (dla zwięzłości, skracamy w nim „homotopijnie nieistotna” do „h.n.” i pomijamy założenie, że pętla jest kawałkami gładka):

$$\text{dana jest pętla } \gamma, \text{ h.n. w } K \text{ i taka, że } \operatorname{ind}(\gamma, p) = 1 \text{ dla } p \in K \setminus \operatorname{im}(\gamma). \tag{7}$$

Oto przykłady
takiej sytuacji:

Twierdzenie 2 (zasada argumentu)**.** *Niech K będzie zwartym podzbiorem obszaru $U \subset \mathbb{C}$, niech spełniony będzie warunek (7) i niech funkcja f będzie meromorficzna w U i nie ma zer ani biegunów na obrazie pętli γ. Wówczas*

$$Z_{f,K} = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int\limits_{\gamma} \frac{f'}{f} = \operatorname{ind}(f \circ \gamma, 0) \tag{8}$$

Uwaga 1. Nazwa „zasada argumentu” bierze się stąd, że $2\pi \cdot \operatorname{ind}(f \circ \gamma, 0)$ to przyrost argumentu punktu $f(p)$, gdy punkt $p = \gamma(t)$ jednokrotnie obiega krzywą $\operatorname{im}(\gamma)$ (tzn. parametr t w sposób rosnący przebiega dziedzinę pętli γ). Równość ta wynika z części i) uwagi 1 w §III.2.B. □

Do dowodu twierdzenia potrzebny będzie

Lemat 2. *Gdy punkt p jest zerem (uogólnionym lub nie) funkcji f, to jego krotność $k(p)$ jest równa* $\operatorname{res}_p(f'/f)$.

Dowód. Oznaczmy $k(p)$ przez k. Z założenia, istnieje otoczenie $D \subset U$ punktu p i funkcja $g \in H(D)$, takie, że $g(p) \neq 0$ i $f(z) = (z-p)^k g(z)$ dla $z \in D \setminus \{p\}$. Zatem $f'(z) = (z-p)^{k-1} h(z)$, gdzie $h(p) = kg(p) + 0 \cdot g'(p) \neq 0$. Z części d) i e) przykładu z §2 wynika więc, że f'/f ma w p biegun rzędu 1 i $\operatorname{res}_p(f'/f) = h(p)/g(p) = k$. □

Dowód twierdzenia. Druga równość w (8) wynika (jak?) z definicji indeksu. Pozostaje dowieść pierwszej.

Oznaczmy zbiór $S(f) \cup f^{-1}(0)$ przez S; na mocy lematu 1, jest on dyskretny w U. Funkcja f'/f jest holomorficzna w $U \setminus S$, a w punktach $p \in S$ jej residuum jest równe krotności $k(p)$ punktu p jako uogólnionego zera funkcji f. Ponadto z (7) i uwagi 1 iii) w §III.2.B wynika, że $\mathrm{ind}(\gamma, p) = 0$ gdy $p \notin K$, zaś $\mathrm{ind}(\gamma, p) = 1$ gdy $p \in K \setminus \mathrm{im}(\gamma)$. Wobec tego, na podstawie twierdzenia o residuach,

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int\limits_{\gamma} \frac{f'}{f} = \sum_{p \in S} \mathrm{res}_p(f'/f) \cdot \mathrm{ind}(\gamma, p) = \sum_{p \in S \cap K} k(p) \cdot 1 = Z_{f,K} \qquad \square$$

Zadanie. * a) Dowieść, że gdy założenia twierdzenia 2 są spełnione i $g \in H(U)$, to $\frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int\limits_{\gamma} \frac{gf'}{f} = \sum_{p \in S} g(p)k(p)$, gdzie S i $k(p)$ mają takie znaczenie, jak w powyższym dowodzie. (Wskazówka: przykład f) w §2.)

b) Wywnioskować, że gdy D jest dyskiem i funkcja $f \in H(\overline{D})$ ma, uwzględniając krotności, jedyne zero $z_0 \in D$, to $z_0^n = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int\limits_{\partial D} \frac{z^n f'(z)}{f(z)} \mathrm{d}z$ dla $n \in \mathbb{N}$.

Zadanie. * Dowieść, że gdy funkcje f, g są meromorficzne w obszarze $U \subset \mathbb{C}$ i zbiór $K \subset U$ jest zwarty, to $Z_{f \cdot g,K} = Z_{f,K} + Z_{g,K}$. (Wskazówka: przykład e) w §2.)

5 Twierdzenie Rouchégo; przykłady zastosowań.

Twierdzenie 1 (Rouchégo)**.** *Niech niech $U \subset \mathbb{C}$ będzie obszarem, zbiór $K \subset U$ będzie zwarty i spełniony będzie warunek (7). Jeśli funkcje $f, g \in M(U)$ nie mają biegunów na* $\mathrm{im}(\gamma)$ *oraz*

$$|g(w)| < |f(w)| \quad \text{dla} \;\; w \in \mathrm{im}(\gamma), \tag{9}$$

to $Z_{f,K} = Z_{f+g,K}$.

Dowód. Niech $\lambda = f \circ \gamma$ i $\mu = (f + g) \circ \gamma$. Z założenia, $|\lambda - \mu| < |\lambda|$, skąd f i g nie mają zer na $\mathrm{im}(\gamma)$, a homotopia $(s\mu + (1 - s)\lambda)_{s \in [0,1]}$ pomiędzy λ i μ przyjmuje wartości w $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Zatem $\mathrm{ind}(\lambda, 0) = \mathrm{ind}(\mu, 0)$ i teza wynika z zasady argumentu. $\square$

Uwaga 1. Załóżmy, zgodnie z uwagą 1 w §3, że f nie ma osobliwości usuwalnych. Wtedy

$$Z_{f,K} = N_{f,K} - B_{f,K} \tag{10}$$

gdzie $N_{f,K}$ to suma krotności „prawdziwych" zer funkcji $f \in M(U)$, leżących w K, zaś $B_{f,K}$ to suma rzędów jej biegunów w K. Gdy więc rozważana funkcja jest holomorficzna (nie ma biegunów), to zasada argumentu i twierdzenie Rouchégo dają informację o liczbie jej zer, liczonych z krotnościami. □

Wskażemy na pewne zastosowania twierdzenia Rouchégo:

Twierdzenie 2. *Gdy funkcja f jest holomorficzna w kole domkniętym $\overline{D}$ o środku w p i spełnia nierówność $|f(z) - f(p)| \geq R$ dla $z \in \partial D$, to obraz jej zawiera dysk $D(f(p), R)$.*

Dowód. Załóżmy dodatkowo, że $f(p) = 0$ (inaczej zastąpmy f przez $f - f(p)$). Niech $w \in D(0, R)$. Wtedy z założenia i twierdzenia Rouchégo wynika, że funkcja $f - w$ ma tyle zer w dysku D, co funkcja f – a więc ma co najmniej jedno, bo $f(p) = 0$. Zatem $w \in \mathrm{im}(f)$. □

Twierdzenie 3 (Hurwitza)**.** * *Niech $U \subset \mathbb{C}$ będzie obszarem i niech ciąg funkcji $f_n \in H(U)$ będzie niemal jednostajnie zbieżny do funkcji f, różnej od stałej. Jeśli równanie $f(z) = w$ ma w U co najmniej k różnych pierwiastków, to dla dostatecznie dużych n równanie $f_n(z) = w$ też ma w U co najmniej k różnych pierwiastków.*

Dowód. Możemy założyć, że $w = 0$ – inaczej funkcje f_n zastępujemy przez $f_n - w$, a f przez $f - w$. Niech $p_1, \ldots, p_k$ będą różnymi zerami funkcji f. Obierzmy koła $\overline{D}_i = \overline{D}(p_i, r) \subset U$ dla $1 \leq i \leq k$ tak, by były one parami rozłączne i $\overline{D}_i \cap f^{-1}(0) = \{p_i\}$. (Korzystamy z zasady izolowanych zer.) Liczba $\varepsilon = \inf_{z \in K} |f(z)|$, gdzie $K = \bigcup_{i=1}^{n} \partial D_i$, jest wtedy dodatnia. Dla n tak dużych, by $\|f - f_n\|_K < \varepsilon$, mamy na podstawie twierdzenia Rouchégo $N_{f_n, D_i} = N_{f, D_i} \neq 0$ dla $i = 1, \ldots, k$. (Por. (10).) Zatem w każdym dysku D_i funkcja f ma pewne zero i łącznie ma ich niemniej, niż k. □

Zadanie. Dowieść, że twierdzenie Rouchégo implikuje zasadnicze twierdzenie algebry: gdy f jest wielomianem stopnia $n \geq 1$ i $K = D(0, R)$, to $N_{f,K} = n$ dla dużych R.

Zadanie. Przy oznaczeniach twierdzenia 2 dowieść, że gdy $f'(p) \neq 0$, to dla $q \in D(f(p), R)$ równanie $f(z) = q$ ma w D dokładnie jedno rozwiązanie.

6 Charakteryzacja różnych typów osobliwości izolowanych

Poniżej zakładamy, że V jest nakłutym otoczeniem punktu $p \in \mathbb{C}$ i $f \in H(V)$.

Twierdzenie 1 (Wersja lematu Riemanna o przedłużaniu)**.** *Równoważne są warunki:*
a) osobliwość w punkcie p jest usuwalna,
b) f można przedłużyć do funkcji $\widetilde{f} \in H(V \cup \{p\})$.
c) istnieje granica $\lim_{z\to p} f(z) \in \mathbb{C}$.
d) $\lim_{z\to p}(z-p)f(z) = 0$.

Dowód twierdzenia. Równoważności $a) \Leftrightarrow b)$ dowiedliśmy w §2, a implikacje $b) \Rightarrow c) \Rightarrow d)$ są oczywiste. Załóżmy teraz, że spełniony jest warunek d); skonstruujemy wymagane w b) przedłużenie funkcji f. Zauważmy w tym celu, że funkcja $z \mapsto (z-p)f(z)$ przedłuża się do funkcji ciągłej g, a ta jest holomorficzna na podstawie wniosku 1 w §III.1.E. Ponieważ $g(p) = 0$, więc $g(z) = (z-p)h(z)$ dla wszystkich $z \in V$ i pewnej funkcji $h \in H(V \cup \{p\})$. Oznacza to, że h jest szukanym przedłużeniem. □

Twierdzenie 2 (Casoratiego–Sochockiego–Weierstrassa)**.** *Równoważne są warunki:*
a) osobliwość w punkcie p jest istotna;
b) dla każdego nakłutego otoczenia $V_0 \subset V$ tego punktu, zbiór $f(V_0)$ jest gęsty w $\mathbb{C}$;
c) w $\widetilde{\mathbb{C}}$ nie istnieje granica $\lim_{z\to p} f(z)$.

Dowód. Będziemy rozpatrywać zaprzeczenia tych warunków. Implikacja $\neg c) \Rightarrow \neg b)$ jest oczywista, a $\neg a) \Rightarrow \neg c)$ wynika stąd, że gdy w punkcie p jest osobliwość usuwalna, to istnieje $\lim_{z\to p} f(z) \in \mathbb{C}$, a gdy jest tam biegun, to $\lim_{z\to p} f(z) = \infty$. (Korzystamy ze stwierdzenia 1 w §2.)

Przypuśćmy teraz, że obraz $f(V_0)$ nakłutego otoczenia V_0 punktu p nie jest gęsty w $\mathbb{C}$. Pewien dysk $D(z_0, r)$ jest wtedy rozłączny z $f(V_0)$, a funkcja $g(z) = 1/(f(z) - z_0)$ – poprawnie określona i holomorficzna na V_0, przy czym $|g| < 1/r$. Na podstawie twierdzenia 1 punkt p jest zerem uogólnionym funkcji g krotności $k \geq 0$, tzn. $g(z) = (z-p)^k h(z)$, gdzie $h \in H(V_0 \cup \{p\})$ i $h(p) \neq 0$. Funkcja $f(z)(z-p)^k = z_0(z-p)^k + \frac{1}{h(z)}$ przedłuża się więc holomorficznie na otoczenie $h^{-1}(\mathbb{C} \setminus \{0\})$ punktu p – czyli f ma w punkcie p biegun gdy $k > 0$, a osobliwość usuwalną gdy $k = 0$. (Znów korzystamy ze stwierdzenia 1 w §2.) Dowiedliśmy, że $\neg b) \Rightarrow \neg a)$. □

Dodatek *: wielkie twierdzenie Picarda. Twierdzenie 2 można znacznie wzmocnić: obraz nakłutego otoczenia punktu istotnie osobliwego nie tylko jest gęsty w $\mathbb{C}$, ale „prawie równy” $\mathbb{C}$.

Twierdzenie 3 (Picarda, wielkie)**.** * *Gdy funkcja f ma w punkcie $p \in \mathbb{C}$ osobliwość istotną, to obraz $f(V_0)$ dowolnego otoczenia nakłutego $V_0 \subset V$ punktu p zawiera całą płaszczyznę $\mathbb{C}$, z pominięciem być może jednego punktu.*

Dowód. * Pokażemy, że jeśliby istniały punkty $a, b \notin f(V_0)$, to osobliwość w punkcie p nie byłaby istotna. Możemy założyć, że $p = 0$ i V_0 jest dyskiem nakłutym: $V_0 = D(0, 2r) \setminus \{0\}$, gdzie $r > 0$. Rozważmy okrąg $S = \partial D(0, r)$ i funkcje $f_n : V_0 \to \mathbb{C}$, zadane wzorem $f_n(z) = f(z/n)$. Obraz żadnej z tych funkcji nie zawiera punktów a i b. Na mocy twierdzenia Montela z §III.3 istnieje więc podciąg (f_{i_n}) ciągu (f_n), zbieżny na S jednostajnie do funkcji $f : S \to \widetilde{\mathbb{C}}$, która przyjmuje wartość ∞ albo nigdzie, albo wszędzie w S. Rozważymy te przypadki oddzielnie.

a) $\operatorname{im}(f) \subset \mathbb{C}$. Wtedy liczba $M \stackrel{def}{=} \sup\{\|f_{i_n}\|_S : n \in \mathbb{N}\}$ jest skończona, bo okrąg S jest zwarty, a ciąg (f_{i_n}) – jednostajnie zbieżny na S. Wobec tego na każdym okręgu $S_n = \partial D(0, r/i_n)$ moduł funkcji f jest ograniczony z góry liczbą M. A że każdy punkt $z \in D(0, r/i_1) \setminus \{0\}$ leży w pewnym pierścieniu $\overline{D}(0, r/i_1) \setminus D(0, r/i_n)$, którego brzegiem jest $S_1 \cup S_n$, to z zasady maksimum wynika, że $|f(z)| \le M$ dla $z \in D(0, r/i_1) \setminus \{0\}$. Osobliwość w zerze jest więc usuwalna, na podstawie lematu Riemanna o przedłużaniu.

b) $f = \infty$. Tym razem $M_n \to \infty$, gdzie $M_n = \inf|f_{|S_n}|$. Ponownie, wykorzystanie zasady maksimum pokazuje, że $|f(z) - a| \ge \min_{k \ge n} M_k$ gdy $z \in D(0, r/i_n) \setminus \{0\}$, i tym samym 0 jest biegunem. (Przypomnijmy, że $a \notin \operatorname{im}(f)$, wobec czego minima funkcji $|f - a|$ na pierścieniu zwartym przyjmowane są w jego punktach brzegowych.) □

Uwaga 1. * Przy założeniach twierdzenia istnieje punkt $q \in \mathbb{C}$ taki, że każda wartość z $\mathbb{C} \setminus \{q\}$ jest przyjmowana w dowolnym otoczeniu nakłutym punktu p – a wiec nieskończenie wiele razy w takim otoczeniu. (Kwantyfikatory zostały zmienione w stosunku do twierdzenia, lecz przejście jest łatwe.) ⊟

7 * Funkcje meromorficzne jako funkcje ciągłe. Funkcje wymierne.

Twierdzenia 1 i 2 z §6 sugerują przyjęcie takich definicji:

Definicja. Niech funkcja f będzie holomorficzna w otoczeniu nakłutym punktu ∞. Powiemy, że w punkcie tym ma ona osobliwość istotną, jeśli nie istnieje granica $\lim_{z\to\infty} f(z) \in \widetilde{\mathbb{C}}$. W przeciwnym razie powiemy, że f ma w punkcie ∞ osobliwość usuwalną (gdy $\lim_{z\to\infty} f(z) \in \mathbb{C}$) lub biegun (gdy $\lim_{z\to\infty} f(z) = \infty$).

Powiemy też, że funkcja f jest meromorficzna w zbiorze otwartym $U \subset \widetilde{\mathbb{C}}$, gdy $f \in \widetilde{H}(U)$ i f nie ma osobliwości istotnej w żadnym punkcie zbioru U (równoważnie: gdy jest ona holomorficzna w U poza izolowanymi osobliwościami i granica $\lim_{z\to p} f(z) \in \widetilde{\mathbb{C}}$ istnieje w każdym punkcie $p \in U$).

Uwaga 1. * a) Funkcja $f \in M(U)$ wyznacza funkcję ciągłą $g : U \to \widetilde{\mathbb{C}}$ taką, że $f(z) = g(z)$ dla $z \in U \setminus S(f)$. Oczywiście,

zbiór $g^{-1}(\infty)$ jest dyskretny w U i funkcja g jest holomorficzna w $U \cap \mathbb{C} \setminus g^{-1}(\infty)$.

Przeciwnie, ciągła funkcja $g : U \to \widetilde{\mathbb{C}}$ spełniająca ten warunek wyznacza funkcję $f = g_{|U\setminus S(f)} \in M(U)$, gdzie $S(f) \overset{def}{=} U \cap (g^{-1}(\infty) \cup \{\infty\})$.

b) Można więc na funkcje $f \in M(U)$ patrzeć jako na pewne funkcje ciągłe $U \to \widetilde{\mathbb{C}}$. W tym ujęciu, nie mają one żadnych „osobliwości” (=punktów nieokreśloności) i powinny raczej być nazywane funkcjami holomorficznymi z U do $\widetilde{\mathbb{C}}$. Wymaga to jednak zdefiniowania pochodnej $f'(p)$, a także dalszych pojęć (residuum funkcji f w punkcie p i jej szeregu Laurenta wokół p), gdy $p = \infty$ czy $f(p) = \infty$. Nie poruszamy tu tych zagadnień, choć umożliwiają one ogólniejsze ujęcie zasady argumentu i twierdzenia Rouchégo . $\square$

Zbadajmy najprostsze funkcje meromorficzne.

Twierdzenie 1. * *Gdy $g \in H(\mathbb{C})$ i istnieje granica $\lim_{z\to\infty} g(z) \in \widetilde{\mathbb{C}}$, to g jest wielomianem.*

Dowód. Rozwińmy g w szereg Tylora: $g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ dla $z \in \mathbb{C}$. Z złożenia i twierdzenia Casoratiego–Sochockiego–Weierstrassa wynika, że funkcja $g(1/z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^{-k}$ ma w zerze biegun lub osobliwość usuwalną. Ostatni szereg ma więc tylko skończenie wiele współczynników niezerowych, co oznacza, że $g(z) = \sum_{k=0}^{n} c_k z^k$ dla pewnego $n \geq 0$. $\square$

Twierdzenie 2. * *Funkcja, meromorficzna na całej sferze $\widetilde{\mathbb{C}}$, jest sumą wielomianu i skończenie wielu ułamków prostych właściwych – a więc jest funkcją wymierną.*

Powyżej, *funkcją wymierną* nazywamy iloraz dwóch wielomianów (patrz §I.6.B), natomiast *ułamek prosty właściwy* to funkcja postaci $c/(z-p)^n$, gdzie $p, c \in \mathbb{C}$ i $n \in \mathbb{N}$.

Dowód twierdzenia. Rozważana funkcja, którą nazwijmy f, ma w zwartej przestrzeni $\widetilde{\mathbb{C}}$ pewien skończony zbiór P_0 biegunów. Niech $P = P_0 \setminus \{\infty\}$ oraz

$$Gf \overset{def}{=} \sum_{p\in P} G_p f, \quad \text{łączna część osobliwa funkcji } f.$$

Wiemy z §2, że funkcja $f - Gf$ przedłuża się do pewnej funkcji holomorficznej $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$; ponadto, Gf jest sumą skończenie wielu ułamków prostych właściwych, bo sumą taką jest każda z funkcji $G_p f$. Zatem $\lim_{z\to\infty}(Gf)(z) = 0$ i istnieje granica $\lim_{z\to\infty} g(z)$, równa $\lim_{z\to\infty} f(z)$. Z twierdzenia 1 wynika więc, że g jest wielomianem, a $f = g + Gf$ jest szukanym rozkładem. $\square$

Istotne jest też następujące:

Twierdzenie 3. * *Funkcja, różnowartościowa i holomorficzna w $\mathbb{C}$ poza izolowanymi osobliwościami, jest homografią (ściślej: przedłuża się do homografii).*

Dowód. Niech D będzie dyskiem, rozłącznym ze zbiorem $S(f)$. Zbiór $U_0 = \mathbb{C} \setminus D \setminus S(f)$ jest otoczeniem nakłutym każdego punktu $p \in S(f)$, a jego obraz $f(U_0)$ jest rozłączny ze zbiorem $f(D)$. Ponieważ ten ostatni jest otwarty w $\mathbb{C}$ (na mocy twierdzenia o zachowywaniu obszarów z §III.1.D), więc z twierdzenia Casoratiego-Weierstrassa wynika, że f nie ma osobliwości istotnej – a zatem przedłuża się do funkcji ciągłej $\widetilde{f} : \mathbb{C} \to \widetilde{\mathbb{C}}$.

Twierdzimy, że $\widetilde{f}$ jest funkcją różnowartościową. Istotnie, gdy $p, q \in \mathbb{C}$ i $p \neq q$, to istnieją w $\mathbb{C} \setminus S(f)$ rozłączne otoczenia nakłute: U punktu p i V punktu q. Z twierdzenia o zachowywaniu obszaru, zbiór $\widetilde{f}(U \cup \{p\})$ jest otoczeniem punktu $\widetilde{f}(p)$, zaś $\widetilde{f}(V \cup \{q\})$ – punktu $\widetilde{f}(q)$. A że $f(U) \cap f(V) = \emptyset$, to $\widetilde{f}(p) \neq \widetilde{f}(q)$.

Zatem funkcja $\widetilde{f}$ przyjmuje wartość ∞ tylko w jednym lub żadnym punkcie i można na nią patrzeć jako na element $\widetilde{H}(\mathbb{C})$. (Poprzedni wywód był potrzebny do wykazania, że ∞ nie jest punktem skupienia zbioru $S(\widetilde{f})$.) Powtarzając wcześniejsze rozumowanie stwierdzamy, że osobliwość w ∞ nie jest istotna i $\widetilde{f}$ można przedłużyć do różnowartościowej funkcji ciągłej $\widetilde{\mathbb{C}} \to \widetilde{\mathbb{C}}$, którą nadal oznaczmy przez $\widetilde{f}$.

Jeśli więc $\widetilde{f}(\infty) = \infty$, to $\widetilde{f}(p) \neq \infty$ dla $p \in \mathbb{C}$, wobec czego z twierdzenia 1 wynika, że $\widetilde{f}$ jest wielomianem, zaś z zasadniczego twierdzenia algebry – że $\deg(\widetilde{f}) = 1$. (Inaczej funkcja $\widetilde{f}$ nie byłaby różnowartościowa.) Gdy zaś $\widetilde{f}(\infty) \neq \infty$, to odnosi się to do funkcji $g = 1/(\widetilde{f} - \widetilde{f}(\infty))$, skąd i w tym przypadku $\widetilde{f} = \widetilde{f}(\infty) + 1/g$ jest homografią. $\square$

Zadanie. * Korzystając z uwagi z dodatku do §2 wzmocnić małe twierdzenie Picarda następująco: funkcja $f \in H(\mathbb{C})$, nie będąca wielomianem, przyjmuje nieskończenie wiele razy każdą wartość w $\mathbb{C}$, prócz być może jednej. (Wskazówka: funkcja $z \mapsto f(1/z)$ ma w zerze osobliwość istotną.)

Zadanie. * Utożsamijmy każdą funkcję $f \in M(U)$, gdzie U jest zbiorem otwartym w $\widetilde{\mathbb{C}}$, z odpowiadającą jej funkcją ciągłą $U \to \widetilde{\mathbb{C}}$. Dowieść, że:

a) Gdy $f \in M(U)$, to zbiór $f^{-1}(q)$ jest dyskretny dla każdego $q \in \widetilde{\mathbb{C}}$.

b) Gdy $f \in M(U)$, $g \in M(V)$ i $f(U) \subset V$, to $g \circ f \in M(U)$.

c) Twierdzenie o zachowywaniu obszarów z §III.1 i twierdzenie 1 z §4 są prawdziwe przy U będącym obszarem w $\widetilde{\mathbb{C}}$ i $H(U)$ zastąpionym przez $M(U)$.

8 *Twierdzenia Rungego.

Przypomnijmy za §II.5, że celowe jest całkę $\int_\gamma f$ funkcji holomorficznej f rozważać nie tylko wtedy, gdy γ jest pętlą, ale i gdy γ jest *cyklem*, tzn. $\gamma = \gamma_1 + \cdots + \gamma_k$, gdzie γ_i

są pętlami (kawałkami gładkimi). Ma miejsce następujące twierdzenie, którego dowód podany będzie w §V.5.

Twierdzenie 1. * *Niech zbiór $U \subset \mathbb{C}$ będzie otwarty, a zbiór $K \subset U$–zwarty. Wówczas istnieje cykl γ w $U \setminus K$ taki, że*

$$g(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int\limits_{\gamma} \frac{g(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w \quad \textit{dla wszystkich } z \in K \textit{ i } g \in H(U) \tag{11}$$

Wykorzystamy je poniżej do dowodu zaskakujących wyników o możliwości przybliżania funkcji holomorficznych takimi, które są meromorficzne w całej płaszczyźnie. Zakładamy, że spełnione są założenia twierdzenia i ustalono funkcję $f \in H(U)$ i cykl γ w zbiorze $U \setminus K$, spełniający warunek (11). Wszystkie dalsze twierdzenia tego paragrafu pochodzą od Rungego.

Twierdzenie 2. * *Dla danej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje funkcja g taka, że $\|f - g\|_K < \varepsilon$ oraz $g(z) = \sum_{i=1}^n c_i/(z - w_i)$, gdzie $w_1, \dots, w_n \in U \setminus K$ oraz $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{C}$.*

Dowód. Gdy γ jest sumą k pętli $\gamma_1, \dots, \gamma_k$ i dla każdej z funkcji $f_j(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int\limits_{\gamma_j} \frac{f(w)}{w-z} \mathrm{d}w$, $z \in \mathbb{C} \setminus \mathrm{im}(\gamma_j)$ znajdziemy funkcję g_j żądanej postaci, taką, że $\|f_j - g_j\|_K < \varepsilon/k$, to przyjmiemy $g = g_1 + \dots + g_k$.

Ustalmy więc drogę $\lambda = \gamma_j : [a, b] \to U$ i liczbę $\widetilde{\varepsilon} = \varepsilon/k > 0$. Na zwartym zbiorze $\mathrm{im}(\lambda) \times K$ funkcja $h(w, z) \overset{def}{=} f(w)/(w - z)$ jest jednostajnie ciągła, wobec czego istnieje liczba $\delta > 0$ taka, że $\operatorname{diam} h(W \times \{z\}) < \widetilde{\varepsilon}/\ell(\lambda)$ gdy tylko $z \in K$ i zbiór $W \subset \mathrm{im}(\lambda)$ ma średnicę mniejszą niż δ. Podzielmy teraz przedział $[a, b]$ punktami $a = t_0 < \dots < t_n = b$ tak drobno, by średnica każdego zbioru $\lambda([t_{i-1}, t_i])$ była mniejsza niż δ, i niech $w_i = \lambda(t_i)$ dla $i = 0, \dots, n$. Na podstawie uwagi 1 w §II.6, zastosowanej do funkcji $w \mapsto h(w, z)$, ma dla $z \in K$ miejsce nierówność $|\int\limits_{\lambda} h(w, z)\,\mathrm{d}w - \sum_{i=1}^n h(w_i, z)(w_i - w_{i-1})| < \widetilde{\varepsilon}$ – a zatem i nierówność $|f_j(z) - \sum_{i=1}^n c_i/(z - w_i)| < \widetilde{\varepsilon}$, przy $c_i = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} f(w_i)(w_{i-1} - w_i)$. □

Naszym obecnym celem jest zmiana funkcji g na taką, której bieguny znajdują się w zadanym zbiorze $P \subset \widetilde{\mathbb{C}}$. Gdy $p \in \widetilde{\mathbb{C}}$, to *ułamkiem prostym z biegunem w p* nazwiemy każdą funkcję, która dla pewnych $c \in \mathbb{C}$ i $n \in \{1, 2, \dots\}$ jest postaci $z \mapsto c/(z - p)^n$ gdy $p \neq \infty$, zaś $z \mapsto cz^n$ gdy $p = \infty$.

Lemat 1 (o przesuwaniu biegunów)**.** * *Niech otwarty zbiór spójny $S \subset \widetilde{\mathbb{C}}$ będzie rozłączny ze zwartym zbiorem $K \subset \mathbb{C}$, zaś g będzie skończoną sumą ułamków prostych z biegunem w punkcie $w \in S \cap \mathbb{C}$. Wówczas dla każdych $p \in S$ i $\delta > 0$ istnieje skończona suma h ułamków prostych z biegunem w punkcie p, taka, że $\|g - h\|_K < \delta$.*

Dowód. Podzielimy go na części.

i) Załóżmy wpierw, że $p \in \mathbb{C}$ i $|p-w| < \operatorname{dist}(w, K)$. Funkcja g rozwija się w pierścieniu $P = \{z : |z-w| > |p-w|\}$ w szereg Laurenta $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(z-p)^n$, bo jest holomorficzna w płaszczyźnie nakłutej $\mathbb{C} \setminus \{w\}$. A że $\lim_{z\to\infty} g(z) = 0$, to część regularna tego szeregu jest zerowa: $g(z) = \sum_{n<0} c_n(z-p)^n$ dla $z \in P$. (Dowód bezpośredni wynika z przykładu w §1.) Szereg jest jednostajnie zbieżny na zwartym zbiorze $K \subset P$ i pozostaje przyjąć $h(z) = c_{-1}(z-p)^{-1} + \cdots + c_{-k}(z-p)^{-k}$ dla dostatecznie dużej liczby k.

ii) Niech teraz $p = \infty$ i $|w| > \sup\{|z| : z \in K\}$. Funkcja g jest wtedy holomorficzna w dysku $D(0, |w|) \supset K$, więc rozwija się na nim w szereg Taylora. Gdy szereg ten „utniemy" dostatecznie daleko, otrzymamy żądany wielomian h.

iii) Rozpatrzmy przypadek ogólny. Gdy $p = \infty$, to istnieje punkt $q \in S$ taki, że $|q| > \sup\{|z| : z \in K\}$; gdy zaś $p \neq \infty$ to przyjmijmy $q = p$. Zbiór spójny i otwarty $S \subset \widetilde{\mathbb{C}}$ pozostanie takim po usunięciu punktu ∞, wobec czego istnieje droga $\lambda : [0,1] \to S \cap \mathbb{C}$, łącząca w z q. Liczba $d = \operatorname{dist}(\operatorname{im}(\lambda), K)$ jest dodatnia, bo zbiory K i $\operatorname{im}(\lambda)$ są rozłączne i zwarte. Podzielmy odcinek $[0,1]$ punktami $t_0 = 0 < t_1 < \cdots < t_{k-1} = 1$ tak drobno, by obraz przy λ każdego z odcinków $[t_{n-1}, t_n]$ miał średnicę mniejszą niż d, i przyjmijmy

$$h_0 = g, \ w_k = p \ \text{ i } \ w_n = \lambda(t_n) \ \text{ dla } n = 0, \ldots, k-1.$$

Dla $n = 1, \ldots, k$ utworzyć możemy w oparciu o i) (czy o ii), gdy $n = k$ i $w_k = \infty$) skończoną sumę h_n ułamków prostych o biegunach w punkcie w_n, taką, że $\|h_n - h_{n-1}\|_K < \delta/k$. Jest oczywiste, że funkcja $h = h_k$ ma żądane własności. □

Twierdzenie 3. * *Niech zbiór $P \subset \widetilde{\mathbb{C}}$ przecina każdą składową zbioru $\widetilde{\mathbb{C}} \setminus K$ i niech ε będzie liczbą dodatnią. Wówczas istnieje skończona suma h ułamków prostych z biegunami w P, taka, że $\|f - h\|_K < \varepsilon$.*

Dowód. Oznaczmy przez $g = \sum_{i=1}^n c_i/(z - w_i)$ funkcję, której istnienie gwaratntuje twierdzenie 2. Z założenia, dla każdego $i \leq n$ istnieje punkt $p_i \in P$, należący do tej samej składowej zbioru $\widetilde{\mathbb{C}} \setminus K$, co punkt w_i. Na podstawie lematu o przesuwaniu biegunów, istnieje też skończona suma h_i ułamków prostych z biegunem w p_i, taka, że

$$\|h_i - g_i\|_K < \frac{1}{n}(\varepsilon - \|f - g\|_K), \quad \text{gdzie } g_i(z) = c_i/(z - w_i).$$

Szukaną funkcją jest $h = \sum_{i=1}^n h_i$. □

Twierdzenie 4. * *Gdy domknięcie, w $\widetilde{\mathbb{C}}$, zbioru P przecina każdą składową zbioru $\widetilde{\mathbb{C}} \setminus U$, to funkcja f jest niemal jednostajną granicą skończonych sum ułamków prostych, mających bieguny w P. (Zbieżność ma miejsce w U.)*

Dowód. Korzystać będziemy z tego, że każda składowa otwartego podzbioru G lokalnie spójnej przestrzeni $\widetilde{\mathbb{C}}$ jest zbiorem otwartym, i że zawiera ona każdy przecinający ją spójny zbiór $S \subset G$.

Rozważmy dowolny zbiór zwarty $L \subset U$ i niech K będzie sumą zbioru L i wszystkich tych składowych zbioru $\widetilde{\mathbb{C}} \setminus L$, które zawarte są w U. Zbiór $\widetilde{\mathbb{C}} \setminus K$ jest sumą składowych zbioru $\widetilde{\mathbb{C}} \setminus L$, przecinających $\mathbb{C} \setminus U$. Wynika stąd zarówno zwartość zbioru K, jak i to, że dowolna składowa V zbioru $\widetilde{\mathbb{C}} \setminus K$ przecina $\widetilde{\mathbb{C}} \setminus U$, więc jest otoczeniem pewnej składowej S_V zbioru $\widetilde{\mathbb{C}} \setminus U$ (jakiejkolwiek, która przecina V). A że $S_V \cap \overline{P} \neq \emptyset$, to $V \cap P \neq \emptyset$, tzn. zbiór P przecina każdą składową zbioru $\widetilde{\mathbb{C}} \setminus K$. Na podstawie twierdzenia 3 istnieje więc skończona suma h ułamków prostych o biegunach w P, dla której $\|f - h\|_K < \varepsilon$ i tym samym $\|f - h\|_L < \varepsilon$, gdzie ε jest zadaną liczbą dodatnią.

Wykorzystajmy tę obserwację przy $\varepsilon = 1/n$ i $L = L_n$, gdzie

$$L_n = \{z \in U : \mathrm{dist}(z, \mathbb{C} \setminus U) \geq 1/n\} \cap \overline{D}(0, n)$$

Otrzymamy dla każdego n skończoną sumę h_n ułamków prostych o biegunach w P, taką, że $\|f - h_n\|_{L_n} < 1/n$. Ciąg (h_n) jest na U zbieżny niemal jednostajnie do f, gdyż dla każdego punktu $p \in U$ i dostatecznie dużych n, zbiór L_n jest otoczeniem punktu p. $\square$

Wniosek 1. * *a) Jeśli dopełnienie $\widetilde{\mathbb{C}} \setminus K$ zbioru zwartego $K \subset \mathbb{C}$ jest spójne, to każda funkcja $f \in H(K)$ jest jednostajną granicą ciągu wielomianów (obciętych do K).*

b) Jeśli dopełnienie $\widetilde{\mathbb{C}} \setminus U$ zbioru otwartego $U \subset \mathbb{C}$ jest spójne, to każda funkcja $f \in H(U)$ jest niemal jednostajną granicą ciągu wielomianów (obciętych do U).

Dowód. a) Z definicji, funkcję f można przedłużyć do funkcji holomorficznej w pewnym otoczeniu U zbioru K. Stosując twierdzenie 3 przy $P = \{\infty\}$ otrzymujemy tezę.

b) I tym razem obieramy $P = \{\infty\}$, lecz stosujemy twierdzenie 4. $\square$

Wniosek 2. * *Jeśli dopełnienie $\widetilde{\mathbb{C}} \setminus U$ zbioru otwartego $U \subset \mathbb{C}$ jest spójne, to każda funkcja $f \in H(U)$ ma funkcję pierwotną.*

Dowód. Wynika to z poprzedniego wniosku i zadania w §III.2.D, gdyż każdy wielomian ma funkcję pierwotną. $\square$

Uwaga 1. * Dla ograniczonego zbioru $Z \subset \mathbb{C}$, spójność zbioru $\widetilde{\mathbb{C}} \setminus Z$ jest równoważna spójności zbioru $\mathbb{C} \setminus Z$. Założenie ograniczoności jest jednak istotne: za przykład może służyć pas otwarty $0 < \mathrm{Im}(z) < 1$, którego dopełnienie w $\mathbb{C}$ jest niespójne, a dopełnienie w $\widetilde{\mathbb{C}}$ – spójne. $\boxminus$

Definicja. * Podzbiór sfery $\widetilde{\mathbb{C}}$, którego dopełnienie w $\widetilde{\mathbb{C}}$ jest spójne, nazywany jest *nierozcinającym sfery Riemanna* $\widetilde{\mathbb{C}}$. (Zbiór taki może być niespójny.) Analogicznie definiuje się zbiory *nierozcinające płaszczyzny* $\mathbb{C}$.

9 Dodatek do rozdziału IV: Wykorzystanie twierdzenia o residuach do wyznaczania całek niewłaściwych.

Gdy funkcja zespolona f jest określona i ciągła na zorientowanym odcinku $J = [p_0, q_0] \subset \mathbb{C}$, poza może jego krańcami, to przez całkę niewłaściwą $\int\limits_J f$ rozumiemy granicę $\lim \int\limits_{[p,q]} f$ przy $p \to p_0, q \to q_0$ i $p, q \in J$ – jeśli taka granica istnieje. Podobna definicja stosuje się, gdy $J \subset \mathbb{C}$ jest zorientowaną półprostą (za jeden z jej krańców przyjmujemy ∞) lub prostą. W ostatnim przypadku żądamy, by $p, q \to \infty$, przy czym p poprzedza ustalony punkt, a ten poprzedza q w rozważanej orientacji prostej J. Gdy $J \subset \mathbb{R}$, to zamiast $\int_J$ piszemy też $\int_a^b$, $\int_{-\infty}^a$, $\int_{-\infty}^\infty$ etc. Tu zajmiemy się całką niewłaściwą $\int_{-\infty}^\infty = \int_\mathbb{R}$.

Uwaga 1. Istnienie granicy $I = \lim_{r\to\infty} \int_{-r}^r f$ to warunek konieczny istnienia całki $\int_\mathbb{R} f$. Jest on też wystarczający gdy funkcja f jest symetryczna (dlaczego?), lecz już dla $f(z) = z$ granica $\lim_{r\to\infty} \int_{-r}^r f$ istnieje, a całka $\int_\mathbb{R} f$ – nie. Jednak gdy całka $\int_\mathbb{R} f$ istnieje (co na ogół wymaga dodatkowego uzasadnienia), to jest ona równa I. $\square$

Poniżej wpierw podamy dwa naturalne warunki, umożliwiające badanie powyższej granicy I, a następnie dowiedziemy, że gwarantują one też istnienie całki. Wygodnie jest pisać $f \in \widetilde{H}(X)$ gdy $f \in \widetilde{H}(U)$ dla pewnego otoczenia U zbioru X w $\mathbb{C}$. Przez Π_+ oznaczymy półpłaszczyznę $\operatorname{Im} z \geq 0$, a przez Γ_r półokrąg $\{re^{\mathrm{i}t} : t \in [0, \pi]\}$, traktowany jako zorientowany łuk o początku w r. Zakładamy, że dana jest funkcja $f \in \widetilde{H}(\overline{\Pi_+})$, mająca tylko skończenie wiele punktów osobliwych w Π_+, lecz żadnego na osi rzeczywistej. Sumę residuów funkcji f w tych punktach oznaczmy przez s.

Uwaga 2. Jeśli $\lim_{r\to\infty} \int\limits_{\Gamma_r} f = c$, to granica $I = \lim_{r\to\infty} \int\limits_{-r}^{r} f(z)\,\mathrm{d}z$ istnieje i jest równa $2\pi\mathrm{i}s - c$. Istotnie, gdy liczba r jest większa niż moduł każdego z rozważanych wyżej punktów osobliwych, to na podstawie twierdzenia o residuach liczba $\int\limits_{[-r,r]} f + \int\limits_{\Gamma_r} f$ jest równa $2\pi\mathrm{i}s$, skąd wynika teza.

Twierdzenie 1. *Jeśli ponadto spełniony jest pewien z poniższych warunków, to* $\lim_{r\to\infty} \int\limits_{\Gamma_r} f = 0$ *i wobec tego* $I = 2\pi\mathrm{i}s$*:*

i) $\lim_{z\to\infty} f(z)z = 0$.

ii) Istnieje liczba dodatnia* a *taka, że* $\lim_{z\to\infty, z\in\overline{\Pi_+}} f(z)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}az} = 0$.

Dowód. Ad i). Mamy $|\int\limits_{\Gamma_r} f| \leq \pi r \sup_{z\in\Gamma_r} |f(z)| = \pi \sup_{z\in\Gamma_r} |zf(z)| \xrightarrow[r\to\infty]{} 0$.

Ad ii).* Podobnie, $|\int\limits_{\Gamma_r} f| = |\int\limits_0^\pi f(re^{it}) ire^{it}\, dt| \le r\int\limits_0^\pi |f(re^{it})|\, dt$. Niech

$$\varphi(r) = \sup\{|f(z)e^{-iaz}| : z \in \Gamma_r\}$$

Wtedy dla $z = re^{it} \in \Gamma_r$ jest $iaz = iar\cos t - ar\sin t$, skąd $|f(z)| \le \varphi(r)|e^{iaz}| = \varphi(r)e^{-ar\sin t}$. A że dla $t \in [0, \pi/2]$ punkt $(t, \sin t)$ wykresu funkcji sin leży nad prostą przechodzącą przez punkty $(0,0)$ i $(\pi/2, 1)$, to $\sin t \ge \frac{2}{\pi} t$. Zatem

$$|\int\limits_{\Gamma_r} f| \le r\varphi(r)\int\limits_0^\pi e^{-ar\sin t}\, dt = 2r\varphi(r)\int\limits_0^{\pi/2} e^{-ar\sin t}\, dt \le 2r\varphi(r)\int\limits_0^{\pi/2} e^{-\frac{2}{\pi}art}\, dt. \tag{12}$$

Ostatnie wyrażenie jest równe $\frac{\pi}{a}\varphi(r)(1 - e^{-ar})$ – co kończy dowód, bo $\lim_{r\to\infty}\varphi(r) = 0$.

Twierdzenie 2. *Jeśli spełniony jest warunek ii), to całka $\int_{\mathbb{R}} f$ istnieje. Podobnie jest, gdy zachodzi i), a funkcja f określona jest wszędzie poza pewnym zbiorem zwartym.*

Dowód. Zacznijmy od ostatniego przypadku. Wówczas funkcja $g(z) = f(1/z)/z$ ma w zerze uogólnione zero krotności ≥ 1, bo $\lim_{z\to 0} g(z) = 0$. Stąd wynika istnienie granicy $p = \lim_{z\to 0} g(z)/z \in \mathbb{C}$ i tym samym liczby $R > 0$ takiej, że $|f(z)| < (|p| + 1)/|z|^2$ gdy $|z| \ge R$. A że całka $\int\limits_R^\infty 1/|z|^2\, dz$ istnieje, wiec całka $\int\limits_{\mathbb{R}} |f|$ – też.

Załóżmy teraz, że zachodzi ii) i oznaczmy przez γ_r łuk $\{re^{it} : t \in [0, \pi/2]\}$. Gdy r_0 jest liczbą większą niż moduł każdego z punktów osobliwych funkcji f, to dla $r > r_0$ otrzymujemy na podstawie twierdzenia residuach

$$\int\limits_{[r_0, r]} f = \int\limits_{-\gamma_{r_0}} f + \int\limits_{[ir_0, ir]} f + \int\limits_{\gamma_r} f \tag{13}$$

Jak wiemy z dowodu twierdzenia 1, ostatnia całka w (13) dąży do 0 gdy $r \to \infty$. Ponadto z warunku ii) wynika ograniczoność funkcji $f(it)e^{at}$ dla $t \ge r_0$, i tym samym istnienie całki funkcji $|f|$ na półprostej $J = \{it : t \ge r_0\}$. Wobec (13) istnieje więc całka $\int\limits_{r_0}^\infty f$, równa $\int\limits_{-\gamma_{r_0}} f + \int\limits_J f$, i podobnie istnieje całka $\int\limits_{-\infty}^{-r_0} f$. Zatem całka $\int\limits_{\mathbb{R}} f$ też istnieje. $\boxminus$

Uwaga 3. Warunek ii), pochodzący od Jordana, jest szczególnie użyteczny przy badaniu całek postaci $\int_{-\infty}^\infty g(x)\cos(ax)dx$ lub $\int_{-\infty}^\infty g(x)\sin(ax)dx$, gdzie funkcja g przyjmuje na

$\mathbb{R}$ wartości rzeczywiste i rozszerza się do funkcji $\widetilde{g} \in \widetilde{H}(\overline{\Pi_+})$. Ponieważ bowiem $\cos(ax) = \operatorname{Re} \mathrm{e}^{\mathrm{i}ax}$, $\sin(ax) = \operatorname{Im} \mathrm{e}^{\mathrm{i}ax}$, więc rzecz sprowadza się do wyznaczenia całki $\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\mathrm{e}^{iax}\mathrm{d}x$, a to zaś (na podstawie twierdzeń 1 ii) i 2) – do wyznaczenia sumy pewnych residuów, o ile tylko granica funkcji $\widetilde{g}$ przy $z \to \infty$, $z \in \Pi_+$, jest równa 0. $\square$

Użyjemy szacowania Jordana do wyznaczenia całek nieco innego typu.

Przykład. Udowodnimy, że $\int_0^\infty \exp(\mathrm{i}z^2)\mathrm{d}z = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}$, lub równoważnie, że tzw. *całki Fresnela* $\int_0^\infty \cos(z^2)\mathrm{d}z$ i $\int_0^\infty \sin(z^2)\mathrm{d}z$ są równe $\sqrt{\pi/8}$. W tym celu oznaczmy przez γ_r łuk $\{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} : t \in [0, \pi/4]\}$, zaś przez p_r punkt $r\mathrm{e}^{i\pi/4}$. Przy $f(z) = \exp(\mathrm{i}z^2)$ otrzymujemy $|\int_{\gamma_r} f| \to 0$ gdy $r \to \infty$. (Uzasadnienie, podobne jak dla (12), pozostawione jest jako zadanie.) Stosując twierdzenie Cauchy'ego o równości całek do pętli $[0, r]\#\gamma_r\#[p_r, 0]$ stwierdzamy więc, że $|\int_0^r f - \int\limits_{[p_r,\,0]} f| \to 0$ gdy $r \to \infty$. A że $\int\limits_{[p_r,\,0]} f = \int_0^r \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}\mathrm{d}t$ i tzw. *całka Poissona* $\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$ istnieje i wynosi $\sqrt{\pi}/2$, więc wynika stąd teza. $\square$

Gdy funkcja f ma osobliwość w pewnym punkcie $p \in \mathbb{R}$, to celowe może być użycie małych półokręgów wokół p, pozwalających ominąć punkt osobliwy.

Przykład. Całkując funkcję $f(z) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z}$ po drodze $[-R, -r]\#(-\Gamma_r)\#[r, R]\#\Gamma_R$ stwierdzamy, że $\int_{-R}^{-r} f + \int_r^R f = \int_{\Gamma_r} f - \int_{\Gamma_R} f$. Ponadto, funkcja $F(z) = f(z) - \frac{1}{z}$ przedłuża się holomorficznie na punkt 0, skąd $\int_{\Gamma_r} f = \int_{\Gamma_r} F + \int_{\Gamma_r} \frac{1}{z}\mathrm{d}z \to \pi\mathrm{i}$ gdy $r \to 0$ (bo $\int_{\Gamma_r} F \to 0$ gdy $r \to 0$ i $\int_{\Gamma_r} \frac{1}{z}\mathrm{d}z = \pi\mathrm{i}$). Wobec tego $\operatorname{Im}\left(\int_{-R}^{-r} f + \int_r^R f\right) \to \pi$ gdy $r \to 0$ i $R \to \infty$, na podstawie twierdzenia 1ii), z $a = 1$. Po uwzględnieniu symetrii funkcji $\operatorname{Im}(f_{|\mathbb{R}})$, równej $\sin x/x$, daje to równość $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x = \pi/2$.

Twierdzenie o residuach jest pomocne nie tylko przy wyznaczaniu całek niewłaściwych, ale i całek funkcji okresowych. Przekonuje o tym proste

Twierdzenie 3. *Gdy f jest funkcją dwóch zmiennych rzeczywistych, ciągłą na brzegu koła jednostkowego $D = D(0, 1)$, to*

$$\int\limits_0^{2\pi} f(\cos t, \sin t)\,\mathrm{d}t = \int\limits_{\partial D} g, \quad \text{gdzie } g(z) := \frac{1}{\mathrm{i}z} f\Big(\frac{1}{2}(z + z^{-1}), \frac{1}{2\mathrm{i}}(z - z^{-1})\Big) \text{ dla } z \in \partial D.$$

Jeśli więc powyższa funkcja g przedłuża się do funkcji $\widetilde{g} \in \widetilde{H}(\overline{D})$, to całka $\int\limits_0^{2\pi} f(\cos t, \sin t)\mathrm{d}t$ jest równa $2\pi\mathrm{i}$ razy suma residuów funkcji $\widetilde{g}$ w jej punktach osobliwych, leżących w D.

Dowód. Pierwsza równość wynika z definicji całki $\int\limits_{\partial D} g$ i wzorów Eulera. $\square$

Dalsze sposoby wykorzystania twierdzenia o residuach do wyznaczania całek niewłaściwych wskazane są w §XVI.4 trzeciego tomu „Analizy" K. Maurina.

V Wybrane aspekty topologiczne i geometryczne

1 Przekształcenia biholomorficzne i konforemne.

Definicja. Niech $U, V \subset \mathbb{C}$, przy czym zbiór U jest otwarty. Przekształcenie $f : U \to V$ nazywamy *biholomorficznym*, jeśli jest ono bijektywne i holomorficzne.

Przekształcenia biholomorficzne nazywane są też konforemnymi, lecz temu słowu nadamy inne znaczenie. W książce Saksa i Zygmunda nazwane są one najładniej: wierne.

Uwaga 1. Jeśli przekształcenie $f : U \to V$ jest biholomorficzne, to:
i) $f'(p) \neq 0$ dla każdego $p \in U$ (wynika to z wniosku 1 w §III.1.B),
ii) zbiór V jest otwarty i przekształcenie f^{-1} jest biholomorficzne (wynika to z twierdzenia 1 w §I.8),
iii) f jest homeomorfizmem U na V. (Wynika to z ciągłości f i f^{-1}, patrz wyżej.)

Uwaga 2. Gdy U jest obszarem w $\mathbb{C}$ i ciąg różnowartościowych funkcji $f_n \in H(U)$ jest niemal jednostajnie zbieżny, to graniczna funkcja f bądź jest różnowartościowa (i wtedy przekształca U biholomorficznie na $f(U)$), bądź stała. Istotnie, jeśli nie, to dla pewnego w równanie $f(z) = w$ ma co najmniej dwa rozwiązania i na podstawie twierdzenia Hurwitza z §IV.5 jest tak przy f zastąpionym przez f_n, dla dostatecznie dużych n – wbrew różnowartościowości funkcji f_n. □

Ważną własnością przekształceń biholomorficznych jest ich konforemność. Przysługiwać ona może przekształceniom pomiędzy podzbiorami przestrzeni euklidesowej dowolnego wymiaru.

Definicja. a) Niech U i V będą otwartymi podzbiorami przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^k$. Przekształcenie $f : U \to V$ nazwiemy *konforemnym*, gdy jest ono homeomorfizmem klasy C^1 i pochodna $\mathrm{d}f(p)$ jest podobieństwem, dla każdego punktu $p \in U$.

b) *Miarą kąta pomiędzy gładkimi łukami*, w ich wspólnym początku p, nazywamy liczbę $\alpha \in [0, \pi]$, będącą miarą kąta pomiędzy wektorami stycznymi do tych łuków w punkcie p. (Tak więc $\cos\alpha = \langle \lambda_1'(0), \lambda_2'(0)\rangle / \|\lambda_1'(0)\| \cdot \|\lambda_2'(0)\|$, gdzie λ_1 i λ_2 to parametryzacje rozważanych łuków, takie, że $\lambda_1(0) = p = \lambda_2(0)$.)

c) Gdy $k = 2$, to można analogicznie zdefiniować miarę *zorientowanego kąta pomiędzy gładkimi łukami*, w ich wspólnym początku p.

Uwaga 3. Złożenie przekształceń konforemnych $f : U \to V$ i $g : V \to W$ jest przekształceniem konforemnym U na W. Wynika to ze wzoru na pochodną złożenia, gdyż złożenie podobieństw jest podobieństwem.

Twierdzenie 1. *Gdy $f : U \to V$ jest przekształceniem konforemnym i $p \in U$, to*

i) granica $\mu = \lim_{a \to p} \|f(a) - f(p)\|/\|a - p\|$ istnieje i jest różna od zera.

ii) f zachowuje miarę kąta pomiędzy łukami o początku w p, tzn. miara kąta pomiędzy takimi łukami J_1, J_2 jest równa mierze kąta między łukami $f(J_1)$ i $f(J_2)$ w ich wspólnym początku $f(p)$.

Dowód. i) Z definicji pochodnej $\|f(a) - f(p)\|/\|a - p\| = \|\mathrm{d}f(p)\frac{a-p}{\|a-p\|}\| + r(a)$, gdzie $\lim_{a\to p} r(a) = 0$. Skoro $\mathrm{d}f(p)$ jest podobieństwem, którego skalę oznaczmy przez μ, to $\|\mathrm{d}f(p)v\| = \mu \neq 0$ dla wektorów jednostkowych v, skąd wynika i).

ii) Jeśli λ_i jest parametryzacją łuku J_i taką, że $\lambda_i(0) = p$, to $\mu_i = f \circ \lambda_i$ jest parametryzacją łuku $f(J_i)$ taką, że $\mu_i(0) = f(p)$. Wektor $u_i = \lambda_i'(0)$, styczny do J_i w punkcie p, oraz wektor $v_i = \mu_i'(0)$, styczny do $f(J_i)$ w punkcie $f(p)$, są więc związane równością $v_i = \mathrm{d}f(p)(u_i)$. A że $\mathrm{d}f(p)$ jest podobieństwem, to $\angle(u_1, u_2) = \angle(v_1, v_2)$. □

Twierdzenie 2. *a) Każde przekształcenie biholomorficzne $f : U \to V$, gdzie zbiory $U, V \subset \mathbb{C}$ są otwarte, jest konforemne. (Utożsamiamy tu $\mathbb{C}$ z $\mathbb{R}^2$.)*

b) Inwersja przestrzeni nakłutej jest przekształceniem konforemnym.*

Dowód. a) Jak wiemy, f jest homeomorfizmem (patrz uwaga 1). Ponadto, gdy $p \in U$, to $f'(p) \neq 0$ na mocy wniosku 1 w §1. Pochodna rzeczywista $\mathrm{d}f(p)$ jest więc podobieństwem, patrz §I.2.

b) Wystarcza rozważyć przypadek inwersji $J(x) = x/\|x\|^2$ względem sfery jednostkowej $\{v : \|v\| = 1\}$, gdyż inwersja f względem sfery $S = \{x : \|x - o\| = r\}$ jest związana z J zależnością $f = G^{-1} \circ J \circ G$, gdzie G to podobieństwo, przeprowadzające S na sferę jednostkową. Pozostaje więc rozwiązać następujące zadanie:

Zadanie. * Wyznaczyć pochodną inwersji $J(x) = x/\|x\|^2$ $(x \in \mathbb{R}^k \setminus \{0\})$ i dowieść, że jest ona podobieństwem. (Odp. z dokładnością do czynnika $\|x\|^{-2}$, pochodna $\mathrm{d}J(x)$ jest równa symetrii lustrzanej względem podprzestrzeni $x^\perp$: mamy $\mathrm{d}J(x)(u) = \frac{1}{\|x\|^2}(u - 2\langle \frac{x}{\|x\|}, u\rangle \frac{x}{\|x\|})$. Równoważnie: macierz Jacobiego pochodnych cząstkowych inwersji J jest równa $\|x\|^{-2}(I - 2A)$, gdzie $A = A(x) \overset{def}{=} (x_i x_j \|x\|^{-2})_{i,j=1}^k$. Gdy przyjąć $y = x/\|x\|$, to macierz symetryczna $A = yy^t$ spełnia warunek $A^2 = A$, wobec czego $I - 2A$ jest macierzą ortogonalną.)

Uwaga 4. * Jak wiemy z zadania 12 w §I.6.C, każdy rzut stereograficzny jest obcięciem (do rzutowanej sfery nakłutej) pewnej inwersji. Stąd już wynika, że rzut stereograficzny sfery nakłutej również spełnia warunki i) oraz ii) twierdzenia 2. Jest on też przekształceniem konforemnym, jeśli definicję konforemności w sposób naturalny rozszerzyć na przekształcenia pomiędzy rozmaitościami riemannowskimi.

Uwaga 5. Uzasadnienie twierdzeń 1 i 2a) pokazuje, że przekształcenie biholomorficzne zachowuje miarę *zorientowanego* kąta pomiędzy łukami gładkimi. Wynika to stąd, że pochodna rzeczywista $\mathrm{d}f(p)$ takiego przekształcenia jest podobieństwem zachowującym orientację, patrz uwaga 2 w §I.2.

2 Przekształcenia dysku.

Udowodnimy tu dwa ważne lematy, dotyczące holomorficznych przekształceń dysku. Pierwszy z nich, należący do Schwarza, posłuży do dowodu twierdzenia Riemanna o holomorficznej równoważności obszarów jednospójnych, natomiast drugi – to lemat Blocha–Landaua, wykorzystany już w §III.3 i (pośrednio) w §IV.2 w dowodach twierdzeń Montela i Picarda. Jak i te wcześniejsze twierdzenia, lemat Blocha–Landaua dyskutujemy w „dodatku" do głównego tekstu.

Lemat 1 (Schwarza o dysku)**.** *Niech holomorficzna funkcja $f : D(0,r) \to D(0,R)$ spełnia warunek $f(0)=0$. Wówczas prawdziwe są nierówności $|f'(0)| \le R/r$ i $|f(z)| \le (R/r)|z|$ dla $z \neq 0$; ponadto, albo każda z tych nierówności jest ostra, albo $f(z)=kz$ dla wszystkich $z \in D(0,r)$ i pewnej stałej k o module R/r. (W ostatnim przypadku f jest złożeniem obrotu wokół 0 i jednokładności o skali R/r.)*

Dowód. Przyjmijmy $g(0)=f'(0)$ i $g(z)=f(z)/z$ dla $z \in D(0,r)\setminus\{0\}$. Funkcja g jest holomorficzna na mocy lematu Riemanna o przedłużaniu. Ponadto, dla $c<r$ koło $F_c = \overline{D}(0,c) \subset D(0,r)$ jest zwarte i dla $z \notin F_c$ zachodzi $|g(z)| = |f(z)|/|z| < R/c$. Z twierdzenia 3 w §III.1.E i dowolności stałej $c<r$ wynika więc, że $|g| \le R/r$, zaś jeśli $|g(z_0)| = R/r$ dla pewnego $z_0 \in D$, to $g = const$. (Por. część d) uwagi 1 w §III.1.E.) Jest to żądana teza. □

Dla $p \in D = D(0,1)$ rozważmy *przekształcenie Blaschkego* $b_p : \widetilde{\mathbb{C}} \to \widetilde{\mathbb{C}}$ dane wzorem

$$b_p(z) = \frac{z-p}{1-\overline{p}z} \tag{1}$$

Wówczas:

a) b_p jest homografią z biegunem w punkcie $1/\overline{p} \notin D$.

b) Gdy $|z|=1$, to $|z-p|^2 = 1+|p|^2 - 2\,\mathrm{Re}(\overline{p}z) = |1-\overline{p}z|^2$, tzn. $|b_p(z)|=1$. Z zasady maksimum wynika więc, że $|b_p(z)|<1$ dla $z \in D$, czyli $b_p(D) \subset D$.

c) $b_{-p} \circ b_p(z) = z$, wobec czego $b_{p|D} : D \to D$ jest przekształceniem biholomorficznym. Poniżej obcięcie $b_{p|D}$ oznaczamy nadal przez b_p.

Wniosek 1. *Każde przekształcenie biholomorficzne $f : D \to D$ jest postaci $z \mapsto k \cdot b_p(z)$, dla pewnych $p \in D$ i $k \in \partial D$.*

Dowód. Niech wpierw $f(0) = 0$. Z lematu Schwarza wynika, że wtedy $|f(z)| \le |z|$ dla $z \in D$. Tak samo $|f^{-1}(z)| \le |z|$ i wobec tego $|f(z)| = |z|$ dla $z \in D$. Z końcowej części lematu Schwarza wnosimy więc, że f jest obrotem.

W ogólnym przypadku niech $p = f^{-1}(0)$ i $g = f \circ b_p^{-1}$. Ponieważ $b_p(p) = 0$, więc $g(0) = 0$. Wobec tego g jest obrotem i $f = g \circ b_p = k \cdot b_p$, dla pewnego $k \in \partial D$. □

Dodatek 1*: Informacja o geometrii hiperbolicznej (zadania).

Zadanie 1.* Składając przekształcenie holomorficzne $f : D \to D$ z obu stron z odpowiednimi przekształceniami Blaschkego dowieść, że:

a) $\delta(f(p), f(q)) \le \delta(p, q)$ dla wszystkich $p, q \in D$, gdzie $\delta(p, q) \stackrel{def}{=} |b_p(q)| = \frac{|p\ -\ q|}{|\ 1\ -\ \overline{p}\ q\ |}$.

b) $|f'(p)| \le (1 - |f(p)|^2)/(1 - |p|^2)$ dla wszystkich $p \in D$.

c) Jeśli w a) (lub w b)) w miejsce nierówności $\le$ zachodzi równość dla pewnych $p \ne q$ (odp. dla pewnego p), to przekształcenie f jest biholomorficzne. Przeciwnie, gdy jest ono biholomorficzne, to obie strony nierówności są równe jako funkcje.

Choć powyższa funkcja δ nie spełnia nierówności trójkąta, to może ona posłużyć do wyznaczenia tzw. *metryki hiperbolicznej* na dysku D, a także bogatej geometrii, przekształcającej D w tzw. *model Poincaré'go płaszczyzny Bolayia–Łobaczewskiego.*

Zadanie 2.* a) Dowieść, że funkcja $d \stackrel{def}{=} \ln(\frac{1+\delta}{1-\delta})$ jest metryką na dysku D. (Wskazówka: sprowadzić nierówność trójkąta do nierówności $\frac{1+|p|}{1-|p|} \cdot \frac{1+|q|}{1-|q|} \ge \frac{1+\delta(p,q)}{1-\delta(p,q)}$ dla $p, q \in D$, a tę do jednej z nierówności rozpatrywanych w zadaniu z §I.1.)

b) Gdy dysk D rozpatrywać z metryką d, to każde przekształcenie biholomorficzne $D \to D$ jest izometrią, a każde przekształcenie holomorficzne $D \to D$ spełnia warunek Lipschitza ze stałą 1.

c) Każde koło w metryce d jest zarazem kołem euklidesowym, choć na ogół o innym środku i innym promieniu. (Wskazówka: rozpatrzeć koła o środku w 0 i skorzystać z b).)

d) Nazwijmy *odcinkiem hiperbolicznym* o końcach $p, q \in D$ zbiór $[p, q]_h \stackrel{def}{=} \{z \in D : d(p, z) + d(z, q) = d(p, q)$. Dowieść, że bądź $[p, q]_h = [p, q]$ i punkty p i q leżą na wspólnej średnicy dysku D, bądź $[p, q]_h$ jest łukiem okręgu prostopadłego do ∂D, mającym p i q jako swe krańce. (Chodzi oczywiście o łuk zawarty w D, i taki jest jedyny. Wskazówka: przyjąć wpierw $p = 0$, a w przypadku ogólnym skorzystać z tego, że przekształcenie b_p przeprowadza p na 0 i jest homografią, a więc ma własności omówione w §1 i w §I.6.)

Uwaga 1. * Skąd bierze się wzór na metrykę d? Otóż gdy d jest jakąkolwiek metryką na dysku D, w której każde przekształcenie biholomorficzne $D \to D$ jest izometrią i która spełnia warunek $\lim_{q\to 0} d(q, 0)/|q| = 1$, to ze wzoru na $|b_p'(p)|$ wynika równość $\lim_{q\to p} \frac{d(p,q)}{|q-p|} = \lim_{q\to p} \frac{d(b_p(q),0)}{|b_p(q)|} \frac{|b_p(q)|}{|q-p|} = \frac{1}{1-|p|^2}$. Uzasadnia to przyjęcie $d(p, q) = \inf_\gamma \int_0^1 \frac{|\gamma'(t)|}{1-|\gamma(t)|^2} \mathrm{d}t$, gdzie γ przebiega wszystkie drogi w dysku D, łączące p i q. Nietrudny rachunek utwierdza nas w tym, że $d(0,q) = \frac{1}{2}\ln\frac{1+q}{1-q}$ dla $q \in (0,1)$, skąd już –z dokładnością do czynnika $\frac{1}{2}$ –wynika przyjęty w zadaniu wzór, wyznaczający $d(p,q)$. (Uzupełnienie szczegółów pozostawione jest jako zadanie. „Rachunkiem" nazwano sprawdzenie, że gdy użyć zapisu biegunowego $\gamma(t) = r(t)\exp(\mathrm{i}\alpha(t))$, to $\int_0^1 \frac{|\gamma'(t)|}{1-|\gamma(t)|^2}\mathrm{d}t \geq |\int_0^1 \frac{r'(t)}{1-r(t)^2}\mathrm{d}t| = \frac{1}{2}\ln\frac{1+q}{1-q}$, przy czym dla pewnej drogi γ, łączącej 0 z q, zachodzi równość.)

Dodatek 2*: Lematy Blocha–Landaua i Blocha.

Lemat 2 (Blocha–Landaua). * *Gdy funkcja h jest holomoficzna w kole domkniętym $\overline{D}(p,r)$, to jej obraz zawiera pewien dysk o promieniu $Lr|h'(p)|$, gdzie $L = 1/24$.*

Dowód. * Załóżmy bez zmniejszenia ogólności, że $p = 0$ (inaczej zastąpimy h przez funkcję $z \mapsto h(z-p)$) i że $h'(0) \neq 0$. Dowód oparty jest na następującej obserwacji: jeśli dla wszystkich z z pewnego koła $\overline{D}(z_0,r_0) \subset \overline{D}(0,r)$ spełniona jest nierówność $|h'(z)| \leq 2|h'(z_0)|$, a zatem i $|h'(z) - h'(z_0)| \leq 3|h'(z_0)|$, to dla $z \in \overline{D}(z_0, \frac{1}{6}r_0)$ wynika z lematu Schwarza nierówność $|h'(z) - h'(z_0)| \leq \frac{1}{2}|h'(z_0)|$. Na podstawie ostatniego zadania z §II.2 i twierdzenia 2 w §IV.5, funkcja h jest więc na kole $\overline{D} = \overline{D}(z_0, \frac{1}{6}r_0)$ różnowartościowa i przekształca je na zbiór zawierający koło o promieniu $\frac{1}{12}r_0|h'(z_0)|$. Pozostaje znaleźć z_0 i r_0 tak, by prócz poprzedniego spełniony był warunek $r_0|h'(z_0)| = \frac{1}{2}r|h'(0)|$.

Oto jak E. Landau proponuje wskazać z_0 i r_0. Niech

$$\varphi(z) \stackrel{def}{=} |h'(z)| \cdot (r - |z|) \quad \text{dla} \quad z \in \overline{D}(0,r)$$

i niech z_0 będzie jednym z pierwiastków równania $\varphi(z) = r|h'(0)|$, mających największy moduł. (Pierwiastki takie istnieją, bo $\varphi(0) = r|h'(0)|$ i funkcja φ jest ciągła; ponadto $|z_0| < r$, bo $\varphi_{|\partial D(0,r)} = 0$.) Przyjmijmy $r_0 = \frac{1}{2}(r - |z_0|)$. Z przyjętych definicji wnosimy, że $r|h'(0)| = (r-|z_0|)|h'(z_0)| = 2r_0|h'(z_0)|$, a także $\overline{D}(z_0,r_0) \subset \overline{D}(0,r_1)$, gdzie $r_1 \stackrel{def}{=} r - r_0$. Ponieważ $r_1 \in (|z_0|, r)$, więc $r|h'(0)| > \varphi(z) = |h'(z)|(r - r_1)$ dla $z \in \partial D(0,r_1)$. Wykorzystując zasadę maksimum otrzymujemy żądaną nierówność:

$$\|h'\|_{D(z_0,r_0)} \leq \|h'\|_{D(0,r_1)} = \|h'\|_{\partial D(0,r_1)} \leq r|h'(0)|/(r-r_1) = r|h'(0)|/r_0 = 2|h'(z_0)|. \quad \square$$

Uwaga 2. * a) „Lemat Blocha–Landaua" był przez Blocha (który pierwszy go sformułował i dowiódł) przypisany Landauowi, zaś przez Landaua – Blochowi. Powyższy dowód dał w zasadzie Landau; pokazuje on zarazem, że na pewnym dysku o promieniu $Br|h'(p)|$ określona jest dla $B = 1/24$ gałąź funkcji h^{-1} (bo jest na nim określona funkcja $(h_{|\overline{D}})^{-1}$). Takie wzmocnienie lematu Blocha–Landaua należy jednak do Blocha, którego dowód był znacznie dłuższy. W lematach Blocha–Landaua i Blocha można liczby

$L = 1/24$ czy $B = 1/24$ zastąpić przez większe; lecz przez jak duże – nie wiadomo dokładnie, choć znane są dość wąskie szacunki: istnieją największe stałe L_0 i B_0, z błędem ≤ 0.03 przybliżane przez 0.53 i 0.45, odpowiednio.

b) Nie należy sądzić, że środkiem dysku, o którym mowa w tezie, może być punkt $h(p)$, jeśli stała L jest odpowiednia. Gdy bowiem $h(z) = \varepsilon e^{z/\varepsilon} + 1 - \varepsilon$, to zbiór $h(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \setminus \{1-\varepsilon\}$ nie zawiera dysku o środku w $h(0) = 1$ i promieniu ε – choć zawiera dyski o dowolnie dużych promieniach, w zgodzie z lematem. Zależne niestety od $\|h - h(p)\|_{D(p,r)}$ oszacowanie promieni r' takich, że $h(D(p,r)) \supset D(h(p), r')$, daje poniższe zadanie.

Zadanie. * Dowieść, że gdy funkcja h jest holomorficzna w kole $\overline{D} = \overline{D}(0,r)$, to $h(D) \supset D\big(h(0), \frac{1}{12M}|h'(0)|^2 r^2\big)$, gdzie $M := \|h - h(0)\|_{D(0,r)} \leq \operatorname{diam} h(D)$. Dla dowodu przyjąć wpierw $r = 1$ i $h(0) = 0$, rozwinąć h w szereg $c_1 z + c_2 z^2 + \ldots$ i dowieść, że

a) Gdy $|z| \leq \frac{1}{6M}|h'(0)|$, to $|z| \leq 1/6$ i $|h'(z) - h'(0)| \leq \frac{1}{2}|h'(0)|$ (Wskazówka: wywnioskować z nierówności Cauchy'ego, że $|2c_2 z + 3c_3 z^2 + \ldots| \leq 2M|z| \sum_{n\geq 0}(2|z|)^n$.)

b) Przy $R = \frac{1}{6M}|h'(0)|$, funkcja h jest różnowartościowa na kole $\overline{D}(0,R)$ i przekształca je na zbiór zawierający $D(0, \frac{1}{12M}|h'(0)|^2)$.

3 Przykłady biholomorficznych przekształceń na dysk.

Definicja. Zbiory otwarte $U, V \subset \mathbb{C}$ nazywamy *holomorficznie równoważnymi*, jeśli istnieje biholomorficzne przekształcenie jednego z nich na drugi.

Przykłady obszarów holomorficznie równoważnych z dyskiem omawiane były na ćwiczeniach. Obejmują one: półpłaszczyzny, soczewki właściwe (w tym półkola i kąty), pasy i półpasy, przecięcia kątów z dyskiem zatoczonym z wierzchołka kąta, elipsy pełne, płaszczyzny z usuniętymi rozłącznymi dwiema półprostymi. Biholomorficzne przekształcenie każdego z tych zbiorów na dysk lub półpłaszczyznę można jawnie wskazać, wykorzystując omawiane w §I.6 własności homografii, funkcji wykładniczej i funkcji trygonometrycznych. Przypomnijmy pokrótce, jak takie przekształcenia budować.

Nazwijmy *dyskiem uogólnionym* w $\widetilde{\mathbb{C}}$ każdą z dwóch składowych zbioru $\widetilde{\mathbb{C}} \setminus C$, gdzie C jest okręgiem uogólnionym w $\widetilde{\mathbb{C}}$. *Soczewką* w $\widetilde{\mathbb{C}}$ nazwiemy niepusty zbiór, będący częścią wspólną dwóch dysków uogólnionych, których brzegi się przecinają. Jeśli dyski te są półpłaszczyznami, to soczewka jest *pasem* (gdy półpłaszczyzny są równoległe) lub kątem (gdy nie są). Soczewka S jest *właściwa*, gdy ∞ nie leży w jej domknięciu.

1) Przekształcenie soczewki właściwej na pas lub kąt. Rozważana soczewka S jest przecięciem dwóch dysków uogólnionych, których brzegi oznaczymy C_1 i C_2. Obierzmy punkt $p \in C_1 \cap C_2$ i przeprowadźmy go homografią $h(z) = 1/(z-p)$ na ∞. Ponieważ okręgi

uogólnione $h(C_1)$ i $h(C_2)$ przechodzą przez ∞, więc są one prostymi, zaś $h(S)$ jest kątem lub pasem. Zauważmy, że $h(S) \subset \mathbb{C}$, gdyż $h^{-1}(\infty) = p \notin S$.

2) Przekształcenie pasa lub kąta na półpłaszczyznę. Kąt łatwo jest przeprowadzić na zbiór $K = \{z : 0 < \mathrm{Arg}(z) < \alpha\}$, gdzie $0 < \alpha \leq 2\pi$, a ten funkcją $z \mapsto z^{\pi/\alpha}$ na półpłaszczyznę $\Pi_+ = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}\, z > 0\}$. (Funkcję tę umiemy na K zdefiniować dzięki temu, że $K \cap [0, \infty) = \emptyset$, a na $\mathbb{C} \setminus [0, \infty)$ określona jest gałąź logarytmu.) Natomiast pas przeprowadźmy funkcją liniową na pas poziomy $\{z : 0 < \mathrm{Im}\, z < \alpha\}$, gdzie $\alpha \leq 2\pi$, a ten funkcją exp na kąt $\{z : 0 < \mathrm{Arg}\, z < \alpha\}$. Gdy zadbać o to, by $\alpha = \pi$, to w obrazie otrzymamy półpłaszczyznę Π_+; gdy zaś $\alpha = 2\pi$, to otrzymamy kąt pełny $\mathbb{C} \setminus [0, \infty)_{\mathbb{R}}$.

3) Przekształcenie wycinka koła lub półpasa. „Półpas" $\{z : 0 < \mathrm{Im}\, z < \alpha, \mathrm{Re}\, z < c\}$ przy przekształceniu exp przejdzie na wycinek koła $\{z : |z| < \mathrm{e}^c, 0 < \mathrm{Arg}\, z < \alpha\}$, a ten z kolei funkcją $z \mapsto z^{\pi/\alpha}$ przeprowadzić możemy na półkole (a wiec na soczewkę).

4) Przekształcenie półpłaszczyzny na dysk. Gdy półpłaszczyzną jest $\Pi_+ = \{z : \mathrm{Im}(z) > 0\}$, zaś dyskiem – $D(0, 1)$, to przekształcenie możemy zadać dowolnym ze wzorów opisanych w zadaniu 8 w §I.6.C, np. $f(z) = (z - \mathrm{i})/(z + \mathrm{i})$.

5)* Przekształcenie płaszczyzny z wyjętymi współliniowymi półprostymi. Jak wiemy z §I.6.A, zbiór $\mathbb{C} \setminus (L_1 \cup L_2)$, gdzie $L_1 = [1, \infty)_{\mathbb{R}}$ i $L_2 = (-\infty, -1]_{\mathbb{R}}$, jest obrazem pasa $V_0 = \{z : 0 < \mathrm{Re}\, z < \pi\}$ przy przekształceniu cos, a także –na podstawie zadania w §I.1 i §I.7–jest obrazem półpłaszczyzny Π_+ przy przekształceniu $u(z) = \frac{1}{2}(z + z^{-1})$. Przekształcenia $u_{|\Pi_+}$ i $\cos_{|V_0}$ i są różnowartościowe, zaś przekształcenia do nich odwrotne, przekształcające $\mathbb{C} \setminus (L_1 \cup L_2)$ na Π_+ czy V_0, można zadać wzorami $w \mapsto w + \sqrt{w^2 - 1}$ i $w \mapsto -\mathrm{i}\,\mathrm{Log}(w + \sqrt{w^2 - 1})$, odpowiednio. (Wzorom tym umiemy nadać sens, gdyż $w^2 - 1 \notin [0, \infty)_{\mathbb{R}}$ dla $w \notin L_1 \cup L_2$.)

Każdy z powyższych zbiorów możemy na inny z nich przeprowadzić złożeniem opisanych przekształceń lub ich odwrotności.

4 Twierdzenie Riemanna o holomorficznej równoważności płaskich obszarów jednospójnych.

Dowiedziemy obecnie, że wiele wcześniej rozpatrywanych własności obszaru jest równoważnych temu, by był on jednospójny. Są one też równoważne własności oznaczonej niżej literą R, po raz pierwszy rozważanej przez Riemanna.

Twierdzenie 1. *Gdy U jest niepustym obszarem w $\mathbb{C}$, różnym od $\mathbb{C}$, to równoważne są warunki:*

a) obszar U jest jednospójny;
b) $\int_\gamma f = 0$ dla każdej funkcji $f \in H(U)$ i każdej kawałkami gładkiej pętli γ w U;
c) każda funkcja $f \in H(U)$ ma funkcję pierwotną;

d) każda funkcja holomorficzna $f : U \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ *ma gałąź logarytmu;*

e) każda funkcja holomorficzna $f : U \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ *ma gałąź argumentu;*

f) każda funkcja holomorficzna $f : U \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ *ma dla każdego* $w \in \mathbb{C}$ *gałąź swej* w*–tej potęgi;*

g) każda różnowartościowa funkcja holomorficzna $f : U \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ *ma gałąź pierwiastka kwadratowego;*

R) istnieje biholomorficzne przekształcenie obszaru U *na dysk* $D = \{z : |z| < 1\}$.

Implikacje $d) \Leftrightarrow e)$ i $a) \Rightarrow b) \Rightarrow c) \Rightarrow d) \Rightarrow f) \Rightarrow g)$ bądź są oczywiste (jak ostatnia z nich), bądź zostały omówione wcześniej, w §§I.7, I.8, II.2 i III.2.A. Implikacja $R) \Rightarrow a)$ wynika stąd, że jednospójność jest zachowywana przez homeomorfizmy, zaś dysk D jest jednospójny. Natomiast to, że jakikolwiek z warunków a)–g) implikuje R), nazywane jest na ogół twierdzeniem Riemanna o przekształceniach biholomorficznych. Najczęściej, nazwę tą odnosi się do implikacji $a) \Rightarrow R)$. Poniżej twierdzenie udowodnimy wykazując, że $g) \Rightarrow R)$, w oparciu o następujący

Lemat 1 (zasadniczy)**.** *Niech* $p \in U$ *i niech przekształcenie biholomorficzne* $g : U \to g(U) \subset D$ *spełnia warunek* $g(p) = 0$*. Jeśli* $g(U) \neq D$ *i zachodzi g), to istnieje przekształcenie biholomorficzne* $g_1 : U \to g_1(U) \subset D$ *takie, że*

$$g_1(p) = 0 \quad i \quad |g_1'(p)| > |g'(p)|. \tag{2}$$

Dowód. * Obierzmy punkt $q \in D \setminus g(U)$ i homografię h_0, przeprowadzającą D na D i q na 0. (Można za h_0 przyjąć przekształcenie Blaschkego b_q, patrz przykład w §2.) Wtedy $0 \notin h_0 \circ g(U)$ i z założenia istnieje gałąź g_0 pierwiastka kwadratowego z $h_0 \circ g$. Inaczej mówiąc,

$$\lambda \circ g_0 = h_0 \circ g, \quad \text{gdzie } \lambda(z) = z^2 \text{ dla } z \in D \tag{3}$$

Niech h_1 będzie homografią, przeprowadzającą D na D, zaś $g_0(p)$ na 0, i niech $g_1 = h_1 \circ g_0$. Z definicji i z (3) otrzymujemy łatwo:

$$g = f \circ g_1, \quad \text{gdzie } \ f = h_0^{-1} \circ \lambda \circ h_1^{-1}.$$

Ponieważ $g(p) = 0 = g_1(p)$, więc $f(0) = 0$. Ponadto, przekształcenie f przeprowadza D w D (bo czynią to h_0^{-1}, h_1^{-1} i λ), lecz nie jest różnowartościowe (gdyż λ nie jest i $h_1^{-1}(D) = D$). Nie jest więc ono obrotem i z lematu Schwarza wynika, że $|f'(0)| < 1$. Stąd $|g'(p)| = |f'(0)||g_1'(p)| < |g_1'(p)|$. □

W dowodzie milcząco wykorzystaliśmy to, że gałąź pierwiastka funkcji biholomorficznej też jest taką funkcją (i dlatego jest nią g_1). Wykorzystamy to też niżej, wraz z tym, że obraz przekształcenia biholomorficznego jest zbiorem otwartym.

* Dowód implikacji $g) \Rightarrow R)$ w twierdzeniu. Podzielimy go na 4 części.

1. Przeprowadzimy obszar U biholomorficznie na taki, który nie jest gęsty w $\mathbb{C}$.

W tym celu niech $q \in \mathbb{C} \setminus U$ i niech f będzie gałęzią pierwiastka kwadratowego z funkcji $\mathrm{id}_U - q$. Zbiór $V = f(U)$ jest otwarty i wobec tego zbiór $-V = \{-v : v \in V\}$ –też. Pozostaje zauważyć, że $V \cap (-V) = \emptyset$. Jeśliby jednak $f(a) = -f(b)$ dla pewnych $a, b \in U$, to $a - q = (f(a))^2 = (f(b))^2 = b - q$, skąd $a = b$ i $f(a) = -f(a)$. Jest to niemożliwe, bo wówczas $0 = f(a)^2 = a - q$, wbrew temu, że $q \notin U$ i $a \in U$.

2. Ustalmy punkt $p \in U$ i złóżmy przekształcenie biholomorficzne $f : U \to f(U)$, którego obraz jest rozłączny z pewnym dyskiem D_0, z homografią przeprowadzającą ten dysk na $\widetilde{\mathbb{C}} \setminus \overline{D}$, a punkt $f(p)$ na 0. Otrzymamy przekształcenie biholomorficzne obszaru U na podzbiór dysku D, przeprowadzające p na 0.

3. Oznaczmy przez $\mathcal{G}$ (niepusty!) zbiór wszystkich takich przekształceń i przyjmijmy

$$M = \sup\{|g'(p)| : g \in \mathcal{G}\} \in [0, \infty]$$

Z uwagi 1 i) w §1 wynika, że $M > 0$. Ponadto, $M = |g'(p)|$ dla pewnego $g \in \mathcal{G}$. Istotnie, istnieją $g_1, g_2, \dots \in \mathcal{G}$ dla których $\lim_{n\to\infty} |g_n'(p)| = M$. Na mocy twierdzeń Osgooda–Stieltjesa i Weierstrassa, można z ciągu (g_n) wybrać podciąg zbieżny niemal jednostajnie do funkcji $g \in H(U)$ takiej, że $|g'(p)| = M$. Stąd $g'(p) \neq 0$ i funkcja g, nie będąc stałą, przekształca obszar U biholomorficznie na zbiór otwarty $g(U)$. (Korzystamy z uwag 1 i 2 w §1.) A że zbiór ten jest zawarty w $\overline{D}$, to jest zawarty i w $\mathrm{Int}(\overline{D}) = D$.

4. Jeśliby $g(U) \neq D$, to na mocy lematu istniałoby przekształcenie $g_1 \in \mathcal{G}$ takie, że $|g_1'(p)| > |g'(p)| = M$, wbrew definicji liczby M. Zatem $g(U) = D$ i g jest szukanym przekształceniem. □

Uwaga 1. Płaszczyzna $\mathbb{C}$ nie jest holomorficznie równoważna z dyskiem D, bo każda funkcja holomorficzna $\mathbb{C} \to D$ jest stała (co wynika z twierdzenia Liouville'a).

Uwaga 2. * Dowiedliśmy zarazem, że jeśli warunek R) jest spełniony, to pewne przekształcenie biholomorficzne $g_p : U \to D$ przeprowadza dany punkt $p \in U$ na 0. Każde inne przekształcenie o tych własnościach jest postaci $k \cdot g_p$, gdzie $|k| = 1$ (bo jego złożenie z g_p^{-1} biholomorficznie przeprowadza dysk D na D, a 0 na 0; patrz twierdzenie 1 w §3).