FA, jesień 2012. Zadania domowe, grupa 1 (prowadzący H. Toruńczyk).

Uwaga a) W każdym zadaniu można korzystać z poprzednich jego części i innych zadań, nawet, jeśli się ich nie rozwiązało.

b) Gdy nie zaznaczono inaczej, zadania są ustne – nie wymaga się oddania na piśmie. Zgłaszać można rozwiązania całych zadań lub ich części, w tym nieomawianych dotąd zadań z serii ubiegłych. (Zadania, dyskutowane już na ćwiczeniach, staram się zaznaczyć plusem.) Zadania są bardzo nierównej trudności.

Proszę się nie zrażać duża ilością zadań–najwyżej pewne z nich „spadną" na dalsze ćwiczenia. Osoby, zgłaszające rozwiązanie jakiegoś zadania, proszę też o przygotowanie jego zwięzłej prezentacji – aby na ćwiczeniach wszyscy mogli z niej skorzystać, lecz by nie zabierała nadmiernie dużo czasu. Standardowe rachunki w czasie prezentacji można pomijać, lecz powinno być jasne, co należy policzyć i co z tego wychodzi; ponadto referujący powinien sam ocenić, które rachunki (czy rozumowania) są standardowe, a które zawierają istotne pomysły, wymagające przedstawienia.

Trzynasta porcja zadań (na poniedziałek, 21 I 2013r.)

1. Obliczyć a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^2}{z^2+\pi^2 n^2}$, b) $\sum \frac{(-1)^n}{n^2+1}$.

2. Obliczyć $\int_0^\infty \frac{x^{1/3}}{x^2+1}dx$ w podobny sposób, jak wykorzystany w zadaniu 1 serii 12.

3. U Krzyża zadanie 3.9.7.

4. Zadanie 2 na str. 58 notatek o wykładu.

5. Udowodnić, że obraz zbioru otwartego w $\widetilde{\mathbb{C}}$ przy funkcji meromorficznej jest zbiorem otwartym w $\widetilde{\mathbb{C}}$.

6. Zbadać, czy istnieją niestałe funkcje holomorficzne z $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ w $\{z\in\mathbb{C} : |z|>1\}$. (Wskazówka: wyniki z §V.4 i §V.5.)

Dwunasta porcja zadań (na poniedziałek, 14 I 2013r.)

1. + Obliczyć $\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}(x+4)}dx$ używając twierdzenia o residuach.
Uwaga: zadanie to jest trudniejsze od wcześniejszych, dotyczacych wyznaczania całek, i jest rozwiazane w notatkach Tao, week 10, strony 1–8. Chodzi więc o przemyślenie tego rozwiązania i zreferowanie go na ćwiczeniach.

2. + Niech $\lambda\in(0,1)$. Dowieść, że równanie $e^z - z = \lambda$ ma w półpłaszczyźnie Re$z \le 0$ dokładnie jedno rozwiązanie. (Wskazówka: zastąpić wpierw półpłaszczyznę przez półkole $|z|\le R, \mathrm{Im}(z)\le 0$, dla R dostatecznie dużego.)

3. + Niech $c\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$. Dowieść, że dla dostatecznie dużych n równanie $\mathrm{tg}(z) = cz$ ma $2n+1$ rozwiążań w kwadracie $|\mathrm{Re}z|\le\pi n, |\mathrm{Im}z|\le\pi n$. Posłużyć się twierdzeniem Rouchego jak następuje: przyjąć $f(z) = \mathrm{tg}(z) - cz, g(z) = cz$, dowieść, że $N_{f,K} = N_{g,K}$, gdzie K to nasz dostatecznie duży kwadrat, i wyznaczyć liczbę $B_{f,K}$ biegunów funkcji f w K.

4. Zadanie 3.9.2 u Krzyża. (Dotyczy zasady argumentu.)

5. Zadanie 3.9.3 u Krzyża.

6. U Krzyża, zadania 3.4.16+3.5.7. (Należy przeczytać o residuum w nieskończoności i odpowiedniej wersji twierdzenia o residuach na str. 58 notatek do wykładu.)

Jedenasta porcja zadań (na poniedziałek, 7 I 2013r.)

1. + Niech $f(x) = x^2/(x^2+1)(x^2+2x+2)$ dla $x \in \mathbb{R}$. Dowieść, że $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 3\pi/5$.

2. + Niech $f(t) = \frac{\cos 3t}{5-4\cos t}$. Dowiesć, że $\int_0^{2\pi} f(t)dt = \pi/12$.

3. + Dowieść, że $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin \pi x}{x^2+2x+5} dx = -\pi e^{-2\pi}$. Wskazówka: wykorzystać to, że sin = Im(exp) na osi rzeczywistej; użyć lematu Jordana (tzn. twierdzeń 1ii) i 2 ze strony 50 notatek do wykładu).

+ Twierdzenie Rouchégo nie było jeszcze omawiane na wykładzie, ale na ćwiczeniach je sformułowałem; patrz też str. 55 notatek do wykładu. W oparciu o to sformułowanie, proszę rozwiązać następujące zadania:

4. + Znaleźć liczbę pierwiastków równania $f(z) = 0$, leżących w kole $|z| < 1$, gdy
a) $f(z) = z^7 - 5z^4 + z^2 - 2$;
b) $f(z) = z^9 - 2z^6 + z^2 - 8z - 2$.
Wskazówka: Typowe zastosowanie twierdzenia Rouchégo polega na znalezieniu funkcji g, której liczbę pierwiastków w danym kole łatwo oszacować (np. jednomianiu cz^k) i takiej, że $|f(z) - g(z)| < |f(z)|$ na brzegu koła.

5. + Dowieść, że wielomian $f(z) = z^7 - 5z^3 + 12 = 0$ ma 7 pierwiastków w kole $|z| < 2$, lecz nie ma pierwiastków w kole $|z| \leq 1$. Wywnioskować, że wszystkie jego pierwiastki leżą w pierścieniu $1 < |z| < 2$.

6. + Rozwiązać wybraną część drugiego zadania na str. 52 notatek do wykładu.

7. (Zreferowano pierwszą część.) Przeczytać dowód wykorzystywanego wyżej twierdzenia 4 i rozwiązać pierwsze zadanie na str. 52 notatek do wykładu.

Dziesiąta porcja zadań (na poniedziałek, 17 XII.)

Jako nowe zadania dodaję 16 i 19 z zadań przygotowaczych – dotyczą one całek, których nie tak dużo liczyliśmy. W związku z kolokwium dobrze jest przejrzeć i inne zadania przygotowawcze, a zostało też sporo zaległych.

Dziewiąta porcja zadań (na poniedziałek, 3 XII.)

1. Niech $f(z) = \frac{1}{z^4}(1+z)\text{ctg(z)}$. (Tu, ctg = cos / sin.)
a) Wyznaczyć część główną rozwinięcia Laurenta funkcji f wokół zera.
b) Wyznaczyć wszystkie izolowane punkty osobliwe funkcji f, leżące w dysku $|z| < 5$, i residua funkcji f w tych punktach.
c) Obliczyć $\int_\Gamma f - \int_\Lambda f$, gdzie Γ to okrąg $|z| = 5$, a Λ to okrąg $|z - 3/2| = 2$ (oba zorientowane dodatnio).

2. + Niech funkcja f będzie holomorficzna w $\mathbb{C}$ i ograniczona. Dla danych $a, b \in \mathbb{C}$ dowieść, że $\lim_{r\to\infty} \int_{|w|=r} \frac{f(w)}{(w-a)(w-b)} dw = 0$ i używając twierdzenia o residuach dowieść, że funkcja f jest stała (twierdzenie Liouville'a).

3. + Niech $\gamma(t) = t - \mathbf{i}\sin(t)$ dla $t \in [-\pi, \pi]$.
a) Udowodnić, że każda z funkcji $1/(z+1)$ i $1/(z-1)$ ma funkcję pierwotną w obszarze, zawierającym obraz drogi γ. (Obszary mogą być różne dla różnych funkcji.) Wskazać proponowane obszary i funkcje pierwotne, w tym funkcje wyrazić wzorami nie używającymi znaku całki.
b) Wyznaczyć $\int_\gamma f$, gdzie $f(z) = 2z/(z^2 - 1)$. (Wskazówka: wyrazić f przy pomocy poprzednich dwóch funkcji.)
c) Czy $\int_\lambda f = \int_\gamma f$ dla każdej drogi λ z $-\pi$ do π, omijającej -1 i 1? (Odpowiedź uzasadnić i w przypadku odpowiedzi negatywnej wskazać przykład poświadczającej to drogi; starać się też unikać

zbędnych rachunków.)

Ósma porcja zadań (na poniedziałek, 26 XI.)

1. Znaleźć rozwinięcie Laurenta funkcji $f(z) = \frac{1}{z} + \frac{1}{z-3} + \frac{1}{z-1}$ w pierścieniu $1 < |z| < 3$.

2. Dla szeregu Laurenta $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n z^n$ wyznaczyć znaleźć (maksymalny) pierścień zbieżności $P_{\max}$ o środku w zerze, a także wyrazić sumę tego szeregu bez działań nieskończonych, jeśli $c_n = 1/2^n$ dla $n \geq 0$ i $c_n = 1$ dla $n < 0$.

3. + Wyznaczyć residua funkcji f w punktach, w których nie jest ona określona, gdy
a) $f(z) = \frac{\cos z}{(z-i)^2}$
b) $f(z) = \frac{z}{\cos z - 1}$
c) $f(z) = \exp(z + \frac{1}{z})$

Siódma porcja zadań (na poniedziałek, 19 XI.)

1. a) 4.5.3, część i) u Krzyża.
b) 4.5.6 i) u Krzyża. (Wskazówka do obu części: rozkład na ułamki proste+postęp geometryczny.)

2. Zadanie ze str. 43 notatek.

3. a) Niech $D = D(z_0, r)$. Dla funkcji f, holomorficznej w $\overline{D}$, wyznaczyć $\int_0^{2\pi} f(re^{it})dt$. (Wskazówka: wzór Cauchy'ego.)
b) To samo, gdy w miejsce f jest funkcja rzeczywista u, harmoniczna w otoczeniu koła $\overline{D}$.

4. Obliczyć $\int_\Gamma f(z)\mathrm{d}z$, gdy $f(z) = e^z \cos z \sin z/(1+z^2)$ i Γ jest zorientowanym dodatnio:
a) okręgiem o środku w $1+i$ i promieniu $3/2$. (Wskazówka: wzór całkowy Cauchy'ego.)
b) prostokątem o wierzchołkach $-1/2, 1, 1+2i, (-1/2)+2i$.

Proszę pamiętać też o zadaniach zaległych!

Szósta porcja zadań (na poniedziałek, 12 XI.)
Przepraszam za opóźnienie.

1. Wyznaczyć następujące całki krzywoliniowe (gdzie można, starać się ułatwić sobie zadanie, korzystając z udowodnionych na wykładzie twierdzeń):
a) $\int_\Gamma \sin(2z+1)\mathrm{d}z$, gdzie Γ jest łamaną $[0, 1, \mathbf{i}]$.
b) $\int_\Gamma z\sin(z)dz$, gdzie Γ jest jak wyżej.
c)+ $\int_\Gamma \frac{1}{1+z^4}dz$, gdzie Γ jest dodatnio zorientowaną elipsą $x^2 + 4y^2 = 1$.
d) $\int_\Gamma \frac{1}{z-z_0}dz$, gdzie Γ jest dodatnio zorientowanym brzegiem kwadratu o wierzchołkach $z_0 \pm a \pm ai$ (wszystkie kombinacje znaków).

2. Znaleźć postać ogólną funkcji holomorficznej $f = u + v\mathbf{i}$, wiedząc że (odpowiednio):
a) $u(x,y) = 2xy + 3x$, b) $v = e^x(y\cos y + x\sin y) + x + y$.

3. a) Korzystając ze wzoru na sumę postępu geometrycznego, na pewnym dysku o środku w i rozwinąć funkcję $1/z$ w szereg potęgowy wokół i. Jaki jest promień zbieżności tego szeregu?
b) To samo z funkcja $1/z^2$. (Skorzystać z a).)
c) Wyrazić bez działań nieskończonych funkcję, równą sumie szeregu $\sum_{n=1}^\infty n^2 z^n$.

4. + Udowodnić, że funkcja $\cos(1/z)$ przyjmuje w dowolnym otoczeniu zera wszystkie wartości zespolone, prócz być może jednej.

5. $+$ Przekształcić biholomorficznie zbiór $x > 0, y > 0$ na dysk $|z| < 1$ tak, by punkt $(1,1)$ przeszedł na środek koła.

6. * Udowodnić, że każdy dysk o promieniu $\pi\sqrt{2}$ zawiera punkt z taki, że $\cos z \in \mathbb{Z}$. (Wskazówka: $\cos^{-1}(\mathbb{Z}) = iA + 2\pi\mathbb{Z}$ dla pewnego zbioru $A \subset \mathbb{R}$ takiego, że $\mathrm{dist}(t, A) < 1$ $\forall t \in \mathbb{R}$.)

Piąta porcja zadań (na poniedziałek, 3 XI.)

1. $+$ Proszę rozwiązać części i) i iii) lub ii) i iv) zadania 2.2.10 ze zbioru J. Krzyża. (Wskazówka: jeśli postępować zgodnie z twierdzeniem na stronie 29 notatek, to wygodnie jest przedstawić otrzymaną funkcję $g = u_x - \mathbf{i}u_u$ w zależności od z, a nie od x i y – bo wtedy jej funkcję pierwotną często można odgadnąć, unikając całkowania. W tym celu sensownie jest zbadać tę funkcję na osi $y = 0$: wzór na $g(x, y)$, po podstawieniu $y = 0$, może dać szukany wzór na $g(z)$ – po prostu zamiast x piszemy z, bo $z = x + 0\mathbf{i}$ na naszej osi.)

2. $=$ 2.2.13 ze zbioru Krzyża.

3. Udowodnić, że jeśli funkcja u jest harmoniczna w danym obszarze, to funkcja $u_x - \mathbf{i}u_y$ jest w nim holomorficzna.

4. ($+$, ale pozostał drobiazg w d).) $=$ zadanie 7 na str. 18 notatek.

5. $=$ zadanie 3.1.10 ze zbioru Krzyża.

6. $+$ a) Udowodnić twierdzenie Weierstrassa o wartości średniej: jeśli F jest funkcją pierwotną funkcji $f : U \to \mathbb{C}$ i odcinek $[z, u]$ jest zawarty w U, to ma miejsce równość $F(u)-F(z) = (u-z)w$ dla pewnego punktu w z domknięcia otoczki wypukłej zbioru $f([z, u])$. (Otoczką tą jest $\{t_0w_0+...+t_nw_n : n \in \mathbb{N}, w_0, ..., w_n \in f([z, u]), t_0, ..., t_n \in [0, 1]$ i $\sum_i t_i = 1\}$. Wskazówka: równość $F(z) - F(u) = (z - u)\int_0^1 \varphi_u(t)dt$ z dowodu twierdzenia 1 na str. 29 notatek. Słowo „domknięcia” jest zbędne, ale ułatwia zadanie.)

b) Wywnioskować, że jeśli U jest zbiorem wypukłym, to funkcja holomorficzna $F : U \to \mathbb{C}$, spełniająca warunek $\mathrm{Re}(F'(z)) > 0$ dla każdego punktu $z \in U$, jest różnowartościowa.

c) Użyć tego do dowodu, że funkcja $z + e^z$ jest różnowartościowa w półpłaszczyźnie $\mathrm{Re}(z) < 0$.

Czwarta porcja zadań (na poniedziałek, 29 X.)

1. $+$ Przypomnę, że na ćwiczeniach przeprowadzaliśmy bihlomorficznie wycinek koła $\{z : |z| < 1$ i $\mathrm{Arg}z \in (0, \pi/3)\}$ na półkole $\{z : |z| < 1$ i $\mathrm{im}(z) > 0\}$, a to półkole na koła $|z| < 1$. Przeprowadzić któryś z tych zbiorów biholomorficznie na pas $\{z : \mathrm{Im}z \in (0, 1)\}$. (Wskazówka: poczytać o funkcji wykładniczej i logarytmicznej.)

2. Na jaki zbiór homografia $h(z) = (z-i)/(z+i)$ przeprowadza „soczewkę”, będącą częścią wspólną kół $|z - 1| < \sqrt{2}$ i $|z + 1| < \sqrt{2}$?

3. $+$ Przeprowadzić biholomorficznie zbiór $\{z : \mathrm{Im}z < 1$ i $|z| > 1\}$ na pas $\{z : 0 < \mathrm{Im}z < 1\}$ i na koło $|z| < 1$. (Wskazówka: zastanowić się, który punkt warto homografią przeprowadzić na ∞.)

Trzecia porcja zadań (na poniedziałek, 22 X.)

1. $+$ a) Niech funkcja h ma szereg Maclaurina, zaczynający się od $1 - \frac{1}{12}z^2 + 0z^3$. Obliczyć współczynnik przy z^3 szeregu Maclaurina funkcji $(z - c)/h^2$, gdzie $c \in \mathbb{C}$.

b) Obliczyć współczynnik przy z^3 szeregu Maclaurina funkcji $\sin(\frac{z}{1-z})$.

2. $+$ Niech $f(z) = \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}z + \frac{1}{3!}z^2 + ...$ Funkcję $1/f$ rozwijamy w szereg $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n$.

a) Wyznaczyć cztery pierwsze **liczby Bernoulliego** $B_0, ..., B_3$.

b) Dowieść zależności rekurencyjnej $B_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k$ dla $n \geq 2$.

3. $+$ a) Kiedy $\cos z \in \mathbb{R}$?

b) Jaki jest zbiór wartości funkcji $\mathrm{tg} := \sin / \cos$?

4. $+$ a) Gdy $f \in \{\exp, \cos, \sin\}$, to $|f(z)| \leq e^{|z|}$ dla $z \in \mathbb{C}$.

b) $+$ Rozważmy kwadrat o środku w 0 i boku równoległym do osi rzeczywistej. Dowieść, że jeśli długość $2N+1$ jego boku jest liczbą nieparzystą, to na brzegu kwadratu funkcja $\mathrm{ctg}(\pi \mathrm{z})$ jest (co do modułu) ograniczona stałą niezależną od N.

5. $+$ **Symetrią** względem okręgu $T \subset \widetilde{\mathbb{C}}$ nazywamy przekształcenie Möbiusa s_T, którego T jest zbiorem punktów stałych (tzn. $T = Fix(s_T)$). Dowieść, że symetria s_T istnieje i jest jedyna,[1] na następującej drodze:

a) Gdy $T = \{\infty\} \cup \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im} z = 0\}$, to za s_T można przyjąć tylko odbicie $z \mapsto \overline{z}$ względem osi T. Gdy zaś $T = \{z : |z| = 1\}$, to $z \mapsto 1/\overline{z}$ spełnia żądany warunek.

b) Gdy przekształcenie Möbiusa f przeprowadza okrąg T_1 na T_2 i s_2 jest symetrią względem T_2, to $f^{-1} \circ s_2 \circ f$ jest nią względem T_1.

c) Z a) i b) uzyskać tezę w oparciu o to, że każdy okrąg w $\widetilde{\mathbb{C}}$ można homografią przeprowadzić na $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

Uwaga 1. Punkty p, q nazywamy **symetrycznymi** względem okręgu $T \subset \widetilde{\mathbb{C}}$, jeśli $s_T(p) = q$. Zbiór X jest **symetryczny względem** T, jeśli $s_T(X) = X$. Część b) zadania oznacza, że *przekształcenie Möbiusa f przeprowadza pary punktów, symetryczne względem okręgu $T \subset \widetilde{\mathbb{C}}$, na pary symetryczne względem okręgu $f(T)$.*

6. $+$ Niech s_1 i s_2 oznaczają symetrie względem okręgów T_1 i T_2, odpowiednio. Dowieść, że jeśli funkcja $f : U \to \mathbb{C}$, gdzie zbiór $U \subset \mathbb{C}$ jest otwarty, ma pochodną zespoloną w punkcie z_0 i $s_1(z_0) \neq \infty \neq s_2(f(s_1(z_0)))$, to funkcja $s_2 \circ f \circ s_{1|s_1(U)}$ ma ją w punkcie $s_1(z_0)$. (Wskazówka: gdy $T_1 = T_2 = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, jest to zadanie z poprzedniej serii. Skorzystać z uwagi.)

Druga porcja zadań (na poniedziałek, 15 X.)

Definicja. Dla przekształcenia $f : \widetilde{\mathbb{C}} \to \widetilde{\mathbb{C}}$ przyjmijmy $Fix(f) := \{p \in \widetilde{\mathbb{C}} : f(p) = p\}$.

1. $+$ a) Gdy $h : \widetilde{\mathbb{C}} \to \widetilde{\mathbb{C}}$ jest bijekcją, to $Fix(h \circ f \circ h^{-1}) = h(Fix(f))$.

b) Homografia h_A ma pewien punkt stały, a jeśli ma ich więcej niż 2 to jest identycznością, zaś macierz A jest postaci λI ($\lambda \in \mathbb{C}$).

c) Gdy homografie h_A i h_B w są równe w 3 punktach, to macierze A i B są proporcjonalne i $h_A = h_B$. (Wskazówka: przy $B = I$ wynika to z b); wykorzystać to, że $h_P \circ h_Q = h_{PQ}$ dla każdych 2×2–macierzy P, Q.)

d) Gdy h jest homografią i $Fix(h) = \{\infty\}$, to $h(z) = z + b$ dla pewnego $b \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

e) Gdy h jest homografią i $Fix(h) = \{0, \infty\}$, to $h(z) = az$ dla pewnego $a \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$.

2. Niech p_1, p_2, p_3 i q_1, q_2, q_3 będą trójkami różnych liczb zespolonych. Wówczas:

a) Istnieje jedyna homografia h taka, że $h(p_1) = 0, h(p_2) = \infty$ i $h(p_3) = 1$; jest nią $h(z) = k(z - p_1)/(z - p_2)$, gdzie $k = (p_3 - p_2)/(p_3 - p_1)$.

b) Istnieje jedyna homografia h taka, że $h(p_i) = q_i$ dla $i = 1, 2, 3$. (Wskazówka: $h = h_2^{-1} \circ h_1$, gdzie h_1 i h_2 konstruuje się w oparciu o a).)

c) Gdy w jest obrazem danego punktu z przy powyższej homografii h, to $\frac{p_3 - p_2}{p_3 - p_1} \cdot \frac{z - p_1}{z - p_2} = \frac{q_3 - q_2}{q_3 - q_1} \cdot \frac{w - q_1}{w - q_2}$. (Wskazówka: $h_2 \circ h = h_1$.)

[1] W geometrii, s_T nazywane jest **inwersją względem** T, lecz w analizie zespolonej ten termin miewa inne znaczenie.

d)* Homografia zachowuje **dwustosunek** $[p_1,p_2,p_3,p_4]{:=}\frac{p_3-p_1}{p_3-p_2}:\frac{p_4-p_1}{p_4-p_2}$ czwórki punktów.

3. + =1.4.5 u Krzyża. (Wskazówka: wskazać na rozważanym okręgu 3 punkty, których obrazy nadal na nim leżą.)

4. =1.1.9 u Krzyża.

5. + Niech $z_0\in U\subset\mathbb{C}$, gdzie U jest zbiorem otwartym. Dla funkcji $f:U\to\mathbb{C}$ dowieść, że gdy istnieje pochodna $f'(z_0)$, to istnieje i pochodna funkcji $g(z){:=}\overline{f(\overline{z})}$ w punkcie $\overline{z_0}$.

Pierwsza porcja zadań (na poniedziałek, 8 X.)

1. + W zbiorze J. Krzyża, zadania 3 i 6 w §1.3. Zapiszę je łącznie:
W a) i b), znaleźć takie przekształcenie $f(z)=az+b$, gdzie $a\neq 0$, że
a) (zadanie 3) f przeprowadza pas Re$z\in(0,1)$ na pas im$w\in(-\pi/2,\pi/2)$ oraz $f(1/2)=0$.
b) (zadanie 6) f przekształca trókąt o wierzchołkach 0, 1, i w trójkąt o wierzchołkach 0, 2, $1+i$.

2. +Fragmenty zadania 21 w §1.1 u Krzyża: podać geometryczną interpretację geometryczną zbiorów liczb zespolonych: a) $\{z:\mathrm{Re}(\mathbf{i}z)\in[0,1)\}$, b) $\{z:\mathrm{Re}(z^2)>c\}$, gdzie $c>0$; c) $\{z:|z|+\mathrm{Re}z\leq 1\}$.

3. + Dany jest wielomian zespolony $f(z)=c\prod_{i=1}^n(z-z_i)$. Udowodnić, że gdy $f(w)\neq 0$, to $f'(w)/f(w)=\sum_i 1/(w-z_i)$, wobec czego jeśli ponadto $f'(w)=0$, to $\sum_i(w-z_i)/|w-z_i|^2=0$. Wywnioskować, że każde zero w wielomianu f' jest postaci $w=\sum_i t_iz_i$ dla pewnych $t_1,...,t_n\geq 0$ takich, że $\sum_i t_i=1$, tzn. w należy do powłoki wypukłej zbioru zer wielomianu f. (Jest to **twierdzenie Gaussa-Lucasa**).

4. * + Niech $f(z)=\frac{1}{2}(z+z^{-1})$ dla $z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$. Udowodnić, że funkcja f przekształca w sposób różnowartościowy zbiory $\{z\in\mathbb{C}:|z|>1\}$ i $\{z\in\mathbb{C}:0<|z|<1\}$ na $\mathbb{C}\setminus[-1,1]$, zaś zbiór $\{z\in\mathbb{C}:\mathrm{Im}(z)>0\}$ na $(\mathbb{C}\setminus\mathbb{R})\cup(-1,1)$. (Wskazówka: wyznaczyć obraz $f(\partial X)$ brzegu ∂X rozważanego zbioru X i dowieść, że dla $w\notin f(\partial X)$ równanie $z+z^{-1}=2w$ ma dwa rozwiązania z_1,z_2; z nich jedno należy do X, bo $z_1z_2=1$.)

5. a)+ Dowieść, że gdy $|p|\leq 1$ i $|z|\leq 1$, to $|z-p|\leq|1-\overline{p}z|$, a przy $|z|=1$ jest równość.
b)+ * Dowieść, że gdy $|p|=P<1$ i $|q|=Q<1$, to $\frac{|P-Q|}{1-PQ}\leq\frac{|p-q|}{|1-\overline{p}q|}\leq\frac{P+Q}{1+PQ}$. (Wskazówka: mnożąc p i q przez liczbę P/p sprowadzić zadanie do przypadku, gdy $p=P$ i $q=Q(\cos\varphi+\mathbf{i}\sin\varphi)$. Wyrazić kwadrat środkowego członu nierówności jako funkcję zmiennej φ i dowieść, że ma ona ekstrema tylko gdy $\sin\varphi=0$.)

6. + (na bazie zadania z 53 Olimpiady Matematycznej). Na bokach ab i ac trójkąta abc zbudowano po jego zewnętrznej stronie kwadraty $abde$ i $acfg$. Punkty p i q to środki odcinków dg i ef. Dowieść, że odcinki pq i bc są równoległe i wyznaczyć możliwe wartości stosunku ich długości. Uogólnić to na przypadek, gdy $abde$ i $acfg$ są podobnymi trapezami równoramiennymi, z odpowiadającymi sobie przy podobieństwie podstawami ab i ac.