FA, jesień 2015. Zadania domowe i wybrane z ćwiczeń, grupa 3 (prowadzący H. Toruńczyk).

Uwaga a) W każdym zadaniu można korzystać z poprzednich jego części i innych zadań, nawet, jeśli się ich nie rozwiązało.

b) Gdy nie zaznaczono inaczej, zadania są ustne – nie wymaga się oddania na piśmie. Zgłaszać można rozwiązania całych zadań lub ich części, w tym nieomawianych dotąd zadań z serii ubiegłych. (Zadania, dyskutowane już na ćwiczeniach, staram się zaznaczyć plusem.) Zadania są bardzo nierównej trudności.

Proszę się nie zrażać duża ilością zadań–najwyżej pewne z nich „spadną” na dalsze ćwiczenia. Osoby, zgłaszające rozwiązanie jakiegoś zadania, proszę też o przygotowanie jego zwięzłej prezentacji – aby na ćwiczeniach wszyscy mogli z niej skorzystać, lecz by nie zabierała nadmiernie dużo czasu. Standardowe rachunki w czasie prezentacji można pomijać, lecz powinno być jasne, co należy policzyć i co z tego wychodzi; ponadto referujący powinien sam ocenić, które rachunki (czy rozumowania) są standardowe, a które zawierają istotne pomysły, wymagające przedstawienia.

Pierwsza porcja zadań, wraz z zadaniami z ćwiczeń

Przypomnienie: $\exp z = e^z := \mathrm{e}^x(\cos y + \mathrm{i}\sin y)$ dla $z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}$. Funkcje $\cos, \sin : \mathbb{C} :\to \mathbb{C}$ zdefiniowane są tak, by funkcja cos była symetryczna, sin antysymetryczna i zachodziła równość Eulera $\exp(\mathrm{i}z) = \cos(z) + \mathrm{i}\sin(z)$. To prowadzi do definicji $\cos z = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}\right)$, $\sin z = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}\right)$. Funkcja exp jest holomorficza i $\exp' = \exp$. Stąd i z definicji wynika, że funkcje cos i sin też są holomorficzne i $\sin' = \cos, \cos' = -\sin$.

1. + a) Zachodzą równości $\exp(z_1+z_2) = \exp(z_1)\exp z_2$, $\cos(z_1+z_2) = \cos(z_1)\cos(z_2) - \sin(z_1)\sin(z_2)$, $\sin(z_1 + z_2) = \cos(z_1)\sin(z_2) + \sin(z_1)\cos(z_2)$.

b) $\cos^2 + \sin^2 = 1$, $\cos(z) = \sin(z + \frac{1}{2}\pi)$, $\sin(z) = \cos(z - \frac{1}{2}\pi)$.

c) $\cos(z_1) - \cos(z_2) = -2\sin(\frac{1}{2}(z_1 + z_2))\sin(\frac{1}{2}(z_1 - z_2))$, $\sin(z_1) - \sin(z_2) = 2\cos(\frac{1}{2}(z_1 + z_2))\sin(\frac{1}{2}(z_1 - z_2))$.

2. + a) $\exp z_1 = \exp z_2 \Leftrightarrow z_1 - z_2 \in 2\pi\mathrm{i}\mathbb{Z}$; $\cos z_1 = \cos z_2 \Leftrightarrow (z_1 - z_2 \in 2\pi\mathbb{Z}$ lub $z_1 + z_2 \in 2\pi\mathbb{Z})$, $\sin z_1 = \sin z_2 \Leftrightarrow (z_1 - z_2 \in 2\pi\mathbb{Z}$ lub $z_1 + z_2 \in \pi + 2\pi\mathbb{Z})$.

b) W szczególności, $\sin^{-1}(0) = \pi\mathbb{Z}$, $\cos^{-1}(0) = \frac{1}{2}\pi + \pi\mathbb{Z}$ (oraz $\exp^{-1}(0) = \emptyset$).

Definicja. $\cosh z := \frac{1}{2}(\mathrm{e}^z + \mathrm{e}^{-z}) = \cos(\mathrm{i}z)$, $\sinh z := \frac{1}{2}(\mathrm{e}^z - \mathrm{e}^{-z}) = -\mathrm{i}\sin(\mathrm{i}z)$.

Funcja cosh jest symetryczna, zaś sinh antysymetryczna; obie funkcje na $\mathbb{R}$ przyjmują wartości rzeczywiste, przy czym funkcja sinh jest na $\mathbb{R}$ rosnąca.

3. + a) $\cosh^2 - \sinh^2 = 1$.

b) Gdy $z = x + \mathrm{i}y$ i $x, y \in \mathbb{R}$, to $\cos z = \cos x \cosh y - \mathrm{i}\sin x \sinh y$, $\sin z = \sin x \cosh y + \mathrm{i}\cos x \sinh y$ (tu może być $x, y \in \mathbb{C}$).

c) $|\cos z|^2 = \sinh^2 y + \cos^2 x$, $|\sin z|^2 = \sinh^2 y + \sin^2 x$.

d) $|\tan z|^2 \leq 1 + \frac{1}{\sinh^2 y}$.

4. + a) Obrazem funkcji cos jest cała płaszczyzna $\mathbb{C}$, i podobnie dla sin. (Zaś obrazem funkcji exp jest $\mathbb{C}\setminus\{0\}$.)

b) Ze względu na zad. 2a), gdy J jest dowolnym przedziałem długości 2π, domkniętym z którejś strony, to obrazem pasa $\{z : \mathrm{Re}z \in J\}$ przy funkcji cos lub sin jest cała płaszczyzna $\mathbb{C}$.

c) Podobnie, obrazem pasa $\{z : \mathrm{Im}z \in J\}$ przy funkcji exp jest $\mathbb{C}\setminus\{0\}$, przy czym funkcja exp jest na tym pasie różnowartościowa.

Przypomnienie. Gdy funkcja $f = u+\mathrm{i}v$ jest określona w otoczeniu punktu $z_0 \in \mathbb{C}$, to pochodna zespolona $f'(z_0) := \lim_{h\to 0}(f(z_0+h)-f(z_0))/h$ istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje pochodna rzeczywista $df(z_0)$ i spełnione są równania Cauchy–Riemanna: $u_x = v_y,\ v_x = -u_y$. (Tu, u, v to funkcje rzeczywiste. Warunki na istnienie $df(z_0)$ daje AM II: warunek konieczny to istnienie pochodnych cząstkowych u_x, u_y, v_x, v_y w punkcie z_0, a wystarczający – to istnienie i ciągłość tych pochodnych w otoczeniu punktu z_0.)

Ponadto, gdy $f'(z_0)$ istnieje, to $f'(z_0) = p + \mathrm{i}q$, gdzie $p := u_x(z_0) = v_y(z_0)$ i $q := v_x(z_0) = -u_y(z_0)$.

5. + Wyznaczyć zbiór $\{z :\ \text{istnieje } f'(z)\}$, gdy dla $z = x + \mathrm{i}y$ i $x, y \in \mathbb{R}$ zachodzi

a) $f(x + \mathrm{i}y) := x\mathrm{e}^y + \mathrm{i}y\mathrm{e}^x$.

b) $f(x + \mathrm{i}y) = x^2y + \mathrm{i}xy^2$.

c) $f(z) = z\mathrm{Re}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z})$.

6. + Niech $z_0 \in U \subset \mathbb{C}$, gdzie U jest zbiorem otwartym. Dla funkcji $f : U \to \mathbb{C}$ dowieść, że gdy istnieje pochodna $f'(z_0)$, to istnieje i pochodna funkcji $g(z){:=}\overline{f(\overline{z})}$ w punkcie $\overline{z_0}$.

7. + Niech f będzie funkcją holomorficzną w zbiorze otwartym U. Na wykładzie zostanie udowodnione, że funkcje $u = \mathrm{Re}f, v = \mathrm{Im}f$ mają pochodne cząstkowe dowolnego rzędu w każdym punkcie $z \in U$. Przyjmując to dowieść, że u jest funkcją harmoniczną, tzn. $u_{xx} + u_{yy} = 0$, i podobnie v.

8. Fragmenty zadania 21 w §1.1 u Krzyża: podać interpretację geometryczną zbiorów liczb zespolonych: a) $\{z : \mathrm{Re}(\mathbf{i}z) \in [0, 1)\}$, b) $\{z : \mathrm{Re}(z^2) > c\}$, gdzie $c > 0$; c) $\{z : |z| + \mathrm{Re}z \le 1\}$.

9. Dowieść, że gdy $\mathrm{Re}u < 0$ i $\mathrm{Re}v < 0$, to $|u - v| < |u + \overline{v}|$. (Zaleźć dowód analityczny i geometryczny.)

10. a) $\tan z_1 = \tan z_2 \Leftrightarrow z_1 - z_2 \in \pi\mathbb{Z}$.

b) $\tan(z_1) - \tan(z_2) = \sin(z_1 - z_2)/\cos(z_1)\cos(z_2)$.

11. + Dowieść, że gdy $|p| = P < 1$ i $|q| = Q < 1$, to $\frac{|P-Q|}{1-PQ} \le \frac{|p-q|}{|1-\overline{p}q|} \le \frac{P+Q}{1+PQ}$. (Wskazówka: mnożąc p i q przez liczbę P/p sprowadzić zadanie do przypadku, gdy $p = P$ i $q = Q(\cos\varphi + \mathbf{i}\sin\varphi)$. Wyrazić kwadrat środkowego członu nierówności jako funkcję zmiennej φ i dowieść, że ma ona ekstrema tylko gdy $\sin\varphi = 0$.)

12. Dla $z_1, ..., z_k \in \mathbb{C}$ jest $|\prod_n(1+z_n) - 1| \leq \prod_n(1+|z_n|) - 1 \leq \exp(\sum_n |z_n|) - 1$.

13. (rozwiązano dla kwadratów; na bazie zadania z 53 Olimpiady Matematycznej). Na bokach ab i ac trójkąta abc zbudowano po jego zewnętrznej stronie kwadraty $abde$ i $acfg$. Punkty p i q to środki odcinków dg i ef. Dowieść, że odcinki pq i bc są równoległe i wyznaczyć możliwe wartości stosunku ich długości. Uogólnić to na przypadek, gdy $abde$ i $acfg$ są podobnymi trapezami równoramiennymi, z odpowiadającymi sobie przy podobieństwie podstawami ab i ac.

14. Dany jest wielomian zespolony $f(z) = c\prod_{j=1}^{n}(z - z_j)$.

a) Udowodnić, że gdy $f(w) \neq 0$, to $f'(w)/f(w) = \sum_j 1/(w - z_j)$, wobec czego jeśli ponadto $f'(w) = 0$, to $\sum_j (w - z_j)/|w - z_j|^2 = 0$.

b) Wywnioskować, że każde zero w wielomianu f' jest postaci $w = \sum_j t_j z_j$ dla pewnych $t_1, ..., t_n \geq 0$ takich, że $\sum_j t_j = 1$, tzn. należy do powłoki wypukłej zbioru zer wielomianu f. (Jest to **twierdzenie Gaussa-Lucasa**; można też uzyskać, by $t_j \neq 0$ tylko dla ≤ 3 wartości j, na podstawie znanego twierdzenia Radona.)

Druga porcja zadań

1. + Znaleźć obraz funkcji $\tan : \mathbb{C} \setminus \pi\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$.

2. + Wyznaczyć $(1 - \mathbf{i})^{3\mathbf{i}}$ i $\mathbf{i}^{4\mathbf{i}} - (\mathbf{i}^4)^{\mathbf{i}}$.

3. Niech $f : U \to \mathbb{C}$ będzie funkcją na zbiorze otwartym $U \subset \mathbb{C}$, mającą w punkcie $z_0 \in U$ pochodną w sensie rzeczywistym. Udowodnić, że jeśli istnieje granica $\lim_{h\to 0} |f(z_0 + h) - f(z_0)|/|h|$, to f lub $\overline{f}$ ma w z_0 pochodną w sensie zespolonym. (Wskazówka: zbadać wpierw funkcje $\mathbb{R}$–liniowe $f(h_1, h_2) = (ah_1 + bh_2, ch_1 + dh_2)$, gdzie $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.)

4. Niech $f(z) = z\exp(iz)$ i $F(z) = (1 - \mathbf{i}z)\exp(\mathbf{i}z)$.

a) Wyznaczyć $\int_{[\pi,-\mathbf{i}]} f(z)dz$ i $\int_{[\pi,-\mathbf{i}]} \overline{f}(z)dz$.

b) Sprawdzic, że $F' = f$ i $\int_{[\pi,-\mathbf{i}]} f(z)dz = F(-\mathbf{i}) - F(\pi)$.

5. + a) Dowieść, że $\mathrm{Re}((1 + \mathbf{i}z)/(1 - \mathbf{i}z)) > 0$ gdy $|z| < 1$.

b) Dowieść, że w kole $|z| < 1$ funkcja $\frac{1}{2\mathbf{i}}\mathrm{Log}((1 + \mathbf{i}z)/(1 - \mathbf{i}z))$ jest poprawnie określoną gałęzią funkcji $\arctan$, tzn. jest w tym kole ciągła i spełnia równanie $\tan f(z) = z$.

6. a) Sprawdzić, że w dziedzinie zespolonej pozostaje prawdziwy wzór Abela na sumowanie przez części i kryterium zbieżności Dirichleta, znane z AM I dla ciągów rzeczywistych, tzn. gdy (z_j) i (w_j) są ciągami liczb zespolonych i $s_n := \sum_{j=0}^{n} z_j$, to dla $1 \leq k \leq l$ zachodzi równość $\sum_{n=k}^{l} z_n w_n = \sum_{n=k}^{l-1} s_n(w_n - w_{n+1}) + s_l w_l - s_{l-1} w_l$, oraz gdy ciąg w_n jest rzeczywisty, nierosnący i zbiega do 0, to z ograniczoności ciągu sum cząstkowych (s_n) wynika zbieżność szeregu $\sum_n z_n w_n$.

b) Dowieść, że szereg $\sum_n z^n/n$ jest rozbieżny dla $z = 1$, lecz zbieżny we wszystkich pozostałych punktach okręgu $|z| = 1$; natomiast szereg $\sum_n z^{4n}/4n$ jest rozbieżny gdy $z = \pm 1, \pm \mathbf{i}$, lecz jest zbieżny w pozostałych punktach okręgu. (Wskazówka: a) i wzór na sumę postępu geometrycznego.)

7. + a) Dowieść, że gdy $f : [z_1, z_2] \to \mathbb{C}$ jest funkcją ciągłą, to $\frac{1}{z_2 - z_1} \int_{[z_1,z_2]} f(z)dz \in \overline{\mathrm{conv}} f([z_1, z_2])$, wobec czego istnieją $w_1, w_2, w_3 \in f([z_1, z_2])$ takie, że $\frac{1}{z_2 - z_1} \int_{[z_1,z_2]} f(z)dz \in \mathrm{conv}\{w_1, w_2, w_3\}$. (Wskazówka: przedstawić całkę jako granicę sum czątkowych. Skorzystać z twierdzenia Radona, por. zadanie 14b) w serii 1.)

Trzecia porcja zadań

1. + a) Dowieść w oparciu o zadanie 7 z serii 2, że jeśli U jest zbiorem wypukłym, to funkcja holomorficzna $F : U \to \mathbb{C}$, spełniająca warunek $\mathrm{Re}(F'(z)) > 0$ dla każdego punktu $z \in U$, jest różnowartościowa. (Proszę bez dowodu przyjąć ciągłość funkcji F'.)

b) Wywnioskować, że funkcja $z + e^z$ jest różnowartościowa w $\{z : \mathrm{Re}(z) < 0\}$.

2. a) Dowieść, że gdy f jest funkcją ciągła na odcinku $[w_1, w_2] \subset \mathbb{C}$, to dla pewnego $w \in \mathbb{C}$ liczby $\int_{[w_1,w_2]} f(z)dz/w$ i $\int_{[w_1,w_2]} \overline{f}(z)dz/w$ są sprzężone. Znaleźć w dla odcinka i funkcji f wziętych z zadania 4a) w serii 2.

b) Półokręgi $L_r^+ = \{z : |z| = r, \mathrm{Im}z \geq 0\}$ i $L_r^- = \{z : |z| = r, \mathrm{Im}z \leq 0\}$ orientujemy zgodnie ze standardową orientacją okręgu $|z| = r$. Dowieść, że $\int_{\partial L_r^-} \frac{exp(iz)}{z} dz = \int_{\partial L_r^+} \frac{exp(-iz)}{z} dz$.

3. a) + Dowieść, że $\mathrm{Log}(1 + z) = \int_{[0,z]} \frac{dw}{1+w}$ dla $z \notin (-\infty, 1]$.

b) * Dowieść, że gdy $|z| < 1/2$, to $|z|/\sqrt{3} \leq |\mathrm{Log}(1 + z)| \leq 2|z| \ln 2$. (Wskazówka, dotycząca lewej nierówności: $|\int_0^1 \frac{dt}{1+tz}| \geq \int_0^1 \mathrm{Re}\frac{1}{1+tz} dt = \int_0^1 \frac{1}{|1+tz|} \mathrm{Re}\frac{1+t\overline{z}}{|1+t\overline{z}|} dt$; dalszą część oprzeć na zadaniu 7 w serii 4 (pomocniczym).)

Wskazówka dotycząca poniższych dwóch zadań: oszacowanie $|\int_\gamma f(z)dz| \leq \ell(\gamma) \cdot \sup\{|f(z)| : z \in \mathrm{im}(\gamma)\}$

4. + Niech $A \subset \mathbb{R}_+$ i dla $r \in A$ niech L_r będzie pewnym łukiem okręgu $\{z : |z| = r\}$. Dowieść, że gdy funkcja f jest określona i ciągła na zbiorze U zawierającym wszystkie te łuki i spełnia warunek $|f(z)| \leq M/|z|^\alpha$, dla pewnych $M < \infty$, $\alpha > 1$ i wszystkich $z \in U$, to $\lim_{r\to\infty, r\in A} \int_{L_r} f(z)dz = 0$. [1]

5. Dowieść tej samej tezy, gdy $U \subset \{z : \mathrm{Im}z \geq 0\}$ i dla pewnego $a > 0$ zachodzi $f(z)e^{-a\mathbf{i}z} \to 0$ gdy $z \to \infty$ (tzn. gdy $|z| \to \infty$) poprzez punkty $z \in U$.

Wskazówka: Niech $\varphi(r) = \sup\{|f(z)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}az}| : z \in L_r\}$ Zauważyć, że dla $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}at} \in$

[1] Zadania 4 i 5 były sformułowane dla $\alpha = 2$ i $a = 1$, odpowiednio, lecz rozwiązania wymagają b. małych zmian.

L_r zachodzi $|f(z)| \leq \varphi(r)\mathrm{e}^{-r\sin at}$; w szacowaniu całki $\int_0^\pi \mathrm{e}^{-r\sin at}dt$ skorzystać z tego, że punkt $(t, \sin t)$ wykresu funkcji sin leży dla $t \in [0, \pi/2]$ nad prostą przechodzącą przez punkty $(0,0)$ i $(\pi/2, 1)$.

6. * (Twierdzenie Abela o ciągłości.) Niech szereg zespolony $\sum_{n=0}^\infty c_n$ będzie zbieżny. a) Dowieść, że funkcja $f(z) = \sum_n c_n z^n$ jest określona w kole $|z| < 1$.

b) Dla każdego $d > 0$ dowieść, że $f(z)$ dąży do $\sum_n c_n$ gdy z dąży do jedynki, pozostając w zbiorze $K_d := \{z : |z| + d|1-z| < 1\}$.

c) Dowieść, że każdy trójkąt otwarty o wierzchołkach $a, 1, b$, gdzie $|a| = |b| = 1$, jest zawarty w K_d dla pewnego $d > 0$.

(Wskazówka do b): przyjąć $s_k := \sum_{n=0}^k c_n$, $s = \sum_{n=0}^\infty c_n = f(1)$ i dla $|z| < 1$ dowieść bezpośrednio lub korzystając z zadania 6a) w serii 2, że $f(z) = (1-z)\sum_{n=0}^\infty s_n z^n$ i $f(z) - s = (1-z)\sum_{n=0}^\infty (s_n - s)z^n$. Dla odpowiednio dużego N oszacować $|\sum_{n=N}^\infty (s_n - s)z^n|$ przez $\epsilon/(1-|z|)$.)

Czwarta porcja zadań.

Uwaga: w zadaniu 3 poprzedniej serii wzmocniłem tezę i zmieniłem wskazówkę.

Przypomnienie twierdzeń z wykładu:

A. (Twierdzenie Cauchy'ego.) Gdy funkcja f jest holomorficzna w zbiorze U, a pętle γ_1 i γ_2 przebiegają w U i są w U homotopijne (jako pętle), to $\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\gamma_2} f(z)dz$.

B. (Wzory całkowe Cauchy'ego.) Gdy $W \subset \mathbb{C}$ jest zwartym zbiorem wypukłym z kawałkami gładkim brzegiem ∂W (który orientujemy dodatnio), a funkcja f jest holomorficzna w pewnym zbiorze otwartym, zawierającym W, to dla $n = 0, 1, 2, \ldots$ i $w \in W \setminus \partial W$ ma miejsce równość $f^{(n)}(w) = \frac{n!}{2\pi\mathbf{i}}\int_{\partial W}\frac{f(z)}{(z-w)^{n+1}}dz$. (Wzory te zostały na wykładzie sformułowane dla dysków $W = \{z : |z-p| \leq r\}$.)

Zadania dotyczące wzorów całkowych i twierdzenia Cauchy'ego.

0 $^+$ (Rozwiązano na ćwiczeniach.) Niech γ będzie kawałkami liniową parametryzacją łamanej $[w_0, w_1, w_2, w_3, w_4, w_0]$, gdzie $w_0 = 0, w_1 = 2, w_2 = \mathbf{i}, w_3 = 2 + 2\mathbf{i}, w_4 = -2\mathbf{i}$. Znaleźć $\int_\gamma \frac{e^{2z}}{z-z_0}dz$, gdy a) $z_0 = \frac{1}{2} - \frac{\mathbf{i}}{3}$, b) $z_0 = \frac{1}{2} + \frac{5\mathbf{i}}{8}$, c) $z_0 = \frac{1}{2} + \mathbf{i}$.

1. $+$ Niech γ będzie kawałkami liniową parametryzacją łamanej $[w_0, w_1, w_2, w_3, w_0]$, gdzie $w_0 = 2, w_1 = -2 + 4\mathbf{i}, w_2 = \frac{1}{2} + 4\mathbf{i}, w_3 = \frac{1}{2} - 3\mathbf{i}$. Znaleźć $\int_\gamma \frac{(\mathrm{Log}(z))^3}{(z-z_0)^2}dz$, gdy a) $z_0 = 3\mathbf{i}$, b) $z_0 = \mathbf{i}$, c) $z_0 = 1 - \mathbf{i}$.

2. $+$ Obliczyć $\int_\Gamma f(z)\mathrm{d}z$, gdy $f(z) = \frac{e^{\pi z}}{1+z^2}$ i Γ jest zorientowanym dodatnio:

a) okręgiem o środku w $1 + \mathbf{i}$ i promieniu $3/2$ (wskazówka: wzór Cauchy'ego, przy przedstawieniu $1 + z^2$ jako $(z+\mathbf{i})(z-\mathbf{i})$);

b) brzegiem prostokąta o wierzchołkach $-1/2 - 2\mathbf{i}, 1 - 2\mathbf{i}, 1 + 2\mathbf{i}, -1/2 + 2\mathbf{i}$. (Wskazówka: jak wyżej, lecz rozbić prostokąt na dwa, każdy zawierający tylko jedą z liczb

$\pm\mathbf{i}$.)

3. + Niech f będzie funkcją holomorficzną w dysku $D = \{z : |z| < 1\}$, taką, że $|f(z)| < 1/(1-|z|)$ dla $z \in D$. Dowieść, że $|f^{(n)}(0)| \leq (1+\frac{1}{n})^n(n+1)!$.

4. * Niech $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ będzie funkcją holomorficzną i niech $n \in \{0, 1, ...\}$. Dowieść, że jeśli funkcja $f(z)/z^n$ jest ograniczona w $\{z : |z| \geq 1\}$, to f jest wielomianem stopnia $\leq n$. (Przypadek $n = 0$ tego zadania to tzw. twierdzenie Liouville'a. Wskazówka: dowieść, że $f^{(n+1)}$ jest funkcją zerową, korzystając ze wzorów Cauchy'ego i zadania 4 w serii 3.)

5. Niech $f(z) := \exp(\mathbf{i}z^2)$.

a) Wyrazić $\int_{[0,R]} f(z)dz$ i $\int_{[0,R+\mathbf{i}R]} f(z)dz$ jawnie przez całki funkcji rzeczywistych.

b) Dowieść, że $\lim_{R\to\infty} \int_{[R,R+\mathbf{i}R]} f(z)dz = 0$.

c) Wyznaczyć $\int_0^\infty \cos(t^2)dt$ i $\int_0^\infty \sin(t^2)dt$. (Wskazówka: na podstawie twierdzenia Cauchy'ego, $\int_{\gamma_R} f(z)dz = 0$ dla $R > 0$, gdzie γ_R to łamana $[0, R, R+\mathbf{i}R, 0]$. Skorzystać z a), b) i z tego, że całka Gaussa $\int_0^\infty \exp(-t^2)dt$ istnieje i wynosi $\sqrt{\pi}/2$.)

6. Dowieść, że gdy $f = g/h$, gdzie g i h są wielomianami i $\deg h > \deg g + 1$, to $\int_{\partial D} f(z)dz = 0$ dla każdego dysku D, zawierającego wszystkie zera wielomianu h. (Wskazówka: gdy D i D' są dwoma takimi dyskami, to $\int_{\partial D} f(z)dz = \int_{\partial D'} f(z)dz$ na podstawie twierdzenia Cauchy'ego. Przyjąć więc $D' = \{z : |z| < R\}$ i dla dużych R skorzystać z zadania 4 w serii 3.)

<u>Zadanie dotyczące wcześniejszego materiału.</u>

7. Niech w będzie punktem koła $|w-1| \leq 1/2$. Dowieść, że $|w| \leq 3/2$ i $\mathrm{Re}\frac{w}{|w|} \geq \sqrt{3}/2$. (Wskazówka: $\mathrm{Re}\frac{w}{|w|} = \cos\alpha$, gdzie $\alpha = \angle(1, 0, w)$.)

<u>Piąta i szósta porcja zadań.</u>

Daję więcej zadań, bo jest więcej czasu na nie. Zadania 1-6 dotyczą zasady maksimum, którą przypominam niżej, a na wykładzie pojawiła się 9 XI. Kto nie chce rozwiązywać tych zadań, bo na ćwiczeniach nie mieliśmy jeszcze możliwości zasady omówić, to może rozwiązywać zadania pozostałe, dotyczące wcześniejszego materiału.

<u>Przypomnienie</u> (zasada maksimum dla funkcji holomorficzych): <u>moduł</u> niestałej funkcji holomorficznej, określonej w obszarze (tzn. zbiorze otwartym i spójnym), nie przyjmuje w nim wartości największej.

<u>Zadania dotyczące zasady maksimum.</u>

1. + a) Dla funkcji holomorficznej $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ przyjmimy $M(r) := \sup\{|f(z)| : |z| = r\}$. Dowieść, jeśli f nie jest stała i $r < s$, to $M(r) < M(s)$.

b) Niech p będzie wielomianem stopnia $n > 0$ i niech $M(r) := \sup\{|p(z)| : |z| = r\}$.

Dowieść, że $M(r)/r^n > M(s)/s^n$ gdy $r < s$. (Wskazówka: zauważyć, że $z^n p(1/z)$ można z $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ przedłużyć na $\mathbb{C}$ do funkcji holomorficznej (wielomianowej); zastosować a).)

2. + Dowieść, że na okręgu $|z| = 1$ istnieje punkt, którego iloczyn odległości od danych punktów $z_1, ..., z_n$ tego okręgu jest większy od 1.

3. + Dowieść, że moduł niestałej funkcji holomorficznej, określonej w obszarze, osiąga minima tylko w swych miejscach zerowych (jeśli je ma).

4. + Niech $p(z) = a_0 + a_1 z + ... + a_n z^n$, gdzie $n > 0$ i $a_n \neq 0$.

a) Dowieść, że dla dostatecznie dużych r funkcja $|p|$ przyjmuje na okręgu $|z| = r$ tylko wartości większe niż $|p(0)|$ i wynioskować, że p ma miejsce zerowe w $\{z : |z| < r\}$.

b) Dać własną ilościową wykładnię zwrotu „dostatecznie dużych r", wyrażoną przez współczynniki $a_0, ..., a_n$. (Mogą być różne wykładnie.)

5. a) Dowieść, że część rzeczywista funkcji holomorficznej, określonej w obszarze, nie przyjmuje w nim wartości największej ani najmniejszej.

b) Dowieść, że tak samo jest dla części urojonej.

6. Niech U będzie ograniczonym obszarem w $\mathbb{C}$ i niech niestała funkcja ciągła $f : \overline{U} \to \mathbb{C}$ będzie holomorficzna w U. Dowieść, że:

a) + Istnieje pukt $z_0 \in \overline{U} \setminus U$ taki, że $|f(z_0)| > |f(z)|$ dla wszystkich $z \in U$.

b) + $0 \in f(U)$ lub istnieje pukt $z_0 \in \overline{U} \setminus U$ taki, że $|f(z_0)| < |f(z)|$ dla $z \in U$.

c) Jeśli funkcja $|f|$ jest stała na brzegu $\overline{U} \setminus U$ zbioru U, to $0 \in f(U)$.

<u>Zadania dotyczące wcześniejszego materiału.</u>

7. a) Dowieść, że iloczyn odległości punktu $p \in \mathbb{C}$ od wierzchołków n–kąta foremnego, wpisanego w okrąg $|z| = r$ i mającego r jako jeden ze swych wierzchołków, jest równy $|p^n - r^n|$. (Jest to bliskie twierdzeniu Cotesa, nauczyciela Newtona.)

b) Dowieść, że dla funkcji ciągłej f, określonej na $S = \{z : |z| = r\}$, zachodzi równość $\int_S \frac{f(z)}{z} dz = 2\pi\mathbf{i} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{w \in W_n} f(w)$, gdzie W_n to opisany w a) zbiór wierzchołków.

c) Wyznaczyć $\int_S \frac{1}{z} \ln|p - z| dz$ dla $p \notin S$. (Okrąg S orientujemy dodatnio.)

d) Dowieść, że jeśli $g = e^f$ dla pewnej funkcji f, holomorficznej w otoczeniu koła $|z| \leq r$, to $|g(0)| = \lim_{n\to\infty} \prod_{n \in W_n} |g(w)|^{1/n}$. (Wskazówka: do odpowiedniej funkcji zastosować b) i wzór całkowy.)

8. + Udowodnić, że jeśli obie funkcje $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ i $\overline{f}$ mają w punkcie z_0 pochodną, to $f'(z_0) = 0$.

9. a) Dla gładkiej drogi $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ i $c, d, t_0 \in [a, b]$ dowieść, że $|\gamma(d) - \gamma(c)| \leq |c-d| \cdot \sup_{t\in[c,d]} |\gamma'(t)|$ i $|\gamma(d) - \gamma(c) - \gamma'(t_0)(d - c)| \leq |d-c| \cdot \sup_{t\in[c,d]} |\gamma'(t) - \gamma'(t_0)|$. (Wskazówka: nierówność $|\int_\lambda f(z)dz| \leq \ell(\lambda) \cdot \sup|f \circ \lambda|$, zastosowana do $\lambda := \gamma'$ i

$f(z) := z$; drugą nierówność uzyskać z pierwszej, zmieniając drogę.)

b) Wywnioskować, że $|\gamma(d)-\gamma(c)| \geq |d-c|\big(|\gamma'(t_0) - \sup_{t\in[c,d]}|\gamma'(t)-\gamma'(t_0)|\big)|$, skąd istnieje $\delta>0$, zależne tylko od γ i takie, że $\gamma(d)\neq\gamma(c)$ jeśli $0<|c-d|<\delta$. (Uwaga: zakładamy, że $\gamma'(t)\neq 0$ dla $t\in[a,b]$.)

10. Dowieść, że gdy $f\in H(U)$ i $[p,q]\subset U$, to $|f(p)-f(q)|\leq|p-q|\cdot\sup_{z\in[p,q]}|f'(z|$, skąd $|f(p)-f(q)-f'(z_0)(p-q)|\leq|p-q|\cdot\sup_{z\in[p,q]}|f'(z)-f'(z_0)|$ dla $z_0\in U$.

11. a) Korzystając z tożsamości $\frac{1}{1+w}=1-w+...+(-1)^{n-1}w^{n-1}+(-1)^n\frac{w^n}{1+w}$ dowieść, że gdy $|z|\leq 1$ i $z\neq -1$, to $\int_{[0,z]}\frac{1}{1+w}dw = z-\frac{1}{2}z^2+...+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}z^n+R_n(z)$, gdzie $\lim_{n\to\infty}R_n(z)=0$.

b) Wywnioskować, że dla tych z szereg $z-\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{3}z^3...$ jest zbieżny, a jego sumą jest $\mathrm{Log}(1+z)$. (Por. zadanie 3.3a).)

12. Dla $t\in(-\pi,\pi)$ dowieść, że $\mathrm{Im}(\mathrm{Log}(1+e^{it}))=\mathbf{i}t/2$, skąd w oparciu o poprzednie zadanie uzyskać równość $t/2=\sin t-\frac{1}{2}\sin(2t)+\frac{1}{3}\sin(3t)-....$ (Wskazówka: niech $\mathrm{Log}(1+e^{it})=a+x\mathbf{i}$; dowieść, że $\tan(x)=\sin(t)/(1+\cos t)$ i poszperać we wzorach trygonometrycznych.)

Siódma porcja zadań.

a) Proszę sprawdzić, czy plusy, oznaczające omawiane już zadania, są wpisane w odpowiednich miejscach. Będę wdzięczny za zgłaszenie na ćwiczeniach możliwych omyłek. (Zwłaszcza osoby, ktore dane zadanie rozwiązywały, proszone są o sprawdzenie, czy oznaczyłem je plusem.)

b) Proszę na początku ćwiczeń zgłaszać rozwiązania wszystkich przemyślanych zadań „bezplusowych" (nie tylko z bieżącej serii). Zgłaszać można też rozwiązania pewnych części zadań.

c) Proszę też wtedy zgłaszać postulaty omówienia pewnych zadań, np. takich, nad którymi się bezskutecznie zastanawiano czy których rozwiązań nie jest się pewnym.

d) Bardzo zachęcam do rozwiązywania zadań i zgłaszanie gotowości ich omówienia – jest lepiej, jeśli przemyślenie materiału czy uświadomienia własnych błędów następuje przed jakimikolwiek sprawdzianami (kolokwium czy egzaminem)...

1. + a) Dowieść, że gdy funkcja f jest holomorficzna w otoczeniu koła $|z-z_0|\leq r$, to zachodzi równość Gaussa o wartości średniej: $f(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(z_0+r\mathrm{e}^{\mathbf{i}t})\mathrm{d}t$.

b) Wyznaczyć $\int_0^{2\pi}\sin^3(3\mathrm{e}^{\mathbf{i}t}+\frac{1}{4}\pi)\mathrm{d}t$.

2. a) Przy założeniach części a) zadania 1 dowieść, że jeśli $|\int_0^{2\pi}f(z_0+r\mathrm{e}^{it})\mathrm{d}t| = \int_0^{2\pi}|f(z_0+r\mathrm{e}^{it})|\mathrm{d}t$, to funkcja f jest stała na kole $|z-z_0|\leq r$.

b) * Niech U będzie zbiorem otwartym w $\mathbb{C}$, a funkcje holomorficzne $f_1,...,f_n$: $U\to\mathbb{C}$ będą takie, że $\sum_{j=1}^n|f_j|$ osiąga lokalne maksimum w pewnym punkcie $z_0\in U$.

Dowieść, że wszystkie funkcje f_j są stałe na pewnym otoczeniu punktu z_0, a przy dodatkowym założeniu spójności U są stałe na U.

3. + Ponownie, niech funkcja f będzie holomorficzna w otoczeniu domkniętego koła $D \subset \mathbb{C}$. Dowieść, że jeśli $f(\partial D) \subset \mathbb{R}$, to funkcja $f_{|D}$ jest stała.

4. + Niech funkcja f będzie holomorficzna w otoczeniu U koła $|z| \leq r$ i niech $M := \sup_{|z|=r} |f(z)|$. Dowieść, że jeśli $f(0) \neq 0$, to liczba miejsc zerowych funkcji f w kole $|z| \leq r/3$ nie przekracza $\log_2(M/|f(0)|)$.

(Wskazówka: oznaczmy te miejsca zerowe przez $z_1, ..., z_n$; na wykładzie będzie udowodnione, że jest ich skończenie wiele i $f(z) = g(z)\prod_{j=1}^{n}(z - z_j)^{k_j}$ dla pewnych $k_1, ..., k_n \geq 1$ i funkcji g, holomorficznej w U i nie zerującej się w kole $|z| \leq r/3$. Przyjmując to zauważyć, że $|f(0)| \leq |g(0)|(r/3)^k$, gdzie $k = \sum_j k_j$; zastosować zasadę maksimum do g.)

5. Niech funkcja f, określona i ciągła w połpłaszczyźnie $H = \{z : \mathrm{Im} z \geq 0\}$ i holomorficzna w jej wnętrzu, spełnia warunek $|f(z)| \leq M/|z|^\alpha$ dla pewnych $M, \alpha > 0$ i wszystkich $z \in H$. W oparciu o zadanie 3.4 dowieść, że dla dowolnego z_0 z wnętrza półpłaszczyzny, całka $\int_\infty^\infty \frac{f(t)}{t-z_0}\mathrm{d}t$ istnieje i jest równa $2\pi\mathbf{i}f(z_0)$.

6. a) Dowieść, że $\int_a^b \exp(-x^2)(\cos(Cx)+\mathbf{i}\sin(Cx))dx = \exp(-C^2/4)\int_{[p,q]} \exp(-w^2)dw$, gdzie $p = a + \mathbf{i}C/2, q = b + \mathbf{i}C/2$.

b) Przy tych oznaczeniach dowieść, że $\int_{[a,b]} \exp(-w^2)dw - \int_{[p,q]} \exp(-w^2)dw \to 0$ gdy $a \to -\infty, b \to \infty$. (Wskazówka: rozważyć całkę po łamanej $[a, b, q, p]$.)

c) Dowieść istnienia całki $\int_{-\infty}^\infty \exp(-x^2)\cos(Cx)dx$ i wyznaczyć ją.

7. a) W oparciu o materiał z wykładu dowieść, że funkcje $(\exp(z) - 1)/z$ i $\sin(z)/z$ można z $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ przedłużyć do funkcji holomorficznych w całej płaszczyźnie $\mathbb{C}$.

b) Niech $L_r^+ = \{z : |z| = r \ \text{ i } \mathrm{Im} z \geq 0\}$ i $L_r^- = \{z : |z| = r \ \text{ i } \mathrm{Im} z \leq 0\}$. Dowieść istnienia i wyznaczyć $\lim_{r\to\infty} \int_{S_r} \frac{1}{z}(\exp(\mathbf{i}z) - 1)\mathrm{d}z$, dla S_r oznaczającego kolejno okrąg $L_r^+ \cup L_r^-$, z dodatnią orientacją, i łuki L_r^+ i L_r^-, z orientacją dziedziczoną z okręgu. (Wskazówka: w przypadku $S_r = L_r^+$ skorzystać z zadania 3.5.)

c) Wywnioskować, że $\lim_{r\to\infty} \int_{L_r^-} \frac{\sin(z)}{z}\mathrm{d}z = \pi$ oraz $\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\mathrm{d}x = \pi/2$. (Wskazówka: zadanie 3.2b).)

Ósma porcja zadań.

Wywieszam obok zadania z ubiegłorocznego kolokwium; możemy niektóre z nich przedyskutować na ćwiczeniach. Proszę też przejrzeć i starać się przemyśleć wcześniejsze nieomawiane jeszcze zadania.

Poniższe zadanie 1 powinno uporządkować rozwiązanie zadania 2 z serii 7.

1. Niech ograniczone funkcje $\varphi, \varphi_1, \varphi_2 : [a, b] \to \mathbb{C}$ mają tylko skończenie wiele punktów nieciągłości. Dowieść, że (piszę niżej $\int_a^b f$ zamiast $\int_a^b f(t)dt$ dla $f : [a,b] \to \mathbb{C}$):

a) Jeśli $|\int_a^b \varphi| = \int_a^b |\varphi|$, to $\varphi = z \cdot u$ dla pewnej liczby zespolonej z i funkcji $u : [a,b] \to [0,\infty)$. (Wskazówka: dowód z wykładu, że $|\int_a^b \varphi(t)dt| \leq \int_a^b |\varphi(t)|dt$.)

b) Jeśli $|\int_a^b (\varphi_1 + \varphi_2)| = \int_a^b (|\varphi_1| + |\varphi_2|)$, to φ_1 i φ_2 przyjmują wartości w pewnej wspólnej półprostej o początku w 0. Uogólnić na przypadek większej liczby funkcji.

2. Niech $f_n : U \to \mathbb{C}$ dla $n \geq 1$. Szereg $\sum_n f_n$ nazwiemy **niemal normowo zbieżnym**, jeśli dla każdego zbioru zwartego $K \subset U$ szereg $\sum_n \|f_n\|_K$ jest zbieżny. Dowieść, że z niemal normowej zbieżności szeregu wynika, że jest on zbieżny niemal jednostajnie.

3. Niech $f_0(z) = z$ i $f_{n+1} = f_n(f_n + 1)/2$ dla $n \geq 0$. Dowieść, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ jest w dysku $|z| < 1$ zbieżny niemal normowo. (Wskazówka: zwarty podzbiór rozważanego dysku jest podzbiorem pewnego koła $|z| \leq r$, gdzie $r < 1$.)

4. Dowieść, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \cos(nz)$ jest w pasie $|\mathrm{Im} z| < \ln 2$ zbieżny niemal normowo, lecz nie jest w nim zbieżny jednostajnie.

5. Dowieść, że nie istnieje funkcja holomorficzna f, określona w otoczeniu zera i taka, że dla nieskończenie wielu n ma miejce równość a) $f(1/n) = f(-1/n) = \sin(1/n)$, lub b) $f(1/n) = \exp(-n)$.

Dziewiąta porcja zadań.

1. Niech U i V będą zbiorami otwartymi w $\mathbb{C}$. Dowieść, że gdy ciąg funkcji ciągłych $f_n : U \to V$ jest niemal jednostajnie zbieżny, to własność tę ma też ciąg złożeń $g \circ f_n$ (odp. $f_n \circ h$), dla każdych funkcji ciągłych $g : V \to \mathbb{C}$ i $h : U \to V$.

2. Niech $K = \{z : |z| \leq 1\}$, i $g(z) = 1/z$ dla $z \in \partial K$. Dowieść, że:

a) Dla każdej funkcji f, holomorficznej w otoczeniu koła K, ma miejsce nierówność $\|f - g\|_{\partial K} \geq 1$. (Wskazówka: zbadać $\int_{\partial K} f(z)dz - \int_{\partial K} g(z)dz$.)

b) Nie istnieje ciąg wielomianów, jednoznacznie zbieżny na ∂K do g.

3. Niech funkcja f będzie holomorficzna w dysku $|z| < 1$ i spełnia warunek $f(1/n) \in \mathbb{R}$ dla nieskończenie wielu n. Dowieść, że $f(\overline{z}) = \overline{f(z)}$ dla z z tego dysku. (Wskazówka: zadanie 1.6 i zasada identyczności.)

4. Rozwinąć funkcję f w szereg Taylora wokół z_0 i zbadać szereg zbieżności tego szeregu gdy a) $f(z) = \frac{1}{a+z}$, $z_0 = 0$, b) $f(z) = \frac{1}{\mathbf{i}+z}$, $z_0 = 1$, c) $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$, $z_0 = 1$.

5. a) Dowieść, że $|\exp(w) - 1| < 2|w|$ i $|\mathrm{Log}(1 + w) - w| < 2|w|^2$ dla w dostatecznie blskich 0.

b) Dowieść, że ciąg funkcji $f_n(z) = (1 + \frac{z}{n})^n$ jest w $\mathbb{C}$ niemal jednostajnie zbieżny do funkcji exp. (Wskazówka: dla zadanego zbioru zwartego K dowieść, że dla prawie wszystkich n funkcje $\mathrm{Log} \circ (f_{n|K})$ są poprawnie określone i tworzą ciąg jednostajnie zbieżny do $id_{|K}$. Skorzystać z zadania 1.)

Dziesiąta porcja zadań. (Jest tylko jedno zadanie, ale w 4 częściach i dotyczące zagadnienia sprawiającego trudności.)

1. Wyznaczyć liczbę pierwiastków wielomianu f w półpłaszczyźnie $\mathrm{Re} z \geq 0$ (liczonych z krotnościami) , gdy

a) $f = z^4 + 8z^3 + 3z^2 + 8z + 3$

b) $f = z^5 - z + 16$

c) $f = z^4 - z^3 + 8z^2 - 4z + 4$

d) $f = z^7 + 4z^5 - z^4 - 8z^2 - 4$.

Poniżej przypominam dyskutowany na ćwiczeniach materiał, wraz z trzema rozwiązaniami zadania podobnego co wyżej typu.

Zasada argumentu: przypomnienie materiału z wykładu.

Zasada arumentu stwierdza równość $\mathrm{Ind}(f \circ \gamma, 0) = \frac{1}{2\pi \mathbf{i}} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz$ i wiąże tę wspólną wartość I z zerami funkcji homorficznej f (określonej na pewnym zbiorze otwartym U, w którym droga zamknięta γ jest homotopijnie nieistotna; zakłada się, że $0 \notin \mathrm{im}(f \circ \gamma)$.) Powstaje pytanie, jak wyznaczyć I. Poczynimy kilka uwag.

(A) i). Całkę $\int_\lambda \frac{f'(z)}{f(z)} dz$ łatwo jest wyznaczyć, gdy znana jest funkcja g, holomorficzna w otoczeniu zbiorzu $\mathrm{im}(\lambda)$, taka, że $e^g = f$. (Droga $\lambda : [a, b] \to \mathbb{C}$ nie musi tu być zamknięta.) Istotnie, ma wtedy miejsce równość $f'/f = g'e^g/e^g = g'$, wobec czego $\int_\lambda \frac{f'(z)}{f(z)} dz = g(\lambda(b)) - g(\lambda(a))$.

ii). Zawsze można obraz drogi γ podzielić na kolejne łuki $L_1, ..., L_k$, takie, że na każdym ze zbiorów $f(L_i)$ istnieje gałąź logarytmu, którą oznaczę ℓ_i (nie muszą te różne gałęzie być zadane wspólnym wzorem). Wówczas dla $g_i := \ell_i \circ f$ zachodzi równość $e^{g_i} = f$, wobec czego każdą całkę $\int_{L_i} \frac{f'(z)}{f(z)} dz$ można wyznaczyć jak w i), a następnie skorzystać z równości $\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{i=1}^k \int_{L_i} \frac{f'(z)}{f(z)} dz$. Nie uzasadniam dlaczego „zawsze można podzielić", bo i tak podziału dokonujemy w oparciu o dane z zadania.

B) Inny sposób wyznaczenia wartości I wiąże się ogólnie z wyznaczeniem $\mathrm{Ind}(\lambda, 0)$ dla drogi zamkniętej $\lambda : [a, b] \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$. (Wyżej, $\lambda = f \circ \gamma$, lecz nie jest to istotne.) Otóż $2\pi \mathrm{Ind}(\lambda, 0)$ to $\Delta_{Arg}(\lambda)$, przyrost argumentu punktu $\lambda(t)$, gdy t zmienia się od a do b. Ten przyrost, wzdłuż drogi niekoniecznie zamkniętej, ma trzy dogodne własności:

i). Jeśli na obrazie drogi $\lambda : [a, b] \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ określona jest (jakakolwiek) gałąź argumentu, którą oznaczymy arg, to $\Delta_{Arg}(\lambda) = arg(\lambda(b)) - arg(\lambda(a))$.

ii). Gdy drogę λ podzielimy na dwie kolejne drogi λ_1 i λ_2, do $\Delta_{Arg}(\lambda) = \Delta_{Arg}(\lambda_1) + \Delta_{Arg}(\lambda_2)$, oraz

iii) Gdy λ jest iloczynem dróg $\lambda_1, \lambda_2 : [a, b] \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ (tzn. $\lambda(t) = \lambda_1(t)\lambda_2(t)$ dla

$t \in [a,b]$), to $\Delta_{Arg}(\lambda) = \Delta_{Arg}(\lambda_1) + \Delta_{Arg}(\lambda_2)$.

Znów, można podzielić całą drogę na kolejne kawałki, do których stosuje się i).

C) Trzeci sposób wyznaczenia I wykorzystuje takie własności indeksu:

i). $\mathrm{Ind}(\lambda, 0)$ nie ulegnie zmianie, gdy pętlę $\lambda : [a,b] \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ zastąpimy przez pętlę, homotopijną z nią w $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

ii). Jeśli istnieje półprosta L taka, że $\lambda^{-1}(L)$ jest skończonym podzbiorem odcinka $[a,b]$, który oznaczymy $\{t_1, ..., t_n\}$, to $\mathrm{Ind}(\lambda, 0) = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i$, gdzie ε_i przyjmuje jedną z wartości $1, -1, 0$ jak opisałem na ćwiczeniach. (Dla $L = \mathbb{R}_-$ reguła jest taka: $\varepsilon_i = 1$, jeśli w t_i funkcja $\mathrm{Im}(\lambda(t))$ zmienia znak z dodatniego na ujemny, $\varepsilon_i = -1$ gdy zmienia znak z ujemnego na dodatni, zaś $\varepsilon_i = 0$ gdy nie zmienia znaku. Inaczej: $\varepsilon_i = 1$ gdy na skrzyżowaniu $\lambda(t_i)$ drogi λ z półprostą L „droga ma pierwszeństwo przejazdu", $\varepsilon_i = -1$ gdy półprosta ma pierwszeństwo, zaś $\varepsilon_i = 0$ jeśli „kolizja w $\lambda(t_i)$ jest pozorna".)

D) Warto też uwzględnić to, że indeks pętli jest liczbą całkowitą – więc wyznaczenie $\frac{1}{2\pi}\Delta_{Arg}(f \circ \gamma)$ czy $\frac{1}{2\pi\mathbf{i}}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz$ z błędem $< 1/2$ pozwala uzyskać poprawną odpowiedź.

Na przykładzie poniższego zadania przedstawiono na ćwiczeniach wykorzystanie niektórych z uwag A, B, C. Niżej ponownie szkicuję trzy rozwiązania, odpowiadające każdej z nich.

Zadanie (rozwiązane na ćwiczeniach). Wyznaczyć liczbę pierwiastków wielomianu $f = z^7 + 6z^4 + 1$ w półpłaszczyźnie $\mathrm{Re}(z) \geq 0$.

Pierwsze rozwiązanie.: Zbadajmy liczbę zer wielomianu f w półkolu $\mathrm{Re}(z) > 0, |z| \leq R$, gdzie promień R jest dostatecznie duży. Brzeg (zorientowany) tego półkola podzielimy na dwie części: półokrąg, sparametryzowany drogą $\mu(t) = Re^{\mathbf{i}t}$ ($t \in [-\pi/2, \pi/2]$) i odcinek sparametryzowany drogą $\lambda(t) = -\mathbf{i}t$ ($t \in [-R, R]$).

By zbadać $\Delta_{\mathrm{Arg}}(f \circ \mu)$ napiszemy $f(\mu(t)) = \mu^7(t)\nu(t)$, gdzie $\nu(t) = 1 + \frac{6}{\mu^4(t)} + \frac{1}{\mu^7(t)}$. Na podstawie uwagi B, $\Delta_{\mathrm{Arg}}(f \circ \mu) = 7\Delta_{\mathrm{Arg}}(\mu) + \Delta_{\mathrm{Arg}}(\nu)$. Na obrazie drogi μ określona jest funkcja Arg i uzyskujemy $\Delta_{\mathrm{Arg}}(\mu) = \pi$, patrz B i) wyżej. Natomiast droga ν przebiega w kole $|w - 1| \leq 6R^{-4} + R^{-7}$, więc jeśli zażądamy, by $R > 1$ i $7/R^4 < 1$, to koło to (mające srodek w 1) będzie miało promień $< 7/R^4 < 1$ i określona na nim będzie funkcja Arg. Ponadto, przy dużym R koło to będzie tak małe, by $|\mathrm{Arg}(w) - \mathrm{Arg}(1)| < 1/10$ dla wszystkich w z tego koła. Ponownie korzystając z B i) stwierdzamy, że $|\Delta_{\mathrm{Arg}}(\nu)| < 2/10$. Tak więc $|\Delta_{\mathrm{Arg}}(f \circ \mu) - 7\pi| < 0.2$.

Na koniec, droga $f \circ \lambda$ przebiega w zbiorze $\{z : \mathrm{Im} z \geq 1\}$ (uzasadniono to na ćwiczeniach), a w nim określona jest funkcja Arg. Tak więc $\Delta_{\mathrm{Arg}}(f \circ \lambda) = \mathrm{Arg}(f(-R\mathbf{i})) - \mathrm{Arg}(f(R\mathbf{i}))$. Pomnożenie liczby zespolonej przez liczbę dodatnią (tu –przez R^7) nie zmienia wartości Arg , wiec $\mathrm{Arg}(f(-R\mathbf{i})) = \mathrm{Arg}((-\mathbf{i})^7 z)$, gdzie $z = 1 + \frac{6}{(-\mathbf{i}R)^4} + \frac{1}{(-\mathbf{i}R)^7}$ jest liczbą bardzo bliska 1 gdy R jest duże. Zatem $\mathrm{Arg}(f(-R\mathbf{i})) \approx \mathrm{Arg}((-\mathbf{i})^7) = \mathrm{Arg}(\mathbf{i}) = \pi/2$ i podobnie $\mathrm{Arg}(f(R\mathbf{i})) \approx -\pi/2$, skąd $\Delta_{\mathrm{Arg}}(f \circ \lambda) \approx \pi$ (wszystko dla dużych R).

Ostatecznie więc $\Delta_{\mathrm{Arg}}(f \circ \gamma)$ jest liczbą bliską $7\pi + \pi = 8\pi$, zaś $\mathrm{Ind}(f \circ \gamma)$ jest liczbą całkowitą, bliską $\frac{1}{2\pi} \cdot 8\pi = 4$. Wobec tego $\mathrm{Ind}(f \circ \gamma) = 4$ i tyle wynosi liczba zer funkcji f w rozważanym pólkolu, gdy promień R jest dostatecznie duży. W całej półpłaszczyźnie są więc 4 pierwiastki wielomianu f, liczone z krotnościami.

Drugie rozwiązanie. Dla dużych R można $f \circ \mu$ połączyć z drogą μ^7 homotopią w $\mathbb{C} \setminus \{0\}$; homotopię określamy wzorem $[0,1] \times [-\pi/2, \pi/2] \ni (s,t) \mapsto f_s \circ \mu(t)$, gdzie $f_s(z) = z^7 + s(6z^4 + 1)$. (To, że wartość 0 nie jest przyjmowana wynika stąd, że $|6z^4 + 1| < |z|^7$ dla dużych $|z| = R$.) Natomiast $f \circ \lambda$ przyjmuje wartości w $\{z : \mathrm{Re}(z) \geq 1\}$, bo dla $z = -\mathbf{i}t \in \mathrm{im}(\lambda)$ zachodzi $f(z) = \mathbf{i}t^7 + 6t^4 + 1$. W szczególności, f nie ma pierwiastków na osi $\mathrm{Re}(z) = 0$.

Powyższa homotopia w punktach zbioru $[0,1] \times \{\pm\pi/2\}$ przyjmuje wartości poza prostą $\mathrm{Im}(z) = 0$. Wobec tego pętla $f \circ (\lambda \# \mu)$ jest w $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ homotopijna z pętlą $\gamma := (f \circ \lambda) \# L_1 \# \mu^7 \# L_2$, gdzie L_1 i L_2 to pewne drogi w $\{z : \mathrm{Im}(z) \neq 0\}$. Indeks $\mathrm{ind}(\gamma, 0)$ można wyznaczyć stosując uwagę C ii) –wystarczy zauważyć, że półprosta $(-\infty, 0]_{\mathbb{R}}$ nie przecina obrazów dróg L_1, L_2 i $f \circ \lambda$, zaś obraz drogi μ^7 przecina w jednym punkcie $-R^7$, równym $(\mu(t_j))^7$ dla czterech wartości $t_j \in [-\pi/2, \pi/2]$ (mianowicie, dla $t_j = \frac{\pi}{7}(-1 + 2j)$, $j = -1, 0, 1, 2$); przy tym wszystkie liczby ε_j są równe 1. Warto też naszkicować schematyczny rysunek pętli γ.

Stąd dla dużych R, $\mathrm{ind}(\gamma, 0) = 4$ i tym samym $\mathrm{ind}(f \circ (\lambda \# \mu), 0) = 4$. Są więc cztery pierwiastki w $\{z : |z| < R \text{ i } \mathrm{Re}(z) > 0\}$, na podstawie twierdzenia o residuach.

Trzecie rozwiązanie. W otoczeniu krzywej $\mathrm{im}(\mu)$ określić można gałąź logarytmu g funkcji f wzorem $g(z) = 7\mathrm{Log}(z) + \mathrm{Log}(1 + \frac{6}{z^3} + \frac{1}{z^7})$. Tak więc $e^{g(z)} = f(z)$ dla z z otoczenia półokręgu $(Re^{\mathbf{i}t})_{t \in [-\pi/2, \pi/2]}$, co dla tych z daje $f'(z)/f(z) = g'(z)$ i wobec tego $\int_\mu \frac{f'}{f} = g(iR) - g(-iR) = 7\mathrm{Log}(-iR^7) - 7\mathrm{Log}(iR^7) + o(R)$. (Tu Log może być dowolną gałęzią logarytmu, określoną w otoczeniu rozważanego półokręgu –n.p. określoną poza $(-\infty, 0]_{\mathbb{R}}$.) Podobnie można oszacować $\int_\lambda \frac{f'}{f}$ – gra rolę to, że f przyjmuje na $\mathrm{im}(\lambda)$ wartości w $\{z : \mathrm{Re} z > 0\}$, a tam określona jest ta sama gałąź Log. Otrzymamy, że przy $R \to \infty$, liczba $\frac{1}{2\pi\mathbf{i}}(\int_\lambda \frac{f'}{f} + \int_\mu \frac{f'}{f})$ dąży do $7/2 + 1/2 = 4$ i teza znów wynika z zasady argumentu.

Jedenasta porcja zadań, wraz z zadaniami z ćwiczeń.

Uwaga 1. Państwa grupa (środowa) jest pokrzywdzona przez to, że w przerwie 23 XII – 7 I wpypadły aż 3 środy, wobec czego mają Państwo o jedne ćwiczenia mniej, niż pozostałe grupy. A że materiału pozostało sporo, to wywieszam tu kolejne dwie porcje zadań. Proszę starać się przemyśleć możliwie dużo z nich.

Uwaga 2. Osoby, które uzyskały z kolokwium mniej, niż 50p., mają prawo składać na piśmie rozwiązania wybranych przez siebie ≤ 12 zadań, wybranych z tego zbioru lub skądinąd, których rozwiązanie (czy ich zapis) sprawia Im kłopot i chcieliby się co do nich upewnić. Osoby, które uzyskały więcej punktów, mają to prawo w odniesieniu do ≤ 6 zadań. Składanie tych zadań nie wpłynie na wynik ćwiczeń, a ma na celu jedynie pomóc w opanowaniu materiału. (Wyniki ćwiczeń nadal są uzależnione od zgłaszanych zadań domowych i aktywności na ćwiczeniach.) Ta oferta obowiązuje do 20 I 2016r., poźniej składanych zadań nie zdążyłbym zwrócić z uwagami.

Uwaga 3. Przypominam, że zgłaszać można też nieomawiane wcześnie zadania z wcześniejszych serii.

1. Wyznaczyć liczbę zer (liczonych z krotnościami) funkcji f w zbiorze K, gdy:
a)+ $f(z) = z^{87} + 36z^{57} + 71z^4 + z^3 - z + 1,\ K = \{z : |z| \leq 1\}$,
b)+ f jest jak wyżej, $K = \{z : 1 \leq |z| \leq 2\}$,
c) $f(z) = 2z^5 - 6z^2 + z + 1,\ K$ jest jak w b),
d) $f(z) = z^8 + z^2 - 16,\ K$ jest jak w b).

2. Niech funkcja f, holomoficzna w otoczeniu koła $D = \{z : |z| \leq 1\}$, spełnia warunek $f(0) = 0$ i $0 \notin f(\partial D)$. Dowieść, że $f(D)$ zawiera koło $\{z : |z| < r\}$, gdzie $r = \operatorname{dist}(0, f(\partial D))$.

3. Dowieść, że dla $\lambda \in (1, \infty)$ równanie $ze^{\lambda - z} = 1$ ma w kole $|z| < 1$ dokładnie jedno rozwiązanie. (Wskazówka: tw. Rouchego, zastosowane do funkcji $ze^{\lambda-z} - 1$ i $ze^{\lambda-z}$.)

4. (Dotyczy krotności zer funkcji i rozwijania w szereg.) Funkcja f, holomorficzna w otoczeniu zera, przyjmuje wartości rzeczywiste na dwóch odcinkach $[0, se^{\mathbf{i}\alpha}]$ i $[0, se^{\mathbf{i}\beta}]$. Dowieść, że $\beta - \alpha$ jest wymierną wielokrotnością liczby π. (Wskazówka: przez przesunięcie i obrót sprowadzić zadanie do przypadku, gdy $f(0) = 0$ i $\alpha = 0$.)

5. a) Niech funkcja g będzie holomorficzna w otoczeniu punktu $p = 0$ i spełnia warunek $g(p) \neq 0$. Rozumując jak w rozwiązywanym na ćwiczeniach poniższym zadaniu 6b) dowieść, że przy $f(z) = g(z)/z^n$ ma miejsce równość $\operatorname{res}(f, p) = \frac{1}{(n-1)!} g^{(n-1)}(p)$. Następnie rozszerzyć ten wzór na przypadek, gdy $p \neq 0$.
b) Wyznaczyć $\operatorname{res}(f, \mathbf{i})$ dla $f(z) = \mathrm{e}^z/(z^2 + 1)^2$

6. (Dotyczy twierdzenia o residuach.) Znaleźć $\int_{\partial D} f(z)dz$, gdy
a)+ $f(z) = \frac{1}{\sin z},\ D = \{z : |z| < 1\}$,
b) f jest jak wyżej, $D = \{z : |z| < 4\}$,
c) $f(z) = \frac{1}{z^4 - 1},\ D = \{z : |z - \mathbf{i}| < 1\}$
d) $f(z) = \frac{1+z}{1-e^z},\ D = \{z : |z| < 8\}$.

7. Oznaczmy przez γ łamaną $[w_0, w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_0]$, gdzie $w_0 = 1, w_1 = \mathbf{i}, w_2 = -\frac{1}{2}(1 + \mathbf{i}), w_3 = 2 + \mathbf{i}, w_4 = -1 + \frac{1}{2}\mathbf{i}, w_5 = 1 - \mathbf{i}$. Znaleźć całkę $\int_\gamma f(z)dz$, gdy a) $f(z) = e^z/\sin z$, b) $f(z) = z/(1 - \cos z)$.

8. Niech P będzie prostokątem o wierzchołkach $0, 10, 10+4\mathbf{i}, 4\mathbf{i}$. Znaleźć $\int_{\partial P} f(z)dz$, gdy a) $f(z) = 1/(z^2 - 3z + 5)$, b)$f(z) = 1/(z^2 - z + 1)$.

<ins>Dwunasta porcja zadań.</ins>

1. Niech funkcja f, określona i holomorficzna w otoczeniu półpłaszczyzny $\Pi_+ = \{z : \mathrm{Im} z \geq 0\}$ z usuniętym zbiorem skończonym $B \subset \Pi_+ \setminus \mathbb{R}$. Udowodnić, że jeśli spełniony jest warunek:
*) $\quad |f(z)| \leq M/|z|^\alpha$ dla pewnych $M < \infty, \alpha > 1$ i wszystkich $z \in \Pi_+ \setminus B$,
to całka $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ istnieje i jest równa sumie residuów funkcji f w punktach zbioru B, pomnożonej przez $2\pi\mathbf{i}$. (Wskazówka: dla dużych r wyznaczyć całkę funkcji f po brzegu zbioru $\{z : |z| < r \text{ i } \mathrm{Im} z > 0\}$ w oparciu o twierdzenie o residuach; skorzystać z zadania III.4.)

2. W oparciu o powyższe zadanie dowieść, że (wybrać trzy z poniższych części):
a)+ $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4}dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$, b)+ $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^6}dx = \frac{\pi}{3}$, c)+ $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^3}dx = \frac{3\pi}{5}$,
d)+ $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x-1}{x^5-1}dx = \frac{4\pi}{5}\sin(2\pi/8)$. (Wskazówka: całkowana funkcja ma osobliwość pozorną w $z = 1$, więc spełnione są założenia zadania. Residua wyznaczyć trzeba w punktach $w = \exp(2\pi\mathbf{i}/5)$ i w^2. W z nich każdym obowiązuje reguła $\mathrm{res}(f, p) = (p-1)/(z^5-1)'$, gdzie pochodną ewaluujemy w $z = p$; ponadto, $p^4 = p^{-1}$.)

3. Dowieść tezy zadania przy warunku (*) zastąpionym przez:
(**) $\lim_{|z|\to\infty, z\in\Pi_+\setminus B} f(z)e^{-\mathbf{i}z} = 0$.
Wskazówka: zadanie III.5. Dla uzasadnienia zbieżności całki, dla dużych $r_1 < r_2$ porównać $\int_{r_1}^{r_2} f(z)dz$ i $\int_{-r_2}^{-r_1} f(z)dz$ z $\int_{\mathbf{i}r_1}^{\mathbf{i}r_2} f(z)dz$, też korzystając z zadania III.5.

4. W oparciu o powyższe zadanie dowieść, że:
a) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\mathbf{i}at}}{1+t^2}dt = \pi e^{-a}$. (Wskazówka: podstawić $at = x$.)
b) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(at)}{1+t^2}dt = \pi e^{-a}$ gdy $a > 0$. (Wskazówka: $\cos t = \mathrm{Re}(e^{\mathbf{i}t})$ dla $t \in \mathbb{R}$.)
c)+ $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{t\sin(\pi t)}{t^2+2t+5}dt = ?$ (znaleźć wartość ?.)

5. Niech $f(z) = g(z)/h(z)$, gdzie g i h są wielomianami takimi, że $\deg(h) = \deg(g)+1$ i najstarszy (przy najwyższej potędze zmiennej) współczynnik obu tych wielomianów jest równy 1. Dowieść, że jeśli dysk D zawiera w swym wnętrzu wszystkie bieguny funkcji f, to $\int_{\partial D} f(z)dz = 2\pi\mathbf{i}$. (Wskazówka: porównaj z zadaniem IV.6.)

6. * a) Dowieść, że jeśli $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ jest funkcją holomorficzną i $\lim_{|z|\to\infty} |f(z)| = \infty$, to f jest wielomianem. (Wskazówka: zauważyć w oparciu o twierdzenie Casoratiego-Sochockiego-Weierstrassa, że funkcja $z \mapsto f(1/z)$ ma biegun w zerze; zbadać, co mówi to o rozwinieciu f w szereg Maclaurina).

b) Niech $f : \mathbb{C} \setminus B \to \mathbb{C}$ będzie funkcją holomorficzną, mającą bieguny w punktach skończonego zbioru B. Dowieść, że jeśli $\lim_{|z|\to\infty} |f(z)| = \infty$, to f jest funkcją wymierną. (Wskazówka: dla $b \in B$ oznaczyć przez f_b sumę części głównej funkcji f w punkcie b (czyli sumę składników ujemnego stopnia rozwinięcia f w szereg Laurenta wokół b); dowieść, że a) stosuje się do $f - \sum_{b\in B} f_b$.)

Trzynasta porcja zadań.

A. Proszę powrócić do zadania XII.2d); dodałem w nim wskazówkę.

B. Wywieszam plik egzaminu sprzed roku.

1. Dowieść, że a) $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{1-2a\cos t+a^2} = \frac{2\pi}{1-a^2}$, b)+ $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{2-\sin t} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$, c)* + $\int_0^{2\pi} (\cos t)^{2n} dt = \frac{2\pi(2n)!}{4^n(n!)^2}$.

Wyjaśnienie, jakie własności ma $\overline{C} = C \cup \{\infty\}$, znajduje się w „Dodatku" po zadaniach. W razie potrzeby omówimy to na ćwiczeniach, lecz proszę „Dodatek" samodzielnie przeczytać.

Homografie są to funkcje wymierne zadane dla $z \in \overline{\mathbb{C}}$ wzorem:

$$h_A(z) = \frac{az+b}{cz+d} \quad , \qquad \text{gdzie } A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ i } \det(A) \neq 0. \tag{1a}$$

h_A jest funkcją meromorficzną, z biegunem w $-d/c$, ciągłą jako funkcja z $\overline{\mathbb{C}}$ w $\overline{\mathbb{C}}$, przy czym $h_A(\infty) = a/c$ i $h_A(-d/c) = \infty$.

2. Dowieść, że dla nieosobliwych 2×2 macierzy zespolonych A, B ma miejsce równość $h_{AB} = h_A \circ h_B$. Wywnioskować, że homografie tworzą grupę przekształceń przestrzeni $\overline{\mathbb{C}}$. (Wskazówka: funkcje ciągłe są równe, jeśli są równe na zbiorze gęstym, więc równości $h_{AB}(z) = h_A(h_B(z))$ wystarcza dowieść, gdy każdy z punktów $z,\ h_B(z), h_{AB}(z)$ jest różny od ∞.)

3. a) Homografia h_A ma pewien punkt stały, a jeśli ma ich więcej niż 2 to jest identycznością, zaś macierz A jest proporcjonalna do jednostkowej.

b) Gdy homografie h_A i h_B w są równe w 3 punktach, to macierze A i B są proporcjonalne i $h_A = h_B$. (Wskazówka: przy $B = I$ wynika to z b); wykorzystać zadanie 2.)

c) Niech $\mathrm{Fix}(h) = \{z \in \overline{\mathbb{C}} : h(z) = z\}$. Wyznaczyć warunki na homografię h, by, odpowiednio, i) $\infty \in \mathrm{Fix}(h)$, ii) $\mathrm{Fix}(h) = \{0, \infty\}$, iii) $\mathrm{Fix}(h) = \{\infty\}$.

4. Niech p_1, p_2, p_3 i q_1, q_2, q_3 będą trójkami różnych liczb zespolonych. Wówczas:

a) Istnieje jedyna homografia g taka, że $g(p_1) = 0, g(p_2) = \infty$ i $g(p_3) = 1$; jest nią $g(z) = k(z-p_1)/(z-p_2)$, gdzie $k = (p_3-p_2)/(p_3-p_1)$.

b) Istnieje jedyna homografia h taka, że $h(p_i) = q_i$ dla $i = 1, 2, 3$. (Wskazówka: $h = g_2^{-1} \circ g_1$, gdzie g_1 i g_2 konstruuje się w oparciu o a).)

c) Gdy w jest obrazem danego punktu z przy powyższej homografii h, to $\frac{p_3-p_2}{p_3-p_1} \cdot \frac{z-p_1}{z-p_2} = \frac{q_3-q_2}{q_3-q_1} \cdot \frac{w-q_1}{w-q_2}$. (Wskazówka: $g_2 \circ h = g_1$.)

Definicja. **Okręgiem w $\overline{\mathbb{C}}$** nazywamy każdy okrąg w $\mathbb{C}$, o dodatnim promieniu, i każdy zbiór postaci $L \cup \{\infty\}$, gdzie L jest prostą w $\mathbb{C}$.

5. a) W $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$, każdy okrąg i każdą prostą można zadać równaniem $kx^2+ky^2+px+qy+c=0$, gdzie $k,p,q,c \in \mathbb{R}$. Odwrotnie, niepusty zbiór zadany takim równaniem jest prostą, okręgiem, punktem lub płaszczyzną. Gdy $k \neq 0$, jaki jest promień i środek okręgu?

b) Homografia $h(z) = 1/z$ przeprowadza każdy okrąg w $\overline{\mathbb{C}}$ na okrąg w $\overline{\mathbb{C}}$.

c) Każda homografia przeprowadza okręgi w $\overline{\mathbb{C}}$ na okręgi w $\overline{\mathbb{C}}$. (Wskazówka: przedstawić daną homografię jako złożenie kilku przekształceń, wśród których występują tylko przesunięcia, jednokładości i homografia $z \mapsto 1/z$.)

d) Każdy okrąg w $\overline{\mathbb{C}}$ można homografią przeprowadzić na $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

Poniżej, D jest dyskiem $|z| < 1$, a S jego brzegiem.

6. a) Jeśli h jest homografią i $h(S) = S$, to albo $h(D) = D$, albo $h(D) = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\} \cup \{\infty\}$.

b) Jeśli $h(D) = D$, to $h(z) = k\frac{z-w}{1-z\overline{w}}$, dla pewnych $w \in D$ i $k \in S$. (Wskazówka: lemat Schwarza.)

c) Jeśli $h(D) \neq D$, to $h(z) = k\frac{z-w}{1-z\overline{w}}$, gdzie $|k| = 1$ i $|w| > 1$. (Wskazówka: a) i b).)

Zadanie 7. + a) Niech obszar $G \subset \mathbb{C}$ będzie ograniczony łukami dwóch okręgów w $\overline{\mathbb{C}}$, przecinającymi się w punktach $a, b \in \mathbb{C}$. Opisać obraz $h(G)$ tego obszaru przy homografii $h(z) = (z-a)/(z-b)$.

b) Znaleźć różnowartościowe przekształcenie holomorficzne, przeprowadzające półkole $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1 \text{ i } \mathrm{Im} z > 0\}$ odpowiednio na i) półpłaszczyznę $\mathrm{Im} z > 0$, ii) pierwszą ćwiartkę $\{z : \mathrm{Im} z > 0 \text{ i } \mathrm{Re} z > 0\}$.

Dodatek: Rozszerzona płaszczyzna zespolona (sfera Riemanna).

Niech $\overline{\mathbb{C}} := \{\infty\} \cup \mathbb{C}$, gdzie ∞ to punkt nie należący do płaszczyzny $\mathbb{C}$. Można $\overline{\mathbb{C}}$ dogodnie zamienić w przestrzeń topologiczną, homeomorficzną ze sferą. Jawny wzór na (pewną) metrykę d, zadającą topologię przestrzeni $\overline{\mathbb{C}}$, uzyskujemy następująco. Niech $S = \{(z,t) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R} : |z|^2 + t^2 = 1\}$ będzie sferą jednostkową w $\mathbb{C} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^3$, niech $n = (0_{\mathbb{C}}, 1_{\mathbb{R}}) \in S$ i niech $F : S \to \overline{\mathbb{C}} \times \{0_{\mathbb{R}}\}$ oznacza **rzut stereograficzny**, tzn. $F(p)$ jest punktem przecięcia prostej np z płaszczyzną $\mathbb{C} \times \{0_{\mathbb{R}}\}$ gdy $p \in S \setminus \{n\}$, zaś punktem $(\infty, 0_{\mathbb{R}})$ gdy $p = n$. Przyjmujemy

$$d(z_1, z_2) = \|F^{-1}(z_1, 0_{\mathbb{R}}) - F^{-1}(z_2, 0_{\mathbb{R}})\| \quad \text{dla} \quad z_1, z_2 \in \overline{\mathbb{C}}, \qquad \text{(*)span}$$

gdzie $\|(z,t)\| = \sqrt{|z|^2 + t^2}$ oznacza normę euklidesową w $\mathbb{R}^3 = \mathbb{C} \times \mathbb{R}$. Przestrzeń $\overline{\mathbb{C}}$ nazywana jest **płaszczyzną rozszerzoną** lub **sferą Riemanna**. Z powyższą **metryką sferyczną** d, jest ona izometryczna ze sferą S: izometrią jest rzut F. Jest to więc zwarta przestrzeń metryczna, przy czym ϵ–dysk w metryce d wokół ∞ jest postaci $\{\infty\} \cup \{z \in \mathbb{C} : |z| > R(\epsilon)\}$, gdzie $\lim_{\epsilon \to 0} R(\epsilon) = \infty$. Ponieważ ponadto $F_{|S\setminus\{n\}}$ jest homeomorfizmem $S \setminus \{n\}$ na $\mathbb{C} \times \{0_{\mathbb{R}}\}$, więc wynika stąd, że dla $z, z_1, z_2, \dots \in \overline{\mathbb{C}}$ zachodzi w metryce d:

$$(z_n \to z) \Leftrightarrow [(z \in \mathbb{C} \quad \text{i} \quad |z_n - z| \to 0) \;\; \text{lub} \;\; (z = \infty \quad \text{i} \quad |z_n| \to \infty)]. \text{(**)span}$$

Nietrudno jest wyliczyć $F^{-1}(z, 0)$ i nadać wzorowi (*) bardziej jawną postać. Jednak w żadnej postaci wzór ten nie będzie wykorzystany, a istotna będzie tylko charakteryzacja zbieżności (**). Oznacza ona, że na $\mathbb{C}$ topologia przestrzeni $\overline{\mathbb{C}}$ jest identyczna z wyjściową i $\overline{\mathbb{C}}$ jest tzw. **uzwarceniem jednopunktowym** (inaczej: **Aleksandrowa**) płaszczyzny $\mathbb{C}$.

Z (**) wynika, że gdy $a_n, b_n \in \mathbb{C}$ i $a_n \to \infty$, to $\overline{a_n} \to \infty$ oraz $a_n/b_n \to \infty$, $a_n \pm b_n \to \infty$ i $b_n/a_n \to 0$ o ile ciąg b_n jest ograniczony. (Inaczej konkluzja może być fałszywa.) Uzasadnia to przyjęcie, że $\overline{\infty} = \infty$ i $\infty \cdot a = \infty/a = a \pm \infty = \infty$ dla $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Czternasta porcja zadań.

Przypomnienie: dla zbiorów otwartych $U, V \subset \overline{C}$, funkcję $f : U \to V$ nazywamy **konforemną**, jeśli jest meromorficzna i przekształca U bijektywnie na V. Na ogół, $U, V \subset \mathbb{C}$, i wówczas zamiast „meromorficzna" można wyżej napisać „holomorficzna", bo f na może mieć biegunów w U (bo wartość w nich jest byłaby równa ∞).

1. a) Kąt $\{z : \varphi < \mathrm{Arg}_{[0,2\pi)}(z) < \psi\}$ można obrotem przeprowadzić konforemnie na kąt $K = \{z : 0 < \mathrm{Arg}_{[0,2\pi)}(z) < \alpha\}$, gdzie $0 < \alpha \le 2\pi$, a ten gałęzią funkcji $z \mapsto z^{\pi/\alpha}$ – na półpłaszczyznę $\Pi_+ = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im} z > 0\}$. (Taka gałąź na K istnieje–dlaczego?)

b) „Pas", tzn. zbiór ograniczony dwiema równoległymi prostymi, można konforemnie przeprowadzić na pas $\{z : 0 < \mathrm{Im} z < \alpha\}$, gdzie $\alpha \le 2\pi$, a ten funkcją exp na kąt $A = \{z : 0 < \mathrm{Arg}_{[0,2\pi)}(z) < \alpha\}$. Można uzyskać, by $\alpha = \pi$, a wtedy A jest półpłaszczyzną Π_+, lub też, by $\alpha = 2\pi$, kiedy to $A = \mathbb{C} \setminus [0, \infty)$ jest kątem pełnym.

c) „Półpas" $\{z : 0 < \mathrm{Im} z < \alpha, \mathrm{Re} z < c\}$ jest przez exp konforemnie przeprowadzany na wycinek koła, $\{z : |z| < e^c, 0 < \mathrm{Arg}_{[0,2\pi)}(z) < \alpha\}$, a ten przez $z \mapsto z^{\pi/\alpha}$ – na półkole.

2. a) Dowieść, że homografia $h(z) = (z - i)/(z + i)$ przeprowadza półpłaszczyznę Π_+ na dysk $D = \{z : |z| < 1\}$ i opisać obrazy przy h okręgów o środku w zerze i prostych równoległych do osi rzeczywistej lub do osi urojonej.

b) Dowieść, że homografia $h(z) = -(z + 1)/(z - 1)$ przeprowadza półkole $\Pi_+ \cap D$ na ćwiartkę płaszczyzny i opisać obrazy przy h okręgów o środku w zerze i prostych przechodzących przez 0.

3. a) Znaleźć przekształcenie konforemne kąta pełnego $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ na Π_+

b) Znaleźć przekształcenie konforemne półpasa $\{z : 0 < \mathrm{Im} z < \pi \text{ i } \mathrm{Re} z > 0\}$ na Π_+

4. Dowieść, że nie istnieje przekształcenie konforemne nakłutego dysku $D \setminus \{0\}$ na pierścień $1 < |z| < 2$. (Wskazówka: zauważyć, że przedłużałoby się ono holomorficznie na D.)

5. Niech U będzie obszarem jednospójnym w $\mathbb{C}$, różnym od $\mathbb{C}$, i niech funkcja holomorficzna $f : U \to U$ i punkt $p \in U$ spełniają warunek $f(p) = p$. Dowieść, że $|f'(p)| \leq 1$. (Wskazówka: lemat Schwarza i twierdzenie Riemanna.)

6. Oznaczmy przez f przekształcenie Żukowskiego $f(z) = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$. Dowieść, że przekształca ono konforemnie dysk nakłuty $D \setminus \{0\}$ na $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$ i zbadać, czym są obrazy przy f okręgów $|z| = r$.

7. * a) Niech S będzie okręgiem w $\overline{\mathbb{C}}$. Dowieść, że istnieje jedyna antyhomografia, której ten okrąg jest zborem punktów stałych. (**Antyhomografia** to złożenie homografii i przekształcenia $z \mapsto \overline{z}$. Wskazówka: za okrąg przyjąć wpierw prostą rozszerzoną $\overline{\mathbb{R}}$; potem skorzystać z zad. XIII.5d).)

b) Antyhomografię tę nazywamy **symetrią względem okręgu** S. Dowieść, że homografia, przeprowadzająca okrąg S na okrąg S', przeprowadza pary punktów symetryczne względem S na pary symetryczne względem S'.