Rozwiązania poszczególnych zadań proszę pisać na osobnych kartkach.
Wszystkie kartki należy podpisać i podać numer grupy ćwiczeniowej.

---

1. Określić, podając krótkie uzasadnienie, liczbę pierwiastków, liczonych z krotnościami, wielomianu $z^{10} - 4z^7 + 1$

(A) (10p.) w pierścieniu $\{z:\ 1 < |z| < 2\}$,

(B) (15p.) w półpłaszczyźnie $\{z:\ Re z > 0\}$.

---

2. (25p.) Znaleźć całkę $\displaystyle\int_\gamma \frac{1}{z(1-e^z)}\,dz$, gdzie γ jest kawałkami liniową parametryzacją łamanej zamkniętej $[w_0, w_1, w_2, w_3, w_4, w_0]$ o wierzchołkach $w_0 = -i$, $w_1 = -1$, $w_2 = 7+8i$, $w_3 = -7+8i$, $w_4 = 1$.

---

3. (A) (10p.) Niech U będzie obszarem zawartym między okręgami $\{z:\ |z-2| = 1\}$ oraz $\{z:\ |z-(1+i)| = 1\}$ i zawierającym punkt $\frac{1}{2}(3+i)$. Podać, z krótkim uzasadnieniem, przekształcenie konforemne U na półpłaszczyznę $\{z:\ Re z > 0\}$.

(B) (15p.) Niech $f: D \to W$ będzie przekształceniem konforemnym koła $D = \{z: |z| < 1\}$ na otwarty zbiór wypukły $W \subset \mathbb{C}$, przy czym $f(0) = 0$. Wykazać, że dla $E = \{z: |z| < \frac{1}{2}\}$ zbiór $f(E)$ jest wypukły.

[Wskazówka: Dla $a, b \in E$, $|a| \le |b|$, $b \neq 0$ oraz $t \in [0,1]$, zastosować (z uzasadnieniem) Lemat Schwarza do funkcji $g(z) = f^{-1}\left(tf(\frac{a}{b}z) + (1-t)f(z)\right)$ i rozpatrzyć $g(b)$.]

---

4. (25p.) Niech $U = \{z:\ 0 < |z| < 2\} \setminus \{\frac{1}{n}:\ n = 1, 2, \ldots\}$ i niech $f: U \to \mathbb{C}$ będzie funkcją holomorficzną mającą w każdym punkcie $\frac{1}{n}$ biegun lub osobliwość istotną. Wykazać, że dla każdego $c \in \mathbb{C}$ istnieje ciąg $z_n \in U$ taki, że $z_n \to 0$ oraz $f(z_n) \to c$.

[Wskazówka: Dla $c \in \mathbb{C} \setminus f(U)$ rozpatrzyć funkcję $\frac{1}{f(z)-c}$]

Rozwiązania poszczególnych zadań proszę pisać na osobnych kartkach.

Wszystkie kartki należy podpisać i podać numer grupy ćwiczeniowej.

---

1. Określić, podając krótkie uzasadnienie, liczbę pierwiastków, liczonych z krotnościami, wielomianu $z^{10} - 4z^7 + 1$

(A) (10p.) w pierścieniu $\{z :\ 1 < |z| < 2\}$,

(B) (15p.) w półpłaszczyźnie $\{z :\ Re z > 0\}$.

---

2. (25p.) Znaleźć całkę $\displaystyle\int_\gamma \frac{1}{z(1-e^z)}\, dz$, gdzie γ jest kawałkami liniową parametryzacją łamanej zamkniętej $[w_0, w_1, w_2, w_3, w_4, w_0]$ o wierzchołkach $w_0 = -i$, $w_1 = -1$, $w_2 = 7 + 8i$, $w_3 = -7 + 8i$, $w_4 = 1$.

---

3. (A) (10p.) Niech U będzie obszarem zawartym między okręgami $\{z :\ |z - 2| = 1\}$ oraz $\{z :\ |z - (1+i)| = 1\}$ i zawierającym punkt $\frac{1}{2}(3+i)$. Podać, z krótkim uzasadnieniem, przekształcenie konforemne U na półpłaszczyznę $\{z :\ Re z > 0\}$.

(B) (15p.) Niech $f : D \to W$ będzie przekształceniem konforemnym koła $D = \{z : |z| < 1\}$ na otwarty zbiór wypukły $W \subset \mathbb{C}$, przy czym $f(0) = 0$. Wykazać, że dla $E = \{z : |z| < \frac{1}{2}\}$ zbiór $f(E)$ jest wypukły.

[Wskazówka: Dla $a, b \in E$, $|a| \le |b|$, $b \ne 0$ oraz $t \in [0, 1]$, zastosować (z uzasadnieniem) Lemat Schwarza do funkcji $g(z) = f^{-1}\left(tf(\frac{a}{b}z) + (1-t)f(z)\right)$ i rozpatrzyć $g(b)$.]

---

4. (25p.) Niech $U = \{z :\ 0 < |z| < 2\} \setminus \{\frac{1}{n} :\ n = 1, 2, \ldots\}$ i niech $f : U \to \mathbb{C}$ będzie funkcją holomorficzną mającą w każdym punkcie $\frac{1}{n}$ biegun lub osobliwość istotną. Wykazać, że dla każdego $c \in \mathbb{C}$ istnieje ciąg $z_n \in U$ taki, że $z_n \to 0$ oraz $f(z_n) \to c$.

[Wskazówka: Dla $c \in \mathbb{C} \setminus f(U)$ rozpatrzyć funkcję $\frac{1}{f(z)-c}$]

Rozwiązania poszczególnych zadań proszę pisać na osobnych kartkach.
Wszystkie kartki należy podpisać i podać numer grupy ćwiczeniowej.

---

1. (A) (15p.) Określić, podając krótkie uzasadnienie, liczbę pierwiastków, liczonych z krotnościami, wielomianu $z^7 + 5z^4 - 1$ w półpłaszczyźnie $\{z : Re z > 0\}$.

(B) (10p.) Niech $D = \{z : |z| < 1\}$ i niech $f_n : D \to \mathbb{C}$ będzie ciągiem funkcji holomorficznych, zbieżnym niemal jednostajnie do funkcji $f : D \to \mathbb{C}$, która nie jest stała. Wykazać, że jeśli $f(0) = 0$, to istnieje n oraz $z \in D$ takie, że $f_n(z) = 0$.

[Wskazówka: Wybrać (uzasadniając) koło $D_r = \{z : |z| < r\}$, $r < 1$, takie, że f nie przyjmuje zera w żadnym punkcie ∂D_r .]

---

2. (25p.) Znaleźć całkę $\displaystyle\int_\gamma \frac{Log z}{(z+2i)(z^2+4)}\, dz$, gdzie γ jest kawałkami liniową parametryzacją łamanej zamkniętej $[w_0, w_1, w_2, w_3, w_0]$ o wierzchołkach $w_0 = 4 - 3i$, $w_1 = -2 - 3i$, $w_2 = 4 + 3i$, $w_3 = -2 + 3i$.

---

3. (A) (10p.) Określić, z krótkim uzasadnieniem, przekształcenie konforemne obszaru zawartego między okręgami $\{z : |z - 2i| = 2\}$ oraz $\{z : |z - 3i| = 1\}$, zawierającego punkt i, na pas $\{z : 0 < Re z < 1\}$.

(B) (15p.) Niech $D = \{z : |z| < 1\}$ i niech $f : D \to D$ będzie funkcją holomorficzną taką, że dla pewnych $a, b \in D$, $a \neq b$, $f(a) = a$ oraz $f(b) = b$. Wykazać, że $f(z) = z$ dla $z \in D$.

[Wskazówka : Dla $g = \varphi^{-1} \circ f \circ \varphi$, gdzie $\varphi(z) = \dfrac{a - z}{1 - \bar{a}\, z}$, rozpatrzyć $g(0)$ oraz $g(\varphi^{-1}(b))$.]

---

4. Niech $U = \{z : 0 < |z| < 1\}$ i niech $f : U \to \mathbb{C}$ będzie różnowartościową funkcją holomorficzną.

(A) (10p.) Wykazać, że jeśli f ma w zerze osobliwość pozorną, to $\lim_{z\to 0} f(z) \notin f(U)$.

(B) (15p.) Wykazać, że jeśli f nie ma w zerze osobliwości pozornej, to ma w zerze biegun prosty.

[Wskazówka: Skorzystać z faktu, że każda funkcja holomorficzna przekształca otwarty zbiór spójny na zbiór otwarty lub w punkt. Dodatkowo, w (B), rozpatrzyć $\dfrac{1}{f}$.]
