Rozwiązania poszczególnych zadań proszę pisać na osobnych kartkach.

Wszystkie kartki należy podpisać i podać numer grupy ćwiczeniowej.

1.

(A) (15p.) Wyjaśnić, w jakich punktach funkcja $f(z) = (Re\, z)^2 e^{iz}$ ma pochodną zespoloną.

(B) (10p.) Niech $f : U \to \mathbb{C}$ będzie funkcją holomorficzną na zbiorze otwartym $U \subset \mathbb{C}$ i $f'(z) \neq 0$ dla $z \in U$. Wykazać, że funkcja $g = (Ref)^2 + i(Imf)^2$ nie jest holomorficzna.

2.

(A) (15p.) Znaleźć całkę $\displaystyle\int_{[1, \frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}]} \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z^4}\right) dz$.

(B) (10p.) Niech $W(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n$, $a_k \in \mathbb{C}$ i $D = \{z : |\, z\, | \leq r\}$. Pokazać, że

$$\int_{\partial D} \overline{W(z)}\, dz = 2\pi i r^2\, \overline{W'(0)}.$$

[Wskazówka: Całkując $\overline{W(z)}$ rozpatrzyć całki $\int_{\partial D} \frac{dz}{z^k}$, $k \neq -1$]

---

3 (25p.) Znaleźć całkę $\displaystyle\int_\gamma \frac{(Log z)^2}{(z - z_0)^2}\, dz$, gdzie γ jest kawałkami liniową parametryzacją łamanej zamkniętej $[w_0, w_1, w_2, w_3, w_0]$ o wierzchołkach $w_0 = 2$, $w_1 = -2+4i$, $w_2 = \frac{1}{2}+4i$, $w_3 = \frac{1}{2}-3i$ oraz

(A) $z_0 = 3i$ (B) $z_0 = i$ (C) $z_0 = 1 - i$.

---

4. (25p.) Niech $V = \{re^{i\theta} : r > 0,\ \theta \in \left(-\frac{\pi}{9}, \frac{\pi}{9}\right)\}$ i niech $f : \overline{V} \to \mathbb{C}$ będzie funkcją ciągłą, holomorficzną na V. Wykazać, że jeśli $|\, f(z)\, | \leq exp\,(|\, z\, |^2)$ dla $z \in V$ oraz $|\, f(z)\, | \leq 1$ dla $z \in \overline{V} \setminus V$, to wówczas $|\, f(z)\, | \leq 1$ dla $z \in \overline{V}$.

[Wskazówka: Dla dowolnego $a > 0$ rozpatrzyć funkcję $F_a(z) = f(z) \cdot exp\,(-az^3)$, wykazać, że $|\, F_a(z)\, | \leq |\, f(z)\, |\, exp\,(-a\, |\, z\, |^3 \cos\frac{\pi}{3})$ oraz, dla dostatecznie dużych R, jeśli $|\, z\, | \geq R$, to $|\, F_a(z)\, | \leq 1$ i skorzystać z zasady maksimum modułu]
