Egzamin z matematyki ze statystyką, styczeń 2012;
Wydział Geografii i Studiów Regionalnych
Wersja próbna (przygotowawcza).
Prawdziwy egzamin będzie znacznie krótszy.

Zadanie 1. a) Wyraź jako logarytm dziesiętny liczbę $\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \log_5 6 \cdot \log_7 8 \cdot \log_8 9 \cdot \log_9 10$;

b) rozwiąż równanie $\log_{10}(x-2) + \log_{10}(x+2) - 2\log_{10} 2 - \frac{1}{3}\log_{10} 27 - \log_{10}(x+5)$;

Zadanie 2. (*niezwykla wasność liczby* 2012). Oblicz $\log_2 \log_{0!+1} \sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}}}}}$.

Zadanie 3. Wyznacz kąt między stycznymi do krzywej $y = f(x)$ w miejscach zerowych funkcji $f(x)$, gdy

a) $f(x) = x^2 - 5x + 6$; b) $f(x) = x^2 + 3x + 2$;c) $f(x) = x^2 + 3\sqrt{3}x + 6$;

d) $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$.

Zadanie 4.

Na wykresie funkcji $y = 3x + 2$ znajdź punkt, leżący najbliżej punktu $(1, 4)$.

Zadanie 5. Dany jest trójkąt o wierzchołkach $A = (0, 0)$; $B = (7, 0); C = (2, 5)$. Wyznacz:

a) równania prostych zawierających boki;
b) równania prostych zawierających środkowe;
c) równania prostych zawierających symetralne;
d) równania prostych zawierających wysokości;
e) równania prostych zawierających dwusieczne;
e) środek, promień i równanie okręgu opisanego;
f) środek ciężkości trójkąta;
f) równanie prostej Eulera (znajdź w Internecie określenie tej prostej);
g) współrzędne punktu Gergonne'a (tj. punktu, w którym przecinają się proste łączące wierzchołki trójkąta z punktami styczności okręgu wpisanego);
h) pole trójkąta.

Zadanie 6. Rozwiąż układ równań $\begin{array}{c} y + 3z - t = 0 \\ x - 5y - 10z + 3t = 1 \\ -x + 6y + 11y - 3t = -1 \\ -x + 5z + 9y - 2t = 0 \end{array}$ Możesz wykorzystać fakt, że macierzą odwrotną do $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & -5 & -10 & 3 \\ -1 & 6 & 11 & -3 \\ -1 & 5 & 9 & -2 \end{pmatrix}$ jest $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Zadanie 7. Średnią arytmetyczną liczb dodatnich $a_1, a_2, ..., a_n$ oznaczamy przez A , medianę tych liczb przez M , średnią geometryczną przez G , zaś odchylenie standardowe tych liczb przez s. Jeśli to możliwe, to wyznacz (a jeśli się

nie da, to uzasadnij, że to niemożliwe) średnią arytmetyczną, medianę, średnią geometryczną i odchylenie standardowe

a) liczb $2a_1, 2a_2, ..., 2a_n$;

b) liczb $a_1 + 1, a_2 + 1, a_3 + 1, .., a_n + 1$;

c) liczb $a_1 + 1, a_2 + 2, a_3 + 3..., a_n + n$;

d) kwadratów liczb $a_1, a_2, ..., a_n$.

e) logarytmów liczb $a_1, a_2, ..., a_n$;

f) liczb $-a_1, -a_2, ..., -a_n$.

Zadanie 8. W pewnym mieście kursują taksówki dwóch korporacji: Niebieskiej i Zielonej. Niebieskich jest 200, Zielonych 100. Wyznacz prawdopodobieństwo, że w czasie spaceru po mieście z dziesięciu pierwszych taksówek, jakie napotkasz, co najmniej sześć będzie zielonych.

Zadanie 9. Załóżmy, że w wyniku mierzenia wielu tysięcy czaszek kozic alpejskich znamy średnią długość czaszki dorosłego osobnika, która wynosi 200 mm z odchyleniem standardowym 15,0 mm. Rozkład tych długości jest zgodny z rozkładem normnlnym. Wyobraźmy sobie teraz, że z populacji kozic alpejskich bierzemy niezależne losowe próby po 36 osobników każda i wyznaczamy średnią długość takiej próby.

a) w jakich granicach zmieści się 50% średnich z prób 36-elementowych skupionych wokół średniej z populacji?

b) w zbiorach pewnego myśliwego z Bielska-Białej znajduje się 36 czaszek kozic, których średnia długość wynosi 205,4 mm. Czy kozice te pochodzą z Alp? Sformułuj hipotezę zerową i alternatywną. Podaj parametry rozkładu średnich z próby. Podaj obszar krytyczny w milimetrach na wybranym poziomie istotności.

Zadanie 10. Na 10 tysięcy rodzin pewnego dużego miasta 5433 ma samochód. Podaj 95% przedział ufności dla tej proporcji.

Zadanie 11. Aby ocenić ilość siana na obszarze leśnym 20 ha, pobrano losowo 150 prób o powierzchni 1 metra kwadratowego każda, zebrano z każdej cały plon siana, a nastepnie obliczono dla tych prób średnią 218,2 g siana z odchyleniem standardowym 38,0 g. Jak duży jest plon siana na całym obszarze 20 ha? W jakich granicach ten plon może się wahać, jeżeli zakładamy poziom istotności 0,05% ?

Zadanie 12. Które z wymienionych wielkości rosną, a które maleją wraz ze wzrostem wielkości próby: a) średnia arytmetyczna, b) średnia geometryczna, c) wariancja, d) odchylenie standardowe, e) przedział ufności.

Zadanie 13.

Przeciętna tygodniowa sprzedaż sklepu AGD to 134768 złotych z odchyleniem standardowym 13000. Zakładając normalność rozkładu, wyznacz prawdopodobieństwo, że w pewnym tygodniu sprzedaż

przekroczy 150000. Wyznacz prawdopodobieństwo, że w pewnym tygodniu spadnie poniżej 100000.

W pewnym tygodniu sprzedaż wyniosła tylko 80000 złotych. Czy można to przypisać losowości, czy należy szukać innych przyczyn?

Zadanie 14. W woreczkach ziemniaków znajduje się średnio 124 sztuki. Odchylenie standardowe wynosi 12. Wyznacz 10% woreczków z największą liczbą ziemniaków

Zadanie 15. Samoloty zużywają na trasie Warszawa - Madryt przeciętnie 5,7

tony paliwa z odchyleniem standardowym 0,5. Zabieranie zbyt wielkiej

ilosci paliwa jest nieekonomiczne, bo spowalnia samolot. Za mało paliwa może

oznaczać konieczność międzylądowania. Linie lotnicze chcą mieć 99% gwarancji,

że samolot doleci bez lądowania. Ile paliwa winien zatankować samolot?

Zadanie 16.

Steżenie zanieczyszczeń w półprzewodnikach produkowanych przez zakład w Brzęczyszczykiewiczach pod Trzemesznem podlega rozkładowi normalnemu ze średnią 127 cząsteczek na milion i odchyleniem 22 na milion. Półprzewodnik spełnia normy UE, jeśli proporcja zanieczyszczeń nie przekracza 150 na milion. Jaki procent półprzewodników brzęczyszczykiewickich spełnia normy UE?

Zadanie 17. Robisz doktorat z życia ślimaków. Zebrałeś takie dane. Znajdowałeś młode (M) i dorosłe (D) winniczki w trzech różnych miejscach: na powierzchni odkrytego gruntu (G), na roślinności zielnej (Z) i na pniach drzew (P), uzyskując następujące liczby ślimaków:

	G	R	P	$razem$
M	**52**	**43**	**17**	112
D	**108**	**15**	**74**	187
$razem$	160	58	91	309

W swojej pracy masz sformułować tezę, czy młode ślimaki różnią się od dorosłych skłonnością do przebywania w różnych mikrosiedliskach. Uzasadnij swoją odpowiedź.

Zadanie 18. W barze McDonald, którego jesteś szefem, zapytano 330 osób (155 kobiet i 175 mężczyzn) o preferencje dotyczące napojów gazowanych. Preferencje ułożyły się nastepująco:

	$Cola$	$Cola\ Zero$	$7\ Up$	$Fanta$	ŁĄCZNIE
M	**55**	**32**	**47**	**21**	155
K	**60**	**43**	**35**	**37**	175
RAZEM	115	75	82	58	330

Co napiszesz w raporcie dla centrali? Czy mężczyźni i kobiety różnią się istotnie w preferencjach wyboru napojów gazowanych? Podaj metodę, sprecyzuj poziom istotności, sformułuj hipotezę zerową, kryterium decyzji i Twoją decyzję.

Zadanie 19. W małym sklepiku osiedlowym klienci robią drobne zakupy. Dane z pewnej soboty zebrane są w poniższej tabelce.

zakupy w zlotych	**liczba klientów**
do 9	8
od 10 *do* 19	25
od 20 *do* 29	44
od 30 *do* 39	57
od 40 *do* 49	39
od 50 *do* 59	28
60 *i wyżej*	14

Średnia arytmetyczna i odchylenie standardowe wysokości zakupów poszczególnych klientów obliczone na podstawie tych danych są równe odpowiednio 35,4 (złotych) oraz 15,2. Przedstaw te dane na stosownym histogramie. Ustal zgodność tego szeregu rozdzielczego z rozkładem normalnym.

Zadanie 20. W następną sobotę dane były jak następuje:

zakupy w zlotych	**liczba klientów**
do 9	9
od 10 *do* 19	31
od 20 *do* 29	63
od 30 *do* 39	90
od 40 *do* 49	64
od 50 *do* 59	47
60 *i wyżej*	14

Średnia wartości zakupów wyniosła 36 zł. Odchylenie standardowe nie uległo zmianie. Czy z punktu widzenia statystyki można twierdzić, że średnia wzrosła istotnie? Czy z punktu widzenia statystyki można powiedzić, że struktury zakupów się różnią? Zaproponuj metodę rozstrzygnięcia problemu i uzasadnij swoją tezę.